51
Т416

А. М. Тимохин, Г. С. Шахнович

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Томск — 1983

УДК 517.53

Тимохин А.М., Шахнович Г.С. Руководство к решению задач по теории функций комплексного переменного: Учебное пособие. Часть I. - Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983.-4л.-20к. 300 экз. I702050000.

Данное пособие возникло на основе практических занятий, проводимых авторами со студентами физико-математических факультетов ТГУ. В каждой главе кратко излагается теоретическая часть, рассматривается решение типичных задач и приводятся задачи для самостоятельного решения.

Для студентов университетов и вузов, изучающих теорию функций комплексного переменного.

Рецензент - Л.И.Магазинников

Редактор - И.Г.Дик

Т $\frac{\text{I702050000}}{\text{I77(012)-83}}$ -67-83

© Издательство Томского университета, 1983г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Знать - значит уметь. Это положение, справедливое по отношению к научным знаниям вообще, приобрело особую значимость в математике.

Математическое образование сегодня предполагает самое активное овладение методами решения конкретных задач. Помочь обучающемуся понять суть математических методов, наиболее рациональным способом овладеть нужными техническими навыками в применении этих методов - задача специальных учебных пособий.

Несмотря на существование высококвалифицированных книг по функциям комплексного переменного, необходимость разработки новых учебных пособий по-прежнему актуальна, прежде всего по решению задач.

Представляемое учебное пособие - не конспект лекций, хотя необходимые теоретические сведения логично и полно излагаются в начале каждой главы, и не задачник, хотя содержит достаточное число упражнений для самостоятельной работы. Главное достоинство книги отражено в заглавии - это именно руководство по овладению многообразными навыками решения задач по курсу функции комплексного переменного.

В пособии отражен преподавательский опыт авторов в Томском университете. Ряд страниц книги - оригинальные разработки. Так, интерес читателя несомненно привлечет изложенный метод нахождения корней кубического уравнения.

Руководство предназначено прежде всего для студентов, но его, уверен, с благодарностью воспримут и люди, желающие получить или освежить знания и навыки использования методов функций комплексного переменного.

И.Г.Дик

ВВЕДЕНИЕ

"Руководство к решению задач по теории функций комплексного переменного" возникло на основе практических занятий, проводимых авторами со студентами физико-математических факультетов Томского университета. Несмотря на обилие литературы по теории данного вопроса, авторы регулярно отмечали трудности у учащихся при решении практических задач. Цель данного пособия-развить у учащихся навыки работы с комплексными числами и функциями комплексного переменного, усвоить различные искусственные приемы, значительно сокращающие время решения задач.

В каждой главе кратко излагается теоретическая часть, приводятся основные формулы. Затем рассматривается решение типичных задач. В конце каждой главы приводятся аналогичные задачи для самостоятельного решения.

Первая часть пособия содержит три главы.

Глава I посвящена комплексным числам и действиям над ними. В ней дается не совсем строгое, но популярное понятие комплексного числа, включены приложения формул Эйлера и Муавра к задачам тригонометрии и суммирования некоторых последовательностей и рядов.

Глава 2 знакомит учащихся с заданием кривых и областей в комплексной форме и носит вспомогательный характер, способствуя закреплению навыков работы над комплексными выражениями.

Глава 3 посвящена знакомству с основными трансцендентными функциями комплексного переменного. Эти функции вводятся на основе формул Эйлера. В качестве приложения рассматривается применение этих функций к решению кубических уравнений.

ГЛАВА I

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Комплексным числом в алгебраической форме называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y - действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ -так называемая мнимая единица, т.е. число, квадрат которого равен -1. Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа и обозначаются $x = Re(z)$, $y = Im(z)$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Таким образом, о д н о равенство между комплексными числами сводится к д в у м равенствам в действительных числах.

Если $y = Im(z) = 0$, то $z = x$ является д е й с т в и т е л ь н ы м числом, а если $x = Re(z) = 0$, то $z = iy$ является ч и с т о м н и м ы м числом.

Сложение (вычитание) комплексных чисел сводится к сложению (вычитанию) их действительных и мнимых частей, т.е.

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

Умножение комплексных чисел производится как умножение многочленов с последующей заменой i^2 на -1, т.е.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Комплексные числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются сопряженными числами. Из определения произведения следует, что

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0,$$

т.е. произведение сопряженных чисел является действительным неотрицательным числом. Учитывая это, при делении двух комплексных чисел нужно числитель и знаменатель дроби домножить на число, сопряженное знаменателю.

Комплексное число можно представлять либо в виде точки $M(x,y)$ плоскости XOY, либо вектором с проекциями x на ось абсцисс и y -на ось ординат. Плоскость, точки которой используются для геометрического представления комплексных чисел, называется комплексной плоскостью, ось абсцисс-действительной осью, ось ординат-мнимой осью. Геометрически сложение и вычитание комплексных чисел можно производить по правилу сложения и вычитания векторов.

Положение точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости часто удобно определять полярными координатами r и φ, где

$r=|z|$ -расстояние от начала координат до точки z, называемое м о д у л е м числа z, а φ -угол между действительной осью и вектором z, отсчитываемый от положительного направления действительной оси. Этот угол называется а р г у м е н т о м комплексного числа z и обозначается $Arg\,z$.

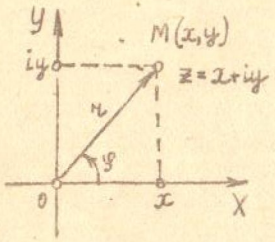

Рис.1.

Из (рис.I) видно, что

$$x = r\cos\varphi; \qquad y = r\sin\varphi. \qquad (1)$$

Следовательно, любое комплексное число $z\neq 0$ можно представить в виде

$$z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

Запись комплексного числа в виде (2) называется т р и г о н о м е т р и ч е с к о й ф о р м о й комплексного числа.

Очевидно, что

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ ; \qquad (3)$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}\ ,\quad \sin\varphi = \frac{y}{r}\ ,\quad tg\varphi = \frac{y}{x}\ . \qquad (4)$$

Формулы (4) служат для определения $Arg\,z$, имеющего бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Одно и только одно значение φ аргумента z удовлетворяет условию $-\pi<\varphi\leq\pi$; оно обычно называется г л а в н ы м и обозначается $arg\,z$. Итак

$$-\pi < arg\,z \leq \pi;$$

$$Arg\,z = arg\,z + 2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Для главного значения аргумента справедливы соотношения:

$$arg\,z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, & x>0; \\ \pi + arctg\frac{y}{x}, & x<0,\ y\geq 0; \\ -\pi + arctg\frac{y}{x}, & x<0,\ y<0. \end{cases} \qquad (5)$$

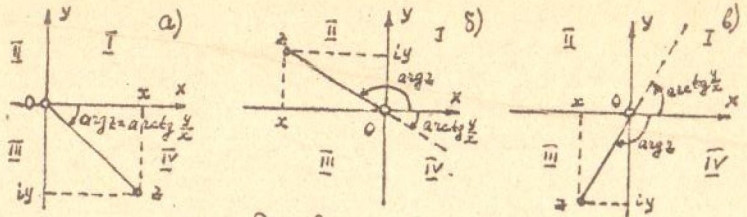

Рис. 2

В самом деле, т.к. главное значение $arctg\frac{y}{x}$ лежит между $-\pi/2$ и $\pi/2$, то:

I) если точка z лежит в первой или четвертой четвертях $(x>0)$, то и $arg\,z = arctg\frac{y}{x}$ (рис.2,а);

2) если z лежит во второй четверти $(x<0,\ y\geq 0)$, то

$$-\frac{\pi}{2} < arctg\frac{y}{x} \leq 0 \text{ и } arg\,z = arctg\frac{y}{x} + \pi \quad \text{(рис.2,б);}$$

3) если, наконец, точка z находится в третьей четверти $(x<0, y<0)$, то $0<arctg\frac{y}{x}<\pi/2$ и

$$arg\,z = arctg\frac{y}{x} - \pi \quad \text{(рис.2,в).}$$

Если $|z|=r=1$, то по формуле (2) имеем $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Это число обозначается символом $e^{i\varphi}$, т.е. функция $e^{i\varphi}$ для любого действительного числа φ определяется ф о р м у л о й Э й л е р а

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi \qquad (6)$$

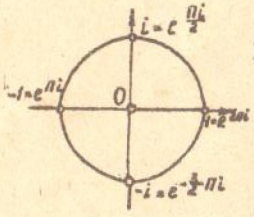

Рис.3.

В частности $e^{2\pi i}=1$, $e^{\pi i}=-1$, $e^{\pi i/2}=i$, $e^{3\pi i/2}=-i$ (рис.3). Из формулы (6) заменой φ на $-\varphi$ получается равенство

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\cdot\sin\varphi. \qquad (7)$$

Сложением и вычитанием равенства (6) и (7) получаются еще две формулы Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\ ; \qquad (8)$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\ , \qquad (9)$$

с помощью которых тригонометрические функции выражаются через показательную.

Из формул (2) и (6) следует, что любое комплексное число можно представить в виде

$$z = r \cdot e^{i\varphi}. \qquad (10)$$

Запись комплексного числа в виде (10) называется **показательной формой** комплексного числа.

Из геометрической интерпретации (см. рис. 1) вытекает правило равенства комплексных чисел, записанных в показательной форме: если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то равенство $z_1 = z_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $r_1 = r_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$, где k – некоторое целое число.

Пользуясь элементарными формулами тригонометрии, нетрудно проверить, что справедливы следующие правила действий над комплексными числами в показательной форме:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \qquad (11)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}; \qquad (12)$$

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (13)$$

Докажем, например, равенство (11). Имеем $r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} =$

$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2 [(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) +$$

$$+ i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Аналогично проверяется равенство (12). Равенство (13) получается из (11) по индукции.

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются; при делении модули делятся, а аргументы вычитаются; при возведении в целую степень модуль возводится в эту степень, а аргумент на нее умножается.

Из формул (6) и (13) при $r = 1$ получается важная **формула Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (14)$$

Рассмотрим операцию извлечения корня из комплексного (в частности, вещественного) числа. Прежде всего заметим, что при возведении комплексного числа в целую степень, а также при умножении и делении комплексных чисел в показательной форме нет необходимости рассматривать все значения аргументов исходных чисел. Действительно, при любом выборе аргументов этих чисел аргументы конечных результатов будут отличаться на число, кратное 2π, т. е. результаты указанных действий будут всегда совпадать. Иначе обстоит дело при извлечении корня.

По определению, число w называется корнем степени n из числа z, если $w^n = z$. В этом случае пишут $w = \sqrt[n]{z}$. Таким образом, задача нахождения корня из комплексного числа сводится к решению уравнения n-й степени, которое, как известно из алгебры, имеет n значений. Если положить

$$z = re^{i\varphi}, \quad w = \rho e^{i\theta},$$

то будем иметь

$$\rho^n e^{in\theta} = re^{i\varphi}.$$

Из равенства комплексных чисел в показательной форме следует, что

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

где k – произвольное целое число. Последние равенства определяют единственное положительное значение ρ и бесчисленное множество значений θ:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Итак, имеем

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i(\varphi+2k\pi)}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}. \qquad (15)$$

Нетрудно увидеть, что различные значения θ_k получаются при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, а последующие будут отличаться от этих значений на число, кратное 2π. Точки $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\rho = \sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. Действительно, модули всех значений w_k равны и переход от w_k к w_{k+1} сопровождается увеличением аргумента на величину $2\pi/n$.

В частности, при $n=2$ оба значения $\sqrt{z}$ имеют равный модуль; одно значение корня w_1 получается из другого поворотом на угол π, т.е. $w_1 = -w_0$ (корни симметричны относительно начала координат).

Разберем теперь решение типичных задач на эту тему.

I. Найти действительную и мнимую части числа

$$\frac{2-3i}{-1+2i}.$$

Решение. Домножая числитель и знаменатель данной дроби на число $-1-2i$, сопряжённое знаменателю дроби, получим

$$\frac{2-3i}{-1+2i} = \frac{(2-3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-2-4i+3i+6i^2}{(-1)^2+2^2} = \frac{-8-i}{5} = -\frac{8}{5} - i\frac{1}{5}.$$

2. Записать в показательной форме следующие числа и выражения:

1) $z_1 = 2-2i$; 2) $z_2 = -1+i\sqrt{3}$; 3) $z_3 = -1-2i$;

4) $z_4 = (1+\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) + i(1+\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)$; 5) $z_5 = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$.

Решение. I) Используя формулы (3)-(5) и рис. 4 для наглядности, имеем

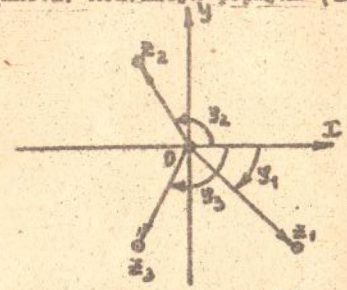

Рис. 4.

$$|z_1| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2};$$

$$\varphi_1 = \arg z_1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда по формуле (10)

$$z_1 = 2-2i = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

2) $|z_2| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$;

$$\varphi_2 = \pi + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi;$$

$$z_2 = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

3) Аналогично

$$|z_3| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}, \quad \varphi_3 = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{-1}\right);$$

$$z_3 = \sqrt{5}\, e^{-(\pi - \operatorname{arctg} 2)}.$$

4) Используя формулы тригонометрии, преобразуем выражение

$$z_4 = (2\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha) + i(2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha) = 2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha) +$$

$$+ i\cdot 2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha) = 2(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha+i\sin\alpha) = 2(\cos\alpha+\sin\alpha)e^{i\alpha}.$$

Это выражение является показательной формой для z_4, если $\cos\alpha+\sin\alpha > 0$. В случае, когда $\cos\alpha+\sin\alpha < 0$, выражение z_4 представим в виде

$$z_4 = -1\cdot 2\cdot|\cos\alpha+\sin\alpha|\cdot e^{i\alpha} = 2|\cos\alpha+\sin\alpha|e^{\pi i}\cdot e^{i\alpha} =$$

$$= 2\cdot|\cos\alpha+\sin\alpha|\cdot e^{(\pi+\alpha)i}.$$

Наконец, в случае, когда $\cos\alpha+\sin\alpha = 0$, выражение для z_4 оказывается равным нулю, а для нуля показательная форма становится бессмысленной, т.к. аргумент нуля неопределен.

5) Наряду с непосредственным применением формулы Эйлера (6) и преобразований, аналогичных проведенным при решении предыдущего примера, существует более простой искусственный прием. Заметим, что

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тогда

$$z_5 = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} =$$

$$= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right).$$

Выражение в скобках по формуле (8) дает $2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Таким образом

$$|z_5| = 2\cdot\left|\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right|, \text{ если } \cos\frac{\alpha-\beta}{2} > 0;$$

$$z_5 = \begin{cases} 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}; \\ 2\left|\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right|\cdot e^{i\left(\pi+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}, \end{cases} \text{ если } \cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 0.$$

3. Вычислить

$$z = \frac{(1-i\sqrt{3})^5\cdot i^{14}\cdot(i-1)^3}{(\sqrt{3}-i)^7\cdot(-1-i)^5}.$$

Решение. Запишем отдельные множители в показательной форме, используя правило возведения в целую степень (13):

$$(1-i\sqrt{3})^5 = \left(2e^{-\frac{\pi i}{3}}\right)^5 = 2^5\cdot e^{-\frac{5}{3}\pi i}, \quad i^{14} = \left(e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{14} = e^{7\pi i} = -1;$$

$$(i-1)^3 = \left(\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^3 = (\sqrt{2})^3\cdot e^{\frac{9}{4}\pi i}, \quad (\sqrt{3}-i)^7 = \left(2e^{-\frac{\pi i}{6}}\right)^7 = 2^7 e^{-\frac{7}{6}\pi i};$$

$$(-1-i)^5 = \left(\sqrt{2}\,e^{-\frac{3}{4}\pi i}\right)^5 = (\sqrt{2})^5 e^{-\frac{15}{4}\pi i}.$$

Согласно правилам (II),(I2) умножения и деления чисел в показательной форме, имеем:

$$z=\frac{2^5 e^{-\frac{5}{3}\pi i}\cdot(-1)\cdot(\sqrt{2})^3 e^{\frac{3}{4}\pi i}}{2^7 e^{-\frac{2}{6}\pi i}\cdot(\sqrt{2})^5 e^{-\frac{15}{4}\pi i}}=-\frac{1}{8}e^{\left(-\frac{5}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{6}+\frac{15}{4}\right)\pi i}=$$

$$=-\frac{1}{8}e^{\frac{11}{2}\pi i}=-\frac{1}{8}e^{\left(6-\frac{1}{2}\right)\pi i}=-\frac{1}{8}e^{6\pi i}\cdot e^{-\frac{\pi i}{2}}=-\frac{1}{8}\cdot 1\cdot(-i)=\frac{1}{8}i.$$

4. Вычислить произведение $z=(\alpha-\alpha^2+2\alpha^3)\cdot(2-\alpha+\alpha^2)$, где $\alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Так как $\alpha=e^{\frac{2}{3}\pi i}$, то $\alpha^3=e^{2\pi i}=1$.

Для преобразования выражения $\alpha^2-\alpha$ применим способ, который используется при решении примера 2(5).

$$\alpha^2-\alpha=e^{\frac{4}{3}\pi i}-e^{\frac{2}{3}\pi i}=e^{\pi i}\cdot\left(e^{\frac{\pi i}{3}}-e^{-\frac{\pi i}{3}}\right).$$

Так как $e^{\pi i}=-1$, а по формуле (9)

$$e^{\frac{\pi i}{3}}-e^{-\frac{\pi i}{3}}=2i\sin\frac{\pi}{3}=i\sqrt{3},$$

то

$$z=[2-(\alpha^2-\alpha)]\cdot(2+\alpha^2-\alpha)=(2+\sqrt{3}\,i)(2-\sqrt{3}\,i)=4+3=7.$$

5. Вычислить сумму $S=1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{19}$, если $\alpha=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Решение. Учитывая, что $\alpha=e^{\frac{\pi i}{4}}$, и используя формулы суммы членов геометрической прогрессии

$$S_n=\frac{a_n q-a_1}{q-1},\quad a_1=1,\ a_n=\alpha^{19},\ q=\alpha,$$

получим

$$S=\frac{\alpha^{20}-1}{\alpha-1}=\frac{e^{5\pi i}-1}{e^{\frac{\pi i}{4}}-1}=\frac{-2}{e^{\frac{\pi i}{8}}\left(e^{\frac{\pi i}{8}}-e^{-\frac{\pi i}{8}}\right)}=$$

$$=-\frac{2e^{-\frac{\pi i}{8}}}{2i\sin\frac{\pi}{8}}=i\frac{\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}=1+i\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}=1+i(\sqrt{2}+1).$$

6. Найти все корни уравнения

$$z\cdot|z|+2z+i=0.$$

Решение.

Iспособ. Пусть $z=x+iy$. Тогда имеем

$$(x+iy)\cdot\sqrt{x^2+y^2}+2(x+iy)+i=0.$$

Приравнивая действительные и мнимые части выражения нулю, получим систему

$$x\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}+2\right)=0;$$

$$y\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}+2\right)+1=0.$$

Т.к.

$$\sqrt{x^2+y^2}+2>0,$$

то $x=0$.

Из второго уравнения имеем

$$y\cdot(|y|+2)+1=0.$$

Отсюда следует, что $y<0$, т.е. $|y|=-y$ и уравнение принимает вид

$$y^2-2y-1=0,\ \text{откуда}\ y=1-\sqrt{2}.$$

Таким образом, $z=(1-\sqrt{2})i$.

IIспособ. Положим $z=re^{i\varphi}$. Тогда уравнение запишется в виде

$$re^{i\varphi}\cdot(r+2)=e^{-\frac{\pi i}{2}}.$$

Из равенства комплексных чисел в показательной форме следует

$$r(r+2)=1,\quad r=-1+\sqrt{2},$$

$$\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

$$z=(-1+\sqrt{2})\cdot e^{\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}=(-1+\sqrt{2})\cdot(-i)=(1-\sqrt{2})i.$$

7. Вычислить значение выражения

$$z^{167}+\frac{1}{z^{167}}$$

для z, удовлетворяющего уравнению

$$z+\frac{1}{z}=1.$$

Решение. По условию

$$z^2-z+1=0,$$

следовательно

$$z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=e^{\pm\frac{\pi i}{3}}.$$

Тогда

$$z^{167}+z^{-167}=e^{\pm\frac{167}{3}\pi i}+e^{\mp\frac{167}{3}\pi i}=2\cos\frac{167}{3}\pi=2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1.$$

8. Исходя из геометрических рассмотрений, доказать неравенство

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

Решение. Разность $z_1 - z_2$ найдется как разность изображающих z_1 и z_2 векторов $\vec{OM_1}$ и $\vec{OM_2}$, т.е. равна вектору $\vec{M_2M_1}$ (рис.5), конец которого находится в точке z_1, а начало – в z_2. Отсюда следует, что модуль разности чисел $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2. Данное неравенство утверждает, что в любом треугольнике длина стороны не меньше абсолютной величины разности двух других сторон. Если точки O, M_1 и M_2 будут лежать на одной прямой, то имеет место знак равенства.

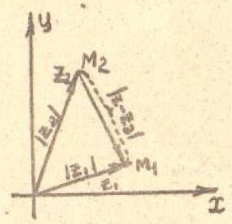

Рис.5.

9. Доказать тождество

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Решение. Для любого комплексного числа z квадрат модуля равен

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z}.$$

Имеем

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) + (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2) =$$

$$= (z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2) + (z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1) =$$

$$= 2\cdot(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Тождество доказано. Геометрический смысл тождества — формулировка теоремы о том, что в любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

IO. Выяснить геометрический смысл неравенства

$$\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| \leq |\arg z|.$$

Решение. Заметим, что комплексное число $\frac{z}{|z|}$ имеет модуль, равный 1, и поэтому точка $\frac{z}{|z|}$ расположена на единичной окружности с центром в начале координат.

Тогда левая часть неравенства представляет собой расстояние между точками $\frac{z}{|z|}$ и 1. Правая часть неравенства есть длина дуги единичной окружности между этими точками. Таким образом, данное неравенство утверждает известный факт, что

длина хорды окружности не превосходит длины дуги, которую она стягивает. Очевидно, что неравенство обращается в равенство, когда z является действительным положительным числом.

Данное неравенство легко доказывается и аналитически. Имеем

$$\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| = \left|e^{i\varphi} - 1\right| = \left|e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)\right| = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| \leq 2\cdot\left|\frac{\varphi}{2}\right| = |\varphi|.$$

II. Найти все значения $\sqrt[4]{1}$.

Решение. $z_k = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{2k\pi i}} = e^{\frac{k\pi i}{2}}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Итак, значения корня лежат на единичной окружности.

Одно из значений аргумента подкоренного числа 1 равно нулю; следовательно, одно из значений $\sqrt[4]{1}$ имеет аргумент, равный нулю, т.е. равно единице. Все значения $\sqrt[4]{1}$ лежат в вершинах квадрата, вписанного в единичную окружность $|z|=1$, причем одна из вершин этого квадрата – точка 1 (рис.6).

Следовательно, $z_k = \{1, i, -1, -i\}$.

I2. Найти все значения $\sqrt[3]{8i}$.

Решение.

$$z_k = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}} = 2e^{(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})i};$$

$$z_0 = 2e^{\frac{\pi i}{6}} = \sqrt{3} + i; \quad z_1 = 2e^{\frac{5}{6}\pi i} = -\sqrt{3} + i;$$

$$z_2 = 2e^{\frac{3}{2}\pi i} = -2i.$$

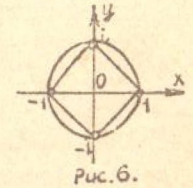

Рис.6.

Таким образом, все значения $\sqrt[3]{8i}$ лежат на окружности $|z|=2$. Далее, $\arg(8i) = \frac{\pi}{2}$, следовательно, одно из значений $\sqrt[3]{8i}$ имеет аргумент $\frac{\pi}{6}$, т.е. равно $\sqrt{3}+i$. Остальные значения корня лежат в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность, одна из вершин которого – точка $\sqrt{3}+i$ (рис.7).

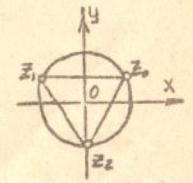

Рис.7.

I3. Найти все корни уравнения

$$z^2 - 2iz - i\sqrt{3} = 0.$$

Решение.

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z_k = i + \sqrt{-1 + i\sqrt{3}}.$$

Перед корнем квадратным из дискриминанта достаточно запи-

сывать только один знак, учитывая при этом оба значения корня:

$$z_k = i + \sqrt{2}\, e^{\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i} = i + \sqrt{2}\, e^{\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)i}, \quad k=0,1;$$

$$z_0 = i + \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi i}{3}} = i + \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right);$$

$$z_1 = i + \sqrt{2}\, e^{\frac{4}{3}\pi i} = i - \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

I4. Решить уравнение $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

Решение. Используя формулу суммы геометрической прогрессии, уравнение запишется в виде

$$\frac{z^7-1}{z-1}=0; \quad z=\sqrt[7]{1}, \quad (z\neq 1);$$

$$z_k = \sqrt[7]{e^{2k\pi i}} = e^{\frac{2k\pi i}{7}}, \quad (k=1,2,\dots,6).$$

I5. Найти вершины правильного n-угольника, если его центр находится в точке $z=0$, а одна из вершин z_1 известна.

Решение. Заметим, что в указанном n-угольнике все вершины расположены на одинаковом расстоянии от начала координат

$$|z_1|=|z_2|=\dots=|z_n|.$$

Кроме того, векторы, проведенные из начала координат в две соседние вершины n-угольника, образуют между собой угол $\frac{2\pi}{n}$. Таким образом, каждый вектор z_{k+1} получается из вектора z_k поворотом на угол $\frac{2\pi}{n}$, т.е. $z_{k+1} = z_k \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}$ или

$$z_{k+1} = z_1 \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k=1,2,\dots,n-1.$$

I6. Доказать, что сумма всех корней n-й степени из любого комплексного числа z равна нулю.

Решение. Как известно, $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, $k=0,1,\dots,n-1$.

Рассмотрим

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \sqrt[n]{z}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{z}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k\pi i}{n}}.$$

Полученная сумма есть сумма геометрической прогрессии, у которой первый член $(k=0)$ $a_1=1$, последний член $(k=n-1)$ $a_n = e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}$, знаменатель $q = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Имеем

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}\cdot e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} = \frac{e^{2\pi i}-1}{e^{\frac{2\pi i}{n}}-1} = 0,$$

так как числитель дроби равен нулю, а знаменатель отличен от нуля $(n\neq 1)$. Таким образом, сумма всех корней n-й степени из любого комплексного числа $S_n=0$.

I7. Доказать, что $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 4\cdot(a^2-b^2)$, если $a+bi=\sqrt[3]{x+iy}$.

Решение. По условию

$$x+iy=(a+bi)^3 = a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i, \text{ т.е.}$$

$$x=a^3-3ab^2, \quad y=3a^2b-b^3.$$

Тогда $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = (a^2-3b^2)+(3a^2-b^2) =$

$$= 4(a^2-b^2), \quad \text{что и требовалось доказать.}$$

I8. Найти действительную и мнимую части квадратного корня из комплексного числа z.

Решение.

$$\sqrt{z} = \sqrt{x+iy} = \pm(a+bi).$$

Величины a и b подлежат определению. Подкоренное число на время запишем в показательной форме, выбрав главное значение аргумента $-\pi<\varphi\leq\pi$. Тогда одно из значений корня будет

$$\sqrt{z} = \sqrt{r e^{i\varphi}} = \sqrt{r}\cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Следовательно, действительная и мнимая части корня довольно просто выражаются через полярные координаты:

$$a=\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}, \quad b=\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Заметим, что при выбранном значении аргумента числа z действительная часть корня $a\geq 0$, мнимая же часть будет положительной при $0<\varphi\leq\pi$, т.е. при $y>0$ и отрицательной при $-\pi<\varphi<0$, т.е. при $y<0$.

Имеем

$$a=\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{r\cdot\frac{1+\cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{r+x}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}};$$

$$b=\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{r\,\frac{1-\cos\varphi}{2}} = \pm\sqrt{\frac{r-x}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}},$$

причем в последнем выражении следует взять знак "+", если $y>0$, и знак "−", если $y<0$. Таким образом

Читальня библиотеки № 2 ТГУ

$$\sqrt{x+iy}=\begin{cases}\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right), & y\geq 0;\\ \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right), & y<0.\end{cases}$$

I9. Доказать, что оба значения $\sqrt{z^2-1}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках -1, 1 и z, проведенной из вершины z.

Решение. Пусть $\arg(z-1)=\varphi_1$, $\arg(z+1)=\varphi_2$ (рис.8). Тогда одно из значений $\arg\sqrt{z^2-1}=\frac{1}{2}\arg[(z-1)(z+1)]=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$. Докажем, что биссектриса AD угла A образует с осью OX такой же угол. Действительно, $\angle BAC=\varphi_1-\varphi_2$, $\angle DAC=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$ и $\angle ADC=\varphi_1-\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$.

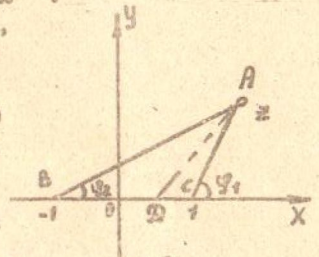

Рис. 8.

Приведем еще некоторые примеры на применение формул Эйлера и Муавра. Использование этих формул позволяет получить многие формулы тригонометрии более быстрым способом.

20. Получить формулы суммы синусов и суммы косинусов двух аргументов.

Решение. Пусть $S_1=\cos\alpha+\cos\beta$, $S_2=\sin\alpha+\sin\beta$.

Умножим S_2 на i и сложим с S_1:

$$S_1+iS_2=(\cos\alpha+\cos\beta)+i(\sin\alpha+\sin\beta)=e^{i\alpha}+e^{i\beta}.$$

Повторяя выкладки, проделанные при решении примера 2(5), получим

$$S_1+iS_2=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Приравнивая теперь действительные и мнимые части, получим известные формулы:

$$S_1=\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$S_2=\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

2I. Выразить через тригонометрические функции кратных углов 1) $\cos^4\varphi$; 2) $\sin^5\varphi$.

Решение. I) Используя формулу Эйлера (8) и формулу бинома Ньютона, имеем

$$\cos^4\varphi=\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^4=\frac{1}{16}\left(e^{4i\varphi}+\frac{4}{1}e^{3i\varphi}\cdot e^{-i\varphi}+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}e^{2i\varphi}\cdot e^{-2i\varphi}+\right.$$

$$\left.+\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}e^{i\varphi}\cdot e^{-3i\varphi}+e^{-4i\varphi}\right)=\frac{1}{16}\left[\left(e^{4i\varphi}+e^{-4i\varphi}\right)+4\left(e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}\right)+6\right]=$$

$$=\frac{1}{16}\left(2\cos4\varphi+8\cos2\varphi+6\right)=\frac{1}{8}\left(\cos4\varphi+4\cos2\varphi+3\right).$$

2) Аналогично, $\sin^5\varphi=\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^5=\frac{1}{32i}\left(e^{5i\varphi}-\right.$

$$\left.-\frac{5}{1}e^{4i\varphi}\cdot e^{-i\varphi}+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}e^{3i\varphi}\cdot e^{-2i\varphi}-\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}e^{2i\varphi}\cdot e^{-3i\varphi}+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}e^{i\varphi}\cdot e^{-4i\varphi}-\right.$$

$$\left.-e^{-5i\varphi}\right)=\frac{1}{32i}\left[\left(e^{5i\varphi}-e^{-5i\varphi}\right)-5\left(e^{3i\varphi}-e^{-3i\varphi}\right)+10\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{32i}\left(2i\sin5\varphi-10i\sin3\varphi+20i\sin\varphi\right)=\frac{1}{16}\left(\sin5\varphi-5\sin3\varphi+10\sin\varphi\right).$$

Отметим, что этот прием можно эффективно применять, например, при вычислении неопределенных интегралов от степеней синусов или косинусов.

22. Выразить через степени $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$

I) $\cos3\varphi$; $\sin3\varphi$; 2) $\cos5\varphi$, $\sin5\varphi$.

Решение. I) Используя формулу Муавра (I4), имеем

$$\cos3\varphi+i\sin3\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos^3\varphi+3\cos^2\varphi\cdot i\sin\varphi+$$

$$+3\cos\varphi\cdot(-1)\sin^2\varphi-i\sin^3\varphi.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получим

$$\cos3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi;\quad \sin3\varphi=3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi-\sin^3\varphi.$$

2) Аналогично предыдущему имеем

$$\cos5\varphi+i\sin5\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5=\cos^5\varphi+5i\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi-$$

$$-10\cos^3\varphi\cdot\sin^2\varphi-10i\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi+5\cos\varphi\cdot\sin^4\varphi+i\sin^5\varphi.$$

Отсюда

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\cdot\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\cdot\sin^4\varphi;$$

$$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi + \sin^5\varphi.$$

23. Доказать, что многочлен

1) $P(x)=(\cos\varphi+x\sin\varphi)^n-\cos n\varphi - x\sin n\varphi$ делится на x^2+1;

2) $Q(x)=x^n\sin\varphi-a^{n-1}\cdot x\sin n\varphi+a^n\sin(n-1)\varphi$ делится на $x^2-2ax\cos\varphi+a^2$.

Решение. I) Так как $x^2+1=(x-i)(x+i)$, то достаточно убедиться, что числа $\pm i$ являются корнями $P(x)$.

Имеем $P(\pm i)=(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)^n-(\cos n\varphi\pm i\sin n\varphi)=0$ на основании формулы Муавра (I4).

2) Разложим многочлен $x^2-2ax\cos\varphi+a^2$ на линейные множители. Для этого найдем корни квадратного уравнения

$$x^2-2ax\cos\varphi+a^2=0;$$

$$x=a\cos\varphi\pm\sqrt{a^2\cos^2\varphi-a^2}=a\cos\varphi\pm ia\sin\varphi=ae^{\pm i\varphi}.$$

Для решения задачи достаточно убедиться в том, что $Q(ae^{\pm i\varphi})=0$. Имеем

$$Q(ae^{\pm i\varphi})=a^ne^{\pm in\varphi}\cdot\sin\varphi-a^{n-1}\cdot ae^{\pm i\varphi}\cdot\sin n\varphi+a^n\sin(n-1)\varphi=$$

$$=a^n\cdot\left[(\cos n\varphi\pm i\sin n\varphi)\sin\varphi-(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)\sin n\varphi+\sin(n-1)\varphi\right]=$$

$$=a^n\left[\cos n\varphi\cdot\sin\varphi-\cos\varphi\cdot\sin n\varphi+\sin(n-1)\varphi\right]=$$

$$=a^n\left[-\sin(n-1)\varphi+\sin(n-1)\varphi\right]=0,$$ что и требовалось доказать.

24. Доказать формулы:

1) $S=\cos\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos(2n-1)\varphi=\dfrac{\sin2n\varphi}{2\sin\varphi}$;

2) $S_1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a^k\cos k\varphi=\dfrac{1-a\cos\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$,

$$S_2=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\sin k\varphi=\frac{a\sin\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}.$$

$|a|<1$.

Решение.

I) $S=\mathrm{Re}\left\{e^{i\varphi}+e^{3i\varphi}+\cdots+e^{(2n-1)i\varphi}\right\}$. Имеем геометрическую прогрессию $a_1=e^{i\varphi}$, $a^n=e^{(2n-1)i\varphi}$, $q=e^{2i\varphi}$.

$$S=\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{(2n-1)i\varphi}\cdot e^{2i\varphi}-e^{i\varphi}}{e^{2i\varphi}-1}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{(2n+1)i\varphi}-e^{i\varphi}}{e^{2i\varphi}-1}\right\}.$$

Используя прием, описанный при решении примера 2(5), получим

$$S=\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{i(n+1)\varphi}\cdot(e^{in\varphi}-e^{-in\varphi})}{e^{i\varphi}\cdot(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})}\right\}=\mathrm{Re}\left\{e^{in\varphi}\cdot\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\right\}=$$

$$=\frac{\cos n\varphi\cdot\sin n\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\sin2n\varphi}{2\sin\varphi};$$

2) $S_1+iS_2=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a^k(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a^ke^{ik\varphi}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(ae^{i\varphi})^k$.

На основании формулы суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=\dfrac{a_1}{1-q}$ имеем

$a_1=1$, $q=ae^{i\varphi}$, $|q|=|a|<1$.

$$S_1+iS_2=\frac{1}{1-ae^{i\varphi}}=\frac{1-ae^{-i\varphi}}{(1-ae^{i\varphi})(1-ae^{-i\varphi})}=$$

$$=\frac{1-a(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{1-ae^{i\varphi}-ae^{-i\varphi}+a^2}=\frac{(1-a\cos\varphi)+i\cdot a\sin\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}.$$

Приравнивая теперь действительные и мнимые части, убеждаемся в справедливости указанных в условии задачи формул.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

25. Произвести действия:

1) $(-3+2i)+(2-i)$; 2) $(-2+i)-(-4+5i)$;

3) $(5-2i)\cdot(-3+i)$; 4) $(7+3i)\cdot(7-3i)$; 5) $(-2+3i)^2$;

6) $(4-i)^3$; 7) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

26. Решить квадратные уравнения и проверить, удовлетворяют ли этим уравнениям полученные по обычной формуле комплексные числа:

1) $z^2-4z+13=0$; 2) $z^2+6z+34=0$; 3) $z^2+z+1=0$;

4) $z^2+8i-20=0$; 5) $2z^2-2iz-5=0$.

27. Произвести деления:

1) $\frac{-3+i}{5+2i}$; 2) $\frac{1}{i}$; 3) $\frac{8+14i}{1+3i}$; 4) $\frac{8-25i}{-3-2i}$.

28. Произвести указанные действия:

1) $\frac{(2-3i)^2+(5-i)(1+2i)}{(1-i)^2}$; 2) $\frac{(2+3i)^2+(5+i)(1-2i)}{(1+i)^2}$.

29. Записать в алгебраической форме следующие комплексные числа:

1) $e^{14\pi i}$; 2) $e^{7\pi i}$; 3) $e^{\frac{23}{2}\pi i}$; 4) $2e^{-\frac{29}{6}\pi i}$; 5) $e^{-\frac{17}{3}\pi i}$.

30. Записать в показательной форме следующие числа и выражения:

1) $2i$; 2) -3; 3) $-3+4i$; 4) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$; 5) $1-e^{i\alpha}$;

6) $e^{i\alpha}-e^{i\beta}$; 7) $(1+i)^5\cdot(1-i\sqrt{3})^6$; 8) $-\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}$.

31. Вычислить:

1) $\frac{(1-i\sqrt{3})^{12}-(1+i\sqrt{3})^6}{(-1+i)^{12}}$; 2) $\frac{(1-i)^5\cdot(-\sqrt{3}+i)^7}{i^{21}\cdot(1+i)^5\cdot(-1-i\sqrt{3})^6}$.

32. Определить численные значения многочленов:

1) $z^4-6z^3+15z^2-8z+10$ при $z=1+i$;

2) $z^4-2z^3+3z^2-2z+2$ при $z=1-i$;

3) z^3-2z^2-z+4 при $z=1\pm2i$.

33. Доказать, что если $A=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $B=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, то

1) $A^{3n+1}=B^{3n+2}=A$; 2) $B^{3n+1}=A^{3n+2}=B$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

34. Вычислить сумму

$S=1-z+z^2-\ldots+z^{14}$, если

1) $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$; 2) $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

35. Найти все корни уравнений

1) $|z|^2-2iz+2i=0$; 2) $z+|z+i|+i=0$;

3) $\bar{z}=z^3$; 4) $z^2+|z|=0$.

36. Вычислить значения выражения $z^{142}+\frac{1}{z^{142}}$, если z есть корень уравнения $z+\frac{1}{z}+1=0$.

37. Показать, что если n -натуральное число, кратное 3, то

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=2.$$

38. Доказать, что $x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\varphi$, если $x+\frac{1}{x}=2\cos\varphi$.

39. Доказать, что если $z_1\cdot z_2$ и z_1+z_2 действительны, то либо z_1 и z_2 действительны, либо $z_1=\bar{z}_2$.

40. Доказать тождество

$$|1-\bar{z}_1z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)\cdot(1-|z_2|^2).$$

41. При каких условиях

1) модуль суммы двух комплексных чисел равен разности модулей слагаемых?

2) модуль разности двух комплексных чисел равен сумме модулей уменьшаемого вычитаемого?

42. Исходя из геометрических рассмотрений, доказать неравенства

I) $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$; 2) $|z-1| \le |z|-1+|z|\cdot|\arg z|$.

43. Доказать неравенство

$$|z_1+z_2| \ge \frac{1}{2}\left(|z_1|+|z_2|\right)\cdot\left|\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}\right|.$$

44. Даны три вершины параллелограмма z_1, z_2, z_3. Найти четвертую вершину z_4, противоположную вершине z_2.

45. Доказать, что три различные точки z_1, z_2 и z_3 тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда отношение $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ является действительным числом.

46. Найти все значения корней и построить их:

I) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[6]{-8}$; 3) $\sqrt[5]{-4+3i}$ 4) $\sqrt{3+4i}$;

5) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 6) $\sqrt{\frac{(2i-\sqrt{12})^2}{6\,i^{117}}}$;

7) $\sqrt[3]{\frac{625}{(-3+4i)^2}+17\cdot\left(\frac{5+6i}{6-5i}\right)^{114}}$; 8) $\sqrt[10]{\frac{3\sqrt{3}+4-i(4\sqrt{3}-3)}{3-4i}}$.

47. Пусть z_1, z_2, z_3 -корни уравнения $z^3-1=0$. Чему равно выражение

$$\frac{1}{z_1^n\cdot z_2^n}+\frac{1}{z_2^n\cdot z_3^n}+\frac{1}{z_3^n\cdot z_1^n}\ ?$$

48. Решить уравнения:

I) $2z^2-(5-i)z+6=0$; 2) $(1+i)z^2-(2+i)z+(3+i)=0$;

3) $z^2-2(i-1)z+1-2i=0$; 4) $z^4+z^2+1=0$;

5) $z^6+2iz^3-1=0$.

49. Показать, что

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}=\sqrt{6}.$$

50. Точки z_1 и z_2 -смежные вершины правильного n -угольника. Найти вершину z_3, смежную с z_2 $(z_3 \neq z_1)$.

51. Доказать, что произведение всех корней n - й степени из любого комплексного числа z равно z при $n=2k$ и $(-z)$ -при $n=2k+1$ $(k=1,2,\dots)$.

52. Используя формулы Эйлера, получить тригонометрические формулы для

I) разности косинусов и разности синусов двух углов;

2) для косинуса и синуса суммы двух углов.

53. Выразить через тригонометрические функции кратных углов

I) $\sin^4\varphi$; 2) $\sin^6\varphi$; 3) $\cos^5\varphi$; 4) $\cos^{10}\varphi$.

54. Выразить через степени $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$

I) $\cos 4\varphi$, $\sin 4\varphi$; 2) $\cos 7\varphi$, $\sin 7\varphi$.

55. Доказать формулы:

I) $$\sin x+\sin 3x+\dots+\sin(2n-1)x=\frac{\sin^2 nx}{\sin x};$$

2) $$1+2\cos x+2\cos 2x+\dots+2\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}};$$

3) $$\sum_{k=0}^{n}\cos(\alpha+k\beta)=\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\sin\frac{n+1}{2}\beta\cdot\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right);$$

4) $$\sum_{k=0}^{n}\sin(\alpha+k\beta)=\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\sin\frac{n+1}{2}\beta\cdot\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right);$$

5) $$\sum_{k=1}^{n}\cos^2 k\varphi=\frac{n-1}{2}+\frac{\sin(n+1)\varphi\cdot\cos n\varphi}{2\sin\varphi};$$

6) $$\sum_{k=1}^{n}\sin^2 k\varphi=\frac{n+1}{2}-\frac{\sin(n+1)\varphi\cdot\cos n\varphi}{2\sin\varphi};$$

7) $$\sum_{k=0}^{\infty}a^k\sin(x+ky)=\frac{\sin x-a\sin(x-y)}{1-2a\cos y+a^2},\quad |a|<1.$$

ГЛАВА II

КРИВЫЕ И ОБЛАСТИ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Непрерывной кривой на плоскости называется множество точек, координаты которых x и y заданы как непрерывные функции $x=x(t)$, $y=y(t)$ вещественной переменной в некотором промежутке $t_1 \le t \le t_2$. Если положить $z=x+iy$ так, что $z(t)=x(t)+iy(t)$, то аналитическое изображение кривой можно записать одним уравнением $z=z(t)$. Направление движения точки z вдоль кривой, соответствующее возрастанию параметра t, называется положительным. Точка $z_1=z(t_1)$ называется началом кривой, а точка $z_2=z(t_2)$ – ее концом. Кривая, не имеющая точек самопересечения, называется простой кривой, или кривой Жордана. Если у кривой совпадает только начало и конец ($z_1=z_2$), то кривая называется замкнутой.

Если z_0 – фиксированное число, а $\varepsilon>0$, то множество комплексных чисел z, удовлетворяющее неравенству $|z-z_0|<\varepsilon$, называется **ε-о к р е с т н о с т ь ю** точки z_0. Геометрически ε-окрестности соответствует внутренность круга радиуса ε с центром в точке z_0.

Множество $\mathcal{D}$ точек комплексной плоскости называется **о б л а с т ь ю**, если это множество:

1) **о т к р ы т о е**, т.е. для каждой точки, принадлежащей $\mathcal{D}$, существует окрестность этой точки, принадлежащая $\mathcal{D}$;

2) **с в я з н о е**, т.е. любые две точки, принадлежащие $\mathcal{D}$, можно соединить кривой, все точки которой принадлежат $\mathcal{D}$.

Точка называется граничной, если **в л ю б о й** ее окрестности есть точки как принадлежащие $\mathcal{D}$, так и не принадлежащие $\mathcal{D}$.

Множество граничных точек области называется границей этой области.

Область $\mathcal{D}$, дополненная **в с е м и** своими граничными точками, называется замкнутой областью и обозначается через $\overline{\mathcal{D}}$.

Будем считать все граничные кривые области $\mathcal{D}$ ориентированными так, что при движении точки вдоль границы в направлении этой ориентации область $\mathcal{D}$ остается слева.

Область называется односвязной, если **л ю б а я** замкнутая кривая, принадлежащая области, может быть путем непрерывной деформации стянута в точку, не выходя за пределы области. Области, не обладающие этим свойством, называются многосвязными. Простая замкнутая непрерывная кривая разбивает комплексную плоскость на две односвязные области.

Рассмотрим несколько примеров параметрического задания линий в комплексной плоскости.

56. Выяснить, какие линии определяются следующими параметрическими уравнениями:

1) $z=t+it^2$, $-\infty<t<\infty$;

2) $z=t^2+it^4$, $-\infty<t<\infty$;

3) $z=t+\frac{i}{t}$, $1<t<\infty$;

4) $z=2e^{it}+e^{-it}$, $0\le t\le 2\pi$;

5) $z=\frac{2}{(1+e^{it})^2}$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$.

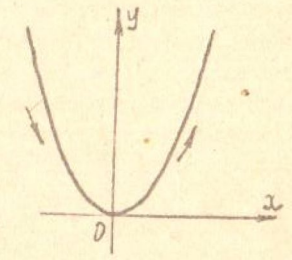

Рис. 9.

Решение.

1) Имеем $x=t$, $y=t^2$ или $y=x^2$. Получим уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy. Учитывая изменение параметра t, делаем выводы, что точка z пробегает эту параболу слева направо (рис. 9).

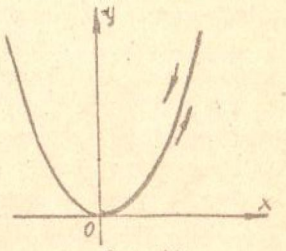

Рис. 10.

2) Аналогично предыдущему $x=t^2$, $y=t^4$ и, следовательно, снова $y=x^2$. Но так как $x=t^2\ge 0$, то точка z дважды пробегает правую ветвь параболы – сначала справа налево до точки $z=0$, а затем обратно (рис. 10).

3) Здесь $x=t$, $y=\frac{1}{t}$, или,

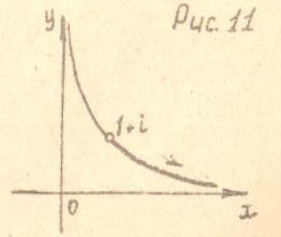

Рис. 11

исключая параметр t, получим уравнение гиперболы $xy=1$. Учитывая изменение параметра t, следует, что точка пробегает часть правой ветви этой гиперболы от точки $z=1+i$ (рис.II).

4)Отделяя действительную и мнимую части, получим $x=3\cos t$, $y=\sin t$. Это - параметрическое уравнение эллипса $\left(\frac{x}{3}\right)^2+y^2=1$ с полуосями $a=3$, $b=1$. Учитывая изменение параметра t, заключаем, что точка z делает полный оборот по эллипсу от точки $z=3$ против часовой стрелки (рис.I2).

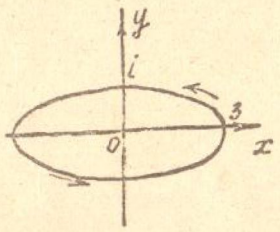

Рис.12.

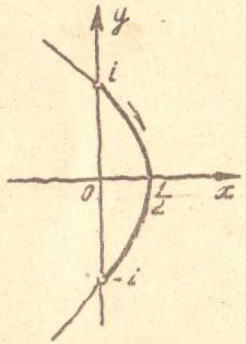

Рис. 13.

5)Преобразуем выражение для z к показательной форме

$$z=\frac{2}{(1+e^{it})^2}=\frac{2}{[e^{it/2}(e^{-it/2}+e^{it/2})]^2}=$$

$$=\frac{2e^{-it}}{4\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{e^{-it}}{1+\cos t}.$$

Следовательно, $|z|=r=\frac{1}{1+\cos t}$; $\varphi=-t$. Исключая параметр t, получим уравнение параболы в полярных координатах $r=\frac{1}{1+\cos\varphi}$. Учитывая изменение параметра t, заключаем, что точка z пробегает дугу параболы от точки $z_1=i$ через точку $z_2=\frac{1}{2}$ к точке $z_3=-i$ (рис.I3). Нетрудно получить уравнение этой параболы и в декартовых косрдинатах: $y^2=1-2x$.

В предыдущих примерах мы познакомились с параметрическими уравнениями кривых в комплексной форме.Однако часто кривые и области можно задавать без введения вещественного параметра при помощи уравнений и неравенств с участием комплексного переменного z и простейших операций над ними:выделением действительной или мнимой частей выражения,нахождением модуля или аргумента и т.д.

57. Выяснить,какие линии на плоскости определяются следующими уравнениями:

1) $\mathrm{Re}\,z=2\,\mathrm{Im}\,z$; 2) $|z-i|=3$; 3) $|z+1-i|=4$;

4) $\arg z=\frac{\pi}{3}$; 5) $\mathrm{Im}[(1-i)\bar{z}]=2$; 6) $|z-5i|=|z+5|$;

7) $|z+3|+|z-3|=10$; 8) $\mathrm{Im}(z^2-\bar{z})=1$; 9) $|z|=\mathrm{Re}\,z+1$.

Решение.

I.Так как $\mathrm{Re}\,z=x$, $\mathrm{Im}\,z=y$, то данное уравнение представляет собой уравнение прямой $x=2y$.

2.По определению модуля комплексного числа имеем

$$|z-i|=|x+i(y-1)|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=3.$$

Таким образом,уравнение приводится к виду $x^2+(y-1)^2=9$ и определяет окружность с центром в точке i радиуса 3. На практике следует иметь в виду,что модуль р а з н о с т и двух комплексных чисел z_1 и z_2 выражает расстояние между точками z_1 и z_2.Поэтому исходное уравнение определяет геометрическое место точек z,расстояние от которых по точки i есть величина постоянная,равная 3,т.е.окружность.

3.Выражение под знаком модуля следует представить в виде разности $z+1-i=z-(-1+i)$,Тогда на основании предыдущего примера заключаем,что данное уравнение определяет окружность с центром в точке $-1+i$ радиуса 4.

4.По определению аргумента комплексного числа данное уравнение определяет геометрическое место точек с полярным углом $\varphi=\frac{\pi}{3}$,т.е. луч,образующий с положительным направлением вещественной оси угол, равный $\frac{\pi}{3}$.Так как $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, то уравнение этого луча в декартовых координатах запишется

в виде $y=\sqrt{3}x$, $y>0$ (или $x>0$) .Следует иметь в виду, что то же самое уравнение прямой соответствует и другому уравнению $arg\, z=-\frac{2}{3}\pi$.Поэтому в ответе обязательно должно присутствовать неравенство,указывающее,какую часть прямой необходимо рассматривать.

5.Имеем

$$(1-i)z=(1-i)(x+iy)=(x+y)+i(y-x).$$

Поэтому исходное уравнение определяет прямую $y-x=2$.

6.Кроме аналитического решения,которое нетрудно провести, подсчитав модули в декартовых координатах,следует заметить, что данное уравнение определяет геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек $5i$ и -5 .Как известно из геометрии,это-перпендикуляр,проходящий через середину отрезка,соединяющего эти две точки.Очевидно,это будет биссектриса второго и четвертого координатных углов с уравнением $x+y=0$.

7.И эту задачу можно решить,не прибегая к выкладкам для получения уравнения в привычной форме.Достаточно заметить, что уравнение определяет геометрическое место точек,сумма расстояний которых до точек 3 и -3 есть величина постоянная,равная 10 .Из аналитической геометрии известно,что это-эллипс с фокусами в точках ± 3 и большой осью $2a=10$.

8.Так как $z^2=x^2-y^2+i2xy$, $\bar{z}=x-iy$,то уравнение принимает вид $2xy+y=1$,или $y=\frac{1}{2x+1}$. Это-гипербола с горизонтальной асимптотой $y=0$ и вертикальной $x=-\frac{1}{2}$.

9.Так как $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $Re\, z=x$,то уравнение принимает вид $\sqrt{x^2+y^2}=x+1$,или,после возведения в квадрат: $y^2=2x+1$ – парабола с вершиной в точке $z=-\frac{1}{2}$, симметричная относительно вещественной оси.

58. Определить в комплексной плоскости семейство линий,заданных уравнениями с параметром:

1) $Re\,\frac{1}{z}=C$, $-\infty<C<\infty$; 2) $Im\,\frac{2+i}{z-1}=C$, $-\infty<C<\infty$;

3) $Re\,\frac{z-1}{z+i}=C$, $-\infty<C<\infty$; 4) $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=\lambda$, $\lambda>0$.

Решение.

I.Так как $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$,то данное

уравнение принимает вид $\frac{x}{x^2+y^2}=C$, или

$$C\cdot(x^2+y^2)-x=0, \quad (z\neq 0).$$

Отсюда следует,что если $C=0$,то получается уравнение мнимой оси $x=0$.Если $C\neq 0$,то имеем уравнение окружности,которое запишем в виде $x^2+y^2+\frac{1}{C}x=0$.

Выделяя полный квадрат,получим уравнение в канонической форме $\left(x-\frac{1}{2C}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2C}\right)^2$.Таким образом,при $C\neq 0$ имеем семейство окружностей с центром в точках $z=\frac{1}{2C}$ радиуса $\left|\frac{1}{2C}\right|$.Все эти окружности касаются мнимой оси в начале координат (рис.I4).Точка $z=0$ играет особую роль:в любой ее окрестности действительная часть дроби принимает всевозможные значения.

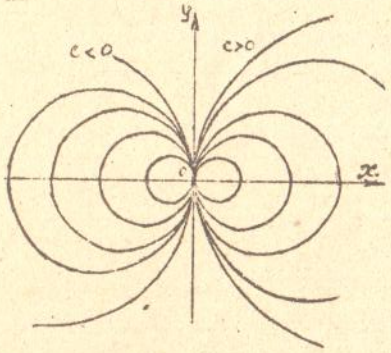

Рис. 14.

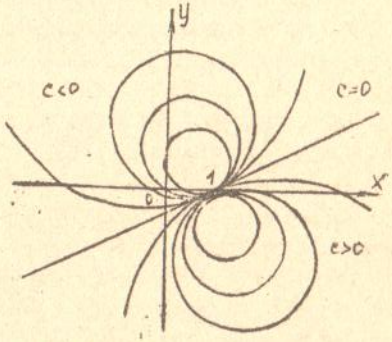

Рис. 15.

2.Найдем мнимую часть дроби.

$$Im\,\frac{2+i}{z-1}=Im\,\frac{(2+i)\cdot[(x-1)-iy]}{[(x-1)+iy]\cdot[(x-1)-iy]}=\frac{x-1-2y}{(x-1)^2+y^2}=C, \text{ или}$$

$$C\cdot\left[(x-1)^2+y^2\right]=x-1-2y, \quad (z\neq 1).$$

Если $C=0$,то получается уравнение прямой $x-2y-1=0$.
При $C\neq 0$ имеем семейство окружностей с уравнением

$$(x-1)^2+y^2-\frac{1}{C}(x-1)+\frac{2}{C}y=0,$$ проходящих через точку $z=1$.

Канонический вид уравнения получается после выделения полных квадратов:

$$\left(x-1-\frac{1}{2C}\right)^2+\left(y+\frac{1}{C}\right)^2=\frac{5}{4C^2}.$$

Центры окружностей расположены в точках $z_0=1+\frac{1}{2C}+i\,\frac{1}{C}$.
Линия центров перпендикулярна прямой, соответствующей значению $C=0$, и поэтому все линии семейства в точке $z=1$,в которой знаменатель исходной дроби обращается в нуль, касаются между собой (рис.I5).

3. Найдем действительную часть дроби, предварительно для некоторых упрощений выделяя целую часть.

Имеем

$$\frac{z-1}{z+i}=\frac{(z+i)-(1+i)}{z+i}=1-\frac{1+i}{z+i},$$

$$\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+i}=1-\operatorname{Re}\frac{(1+i)[x-i(y+1)]}{[x+i(y+1)][x-i(y+1)]}=1-\frac{x+y+1}{x^2+(y+1)^2}=C.$$

Отсюда $(1-C)\left[x^2+(y+1)^2\right]=x+y+1$.Как и в двух предыдущих примерах, по условию $z\neq -i$,но все кривые семейства проходят через эту особую точку. При $C=1$ получаем уравнение прямой $x+y+1=0$.При $C\neq 1$ получаются уравнения окружностей:

$$x^2-\frac{1}{1-C}x+(y+1)^2-\frac{1}{1-C}(y+1)=0$$

или

$$\left[x-\frac{1}{2(1-C)}\right]^2+\left[y+1-\frac{1}{2(1-C)}\right]^2=\frac{1}{2(1-C)^2}.$$

Все эти окружности в точке $z=-i$ касаются прямой, отвечающей случаю $C=1$ (рис.I6).

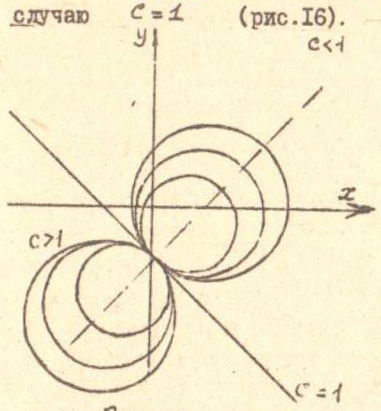

Рис.16.

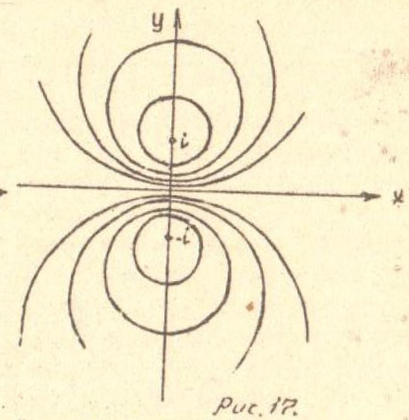

Рис.17.

4. Получим уравнение семейства этих линий. Так как модуль отношения равен отношению модулей числителя и знаменателя, то имеем

$$\frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}=\lambda.$$

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$x^2+(y-1)^2=\lambda^2\cdot\left[x^2+(y+1)^2\right];$$

$$x^2+y^2-2y+1=\lambda^2x^2+\lambda^2y^2+2\lambda^2y+\lambda^2;$$

$$(\lambda^2-1)(x^2+y^2)+2(\lambda^2+1)y+(\lambda^2-1)=0.$$

Отсюда видно, что при $\lambda=1$ получается линейное уравнение $y=0$ - уравнение действительной оси. Конечно, этот результат можно было предвидеть заранее, так как в этом случае $(\lambda=1)$ исходное уравнение определяет геометрическое место точек, равноудаленных от точек $+i$ и $-i$ [см. пример 57(6)]. При $\lambda\neq 1$ полученное уравнение является уравнением второго порядка и определяет при таких λ окружности. Конечно, при конкретном численном значении λ нетрудно найти координаты центра и радиус окружности, но в общем случае мы этого делать не будем. Наметим, как можно построить эти окружности при любых λ, исходя из геометрических соображений. Исходное уравнение определяет

геометрическое место точек, отношение расстояний которых до точек i и $-i$ есть величина постоянная. Нами уже доказано, что этим свойством обладает окружность. Из уравнения окружности видно, что центр ее лежит на мнимой оси, так как отсутствует член с x^1. Нетрудно найти на мнимой оси две точки, лежащие на окружности. Для этого достаточно разделить отрезок, соединяющий точки $z=i$ и $z=-i$ в отношении $\lambda:1$ внутренним и внешним образом. Очевидно, эти точки будут диаметрально противоположными. Заметим, что при увеличении λ от 1 до ∞ будет получаться система окружностей, охватывающая точку $z=-i$ и стягивающаяся к этой точке. При уменьшении λ от 1 до 0 аналогичная картина будет получаться вокруг точки $z=i$ (рис. 17). Рассмотренное семейство окружностей часто называют семейством окружностей Аполлония.

59. Выяснить, какие области в комплексной плоскости определяются следующими неравенствами:

1) $\operatorname{Im}\frac{z}{2+i}>1$; 2) $|\operatorname{Re}(iz+3)|<2$; 3) $1<|z+4i|<2$;

4) $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$; 5) $|z+3|<|z-1|$; 6) $|z+3i|+|z-4|<8$;

7) $0<\operatorname{Im}\frac{z+2}{z-i}<2$; 8) $1<\left|\frac{z-1+i}{z-2i}\right|<2$; 9) $0<\arg\frac{z+1}{z-1}<\frac{\pi}{3}$.

Решение.

1). Найдем мнимую часть дроби.

$$\operatorname{Im}\frac{z}{2+i}=\operatorname{Im}\frac{(x+iy)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2y-x}{5}.$$

Данное неравенство определяет полуплоскость $2y-x>5$, расположенную выше прямой $2y=x+5$.

2). Имеем $\operatorname{Re}(iz+3)=\operatorname{Re}[i(x+iy)+3]=3-y$.

Неравенство принимает вид $|3-y|<2$, которое эквивалентно двойному неравенству $-2<3-y<2$. Отсюда следует, что $1<y<5$ и область представляет собой горизонтальную полосу, границы которой проходят через точки $z=i$ и $z=5i$.

3). Так как отдельные уравнения $|z+4i|=1$ и $|z+4i|=2$ определяют окружности с центром в точке $z=-4i$ радиусами 1 и 2 соответственно [см. пример 57(2)], то данное двойное неравенство определяет двухсвязную кольцевую область, заключенную между этими окружностями.

4). В полярных координатах неравенство принимает вид $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ и определяет первую четверть комплексной плоскости $x>0$, $y>0$.

5). Равенство $|z+3|=|z-1|$ определяет прямую $x=-1$ — серединный перпендикуляр к отрезку $[-3,1]$. Неравенство $|z+3|<|z-1|$ утверждает, что расстояние от z до -3 меньше, чем до 1 и, следовательно, определяет левую полуплоскость $x<-1$.

6). Уравнение $|z+3i|+|z-4|=8$ определяет эллипс с фокусами в точках $-3i$ и 4 и большой осью, равной 8 [см. пример 57(7)]. Заданное неравенство, очевидно, определяет внутренность этого эллипса.

7. Имеем

$$\operatorname{Im}\frac{z+2}{z-i}=\operatorname{Im}\frac{[(x+2)+iy]\cdot[x-i(y-1)]}{[x+i(y-1)]\cdot[x-i(y-1)]}=\frac{x-2(y-1)}{x^2+(y-1)^2}.$$

Исходное неравенство принимает вид

$$0<\frac{x-2(y-1)}{x^2+(y-1)^2}<2.$$

Учитывая, что знаменатель $x^2+(y-1)^2>0$ при $z\neq i$, левое неравенство эквивалентно неравенству $x-2(y-1)>0$ и определяет полуплоскость, расположенную правее (и ниже) прямой $x=2(y-1)$. Преобразуем правое неравенство:

$$x^2+(y-1)^2>\frac{1}{2}x-(y-1).$$

Выделяя полные квадраты, получим неравенство

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2>\frac{5}{16},$$

которое определяет внешность круга с центром в точке $z_0=\frac{1}{4}+\frac{i}{2}$ радиуса $\frac{\sqrt{5}}{4}$. Как и в примерах 58(1-3), полученные прямая и окружность касаются между собой в особой точке функции $z=i$.

Двойному неравенству удовлетворяет множество точек плоскости, расположенное между найденными прямой и окружностью, и определяет полуплоскость с выброшенным кругом (рис.I8).

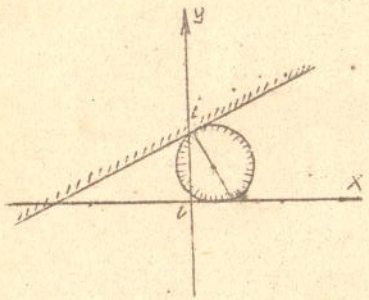

Рис. 18.

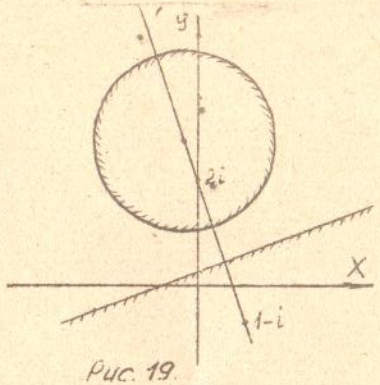

Рис. 19.

8. Как следует из анализа примера 58(4), граничными линиями искомой области будут "окружности" Аполлония, построенные относительно точек $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 2i$ и соответствующие значениям параметра λ, равным 1 и 2. Естественно, при $\lambda = 1$ должна получиться прямая. Двойному неравенству будут удовлетворять точки, расположенные между прямой и окружностью. Найдем уравнения граничных линий.

Имеем $\left|\frac{z-1+i}{z-2i}\right|^2 = \frac{(x-1)^2+(y+1)^2}{x^2+(y-2)^2}$.

Тогда левое неравенство можно записать в виде

$x^2+(y-2)^2 < (x-1)^2+(y+1)^2$, которое после упрощений принимает вид $3y - x - 1 > 0$ и определяет полуплоскость, расположенную выше прямой, перпендикулярной отрезку $[2i, 1-i]$ и проходящей через его середину. Правое неравенство преобразуем следующим образом:

$$4(x^2+y^2-4y+4) > x^2-2x+1+y^2+2y+1;$$

$$3(x^2+y^2) - 18y + 2x + 14 > 0;$$

$$x^2+y^2-6y+\tfrac{2}{3}x+\tfrac{14}{3} > 0;$$

$$(x+\tfrac{1}{3})^2+(y-3)^2 > 9+\tfrac{1}{9}-\tfrac{14}{3} = \tfrac{40}{9}.$$

Неравенство определяет внешность круга с центром в точке $z_0 = -\frac{1}{3}+3i$ радиуса $\sqrt{\frac{40}{9}}$. Таким образом, двойное неравенство определяет полуплоскость с выброшенным кругом (рис.I9).

9. Обозначим через u и v действительную и мнимую части дроби.

Имеем

$$u+iv = \frac{z+1}{z-1} = \frac{[(x+1)+iy]\cdot[(x-1)-iy]}{[(x-1)+iy]\cdot[(x-1)-iy]} = \frac{(x^2+y^2-1)-i2y}{(x-1)^2+y^2}.$$

Исходное неравенство $0 < \arg(u+iv) < \pi/3$ в плоскости (u, v) может быть записано в этих переменных в виде

$$0 < v < \sqrt{3}u \qquad \text{(рис.20)}.$$

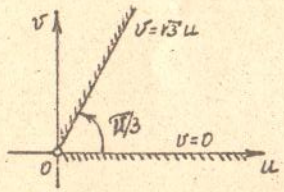

Рис. 20.

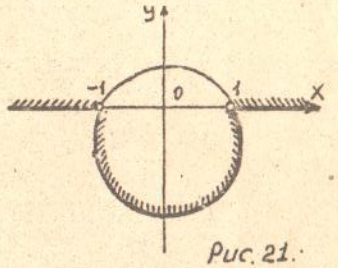

Рис. 21.

В переменных x и y полученные неравенства, с учетом того, что $(x-1)^2+y^2 > 0$ при $z \neq 1$, принимают вид

$$0 < -2y < \sqrt{3}\cdot(x^2+y^2-1).$$

Левое неравенство определяет нижнюю полуплоскость $y < 0$.
Правое неравенство преобразуем к виду $x^2+y^2-1+\frac{2}{\sqrt{3}}y > 0$, или, выделяя полный квадрат, $x^2+(y+\frac{1}{\sqrt{3}})^2 > \frac{4}{3}$.
Оно определяет внешность круга с центром в точке $z = -\frac{i}{\sqrt{3}}$ радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$. С учетом первого неравенства получаем нижнюю полуплоскость с выброшенной частью найденного круга (рис.2I).

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

В примерах 60-68 выяснить, какие линии определяются следующими параметрическими уравнениями:

60. $z = ae^{it}$, $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3}{2}\pi$, $a > 0$;

61. $z = i - 3e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$;

62. $z = \frac{1}{2}\cos t + i\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$;

63. $z = 1 + i\sin^2 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

64. $z = t + i\sqrt{1-t^2}$, $-1 \le t \le 1$;

65. $z = -t + i\sqrt{1-t^2}$, $-1 \le t < 0$;

66. $z = a\left(t + i - ie^{-it}\right)$, $-\infty < t < \infty$, $a > 0$;

67. $z = t + i - 2ie^{-it}$, $0 \le t \le \pi$;

68. $z = \frac{a(1+t^2) + i \cdot 2bt}{1+t^2}$, $-1 < t < 1$, $a > 0$, $b > 0$.

В примерах 69-94 выяснить геометрический смысл уравнений и неравенств в комплексной форме:

69. $\operatorname{Im} z \le 2$; 70. $\operatorname{Re} z > -1$; 71. $\operatorname{Im}\left[(-2+i)z\right] = 3$;

72. $\operatorname{Re}\left[(3+4i)\cdot\bar{z}\right] = 5$; 73. $\operatorname{Im}\left[(1-i)(z+i)\right] = 0$; 74. $|\operatorname{Re} z| < 3$;

75. $|\operatorname{Im}(z+i)| < 2$; 76. $|z| \ge 1$; 77. $|z-i| < 2$; 78. $|z+3-4i| = 5$;

79. $1 < |z+2| < 4$; 80. $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3}$; 81. $0 < \arg(z+1) < \frac{\pi}{2}$;

82. $\operatorname{Re} z^2 = 4$; 83. $\operatorname{Im} z^2 = 4$; 84. $|z+2| + |z-2| = 5$;

85. $|z+i| + |z| < 3$; 86. $|z-5| - |z+5| = 6$; 87. $|z-i| - |z+i| \ge \sqrt{2}$;

88. $\operatorname{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0$; 89. $z^2 + \bar{z}^2 = 1$; 90. $|z+2| = |z|$;

91. $|z+i| = |z-1|$; 92. $|z-3| < |z+3|$; 93. $|z^2-1| = 1$; 94. $|z^2+1| = 2|z|$.

В примерах 95-98 определить семейства линий, заданные уравнениями:

95. $\operatorname{Re}\frac{1}{z-i} = c$, $-\infty < c < \infty$; 96. $\operatorname{Im}\frac{i}{z+2} = c$, $-\infty < c < \infty$;

97. $\operatorname{Re}\frac{1+i}{z+1} = c$, $-\infty < c < \infty$; 98. $|z+3| = \lambda\cdot|z-4i|$, $\lambda > 0$.

В примерах 99-111 построить области, заданные неравенствами:

99. $0 < \operatorname{Re}\frac{z-i}{z+1} < 1$; 100. $0 < \operatorname{Re}\frac{z+2i}{z-4} < 2$;

101. $0 < \operatorname{Im}\frac{z-1}{z+2i} < 2$; 102. $0 < \operatorname{Im}\frac{z-1+i}{z+2-i} < 1$;

103. $1 < \left|\frac{z-2i}{z+1}\right| < 3$; 104. $1 < \left|\frac{z+i}{z-3i}\right| < 2$;

105. $0 < \arg\frac{z}{z+2} < \frac{\pi}{4}$; 106. $\frac{1}{2} < \left|\frac{z-i}{z}\right| < 2$;

107. $2 < \left|\frac{z+2}{z-2}\right| < 3$; 108. $\frac{\pi}{4} < \arg\frac{z-2}{z+4} < \frac{\pi}{3}$;

109. $\frac{\pi}{6} < \arg\frac{z-2i}{z+1} < \frac{3}{4}\pi$; 110. $-\frac{\pi}{4} < \arg\frac{z+3i}{z-i} < \frac{\pi}{2}$;

111. $-\frac{3}{4}\pi < \arg\frac{z+2}{z+2i} < \frac{\pi}{4}$.

ГЛАВА III

ОСНОВНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

К трансцендентным функциям вещественного переменного обычно относят показательную, тригонометрические, гиперболические функции и обратные к ним функции. В этой главе рассматривается обобщение перечисленных здесь функций на случай комплексного переменного.

В декартовых и полярных координатах независимая переменная обозначается через

$$z = x + iy = re^{i\varphi}, \qquad (1)$$

а функция - через

$$w = u + iv = \rho e^{i\theta}. \qquad (2)$$

Рассмотрим сначала показательную функцию комплексного переменного. Положим по определению

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \qquad (3)$$

Из определения следует, что

$$u = Re(e^z) = e^x \cos y; \qquad (4)$$

$$v = Im(e^z) = e^x \sin y; \qquad (5)$$

$$\rho = |e^z| = e^x; \qquad (6)$$

$$\theta = Arg(e^z) = y + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (7)$$

Данное определение является естественным обобщением определения показательной функции вещественного переменного. Введённая формулой (3) функция при $y = 0$, т.е. при $z = x$ — вещественном, совпадает с показательной функцией вещественного переменного x. Основное свойство показательной функции вещественного переменного - так называемая теорема сложения $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$ оказывается справедливой для показательной функции комплексного переменного z. В самом деле, пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ - произвольные комплексные числа. Запишем $e^{z_1} = e^{x_1} \cdot e^{iy_1}$, $e^{z_2} = e^{x_2} \cdot e^{iy_2}$.

Согласно правилу умножения комплексных чисел в показательной форме имеем

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot e^{iy_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{iy_2} = e^{x_1+x_2} \cdot e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.$$

Отметим также, что функция e^z не обращается в нуль ни при каких значениях z, так как ее модуль $|e^z| = e^x > 0$ при любом действительном x.

Из определения (3) вытекает и специфическое свойство показательной функции комплексного переменного: она оказывается периодической функцией с чисто мнимым периодом $2\pi i$, т.к.

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z, \quad (e^{2\pi i} = 1).$$

Следовательно, если для некоторых комплексных чисел z_1 и z_2 имеет место равенство $e^{z_1} = e^{z_2}$, то показатели могут отличаться на число, кратное $2\pi i$: $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, где k - некоторое целое число.

Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ для комплексных значений z определяются так, чтобы при действительных z ($z = x$) они совпадали с тригонометрическими функциями $\sin x$ и $\cos x$. Учитывая формулы Эйлера, положим по определению

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \qquad (8)$$

При таком определении в с е ф о р м у л ы элементарной тригонометрии, справедливые при действительных значениях x, остаются справедливыми и при всех комплексных значениях z. Функции tgz и $ctgz$ определяются формулами

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{9}$$

По аналогии распространяется понятие гиперболических функций для случая комплексного переменного:

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \tag{10}$$

$$thz = \frac{shz}{chz}, \qquad cthz = \frac{chz}{shz}. \tag{11}$$

Из формул (8)-(11) следует связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$shz = -i\sin(iz), \qquad sh(iz) = i\sin z; \tag{12}$$

$$chz = \cos(iz), \qquad ch(iz) = \cos z; \tag{13}$$

$$thz = -i\,tg(iz), \qquad th(iz) = i\,tgz. \tag{14}$$

Используя эти равенства, из формул для тригонометрических функций получаются все основные формулы для гиперболических функций.

Упражнения.

II2. Найти действительные и мнимые части следующих комплексных чисел и функций:

1) $e^{2+\pi i}$; 2) $e^{5-\frac{\pi i}{4}}$; 3) e^{-4-3i}; 4) e^{z^2}; 5) $e^{\frac{1}{z^3}}$;

6) $e^{ie^{-z}}$; 7) $\cos 2i$; 8) $sh\left(4-\frac{\pi i}{2}\right)$; 9) $\sin(3-5i)$;

10) $ctg\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right)$; 11) $th\left(\ln 5+\frac{\pi i}{2}\right)$; 12) $cth\,z$.

Решение. 1) По определению (3) имеем

$$e^{2+\pi i} = e^2 \cdot e^{\pi i} = e^2 \cdot (-1) = -e^2.$$

Следовательно $u = -e^2$, $v = 0$.

2) Аналогично

$$e^{5-\frac{\pi i}{4}} = e^5 \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}} = e^5 \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}};$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} e^5, \qquad v = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^5.$$

3) $e^{-4-3i} = e^{-4} \cdot e^{-3i} = e^{-4}(\cos 3 - i\sin 3)$;

$$u = e^{-4}\cos 3, \qquad v = -e^{-4}\sin 3.$$

4) Т.к. $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$, то

$$e^{z^2} = e^{x^2-y^2} \cdot e^{i2xy} = e^{x^2-y^2}\cdot(\cos 2xy + i\sin 2xy), \text{ т.е.}$$

$$u = e^{x^2-y^2}\cdot\cos 2xy, \qquad v = e^{x^2-y^2}\cdot\sin 2xy.$$

5) Здесь удобнее перейти к полярным координатам:

$$z = re^{i\varphi}, \quad \frac{1}{z^3} = \frac{1}{r^3 e^{3i\varphi}} = \frac{1}{r^3} e^{-3i\varphi} = \frac{\cos 3\varphi - i\sin 3\varphi}{r^3}.$$

Тогда

$$e^{\frac{1}{z^3}} = e^{\frac{\cos 3\varphi}{r^3}} \cdot e^{-i\frac{\sin 3\varphi}{r^3}} = e^{\frac{\cos 3\varphi}{r^3}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\sin 3\varphi}{r^3}\right) - i\sin\left(\frac{\sin 3\varphi}{r^3}\right)\right].$$

Следовательно

$$u = e^{\frac{\cos 3\varphi}{r^3}} \cdot \cos\left(\frac{\sin 3\varphi}{r^3}\right), \qquad v = -e^{\frac{\cos 3\varphi}{r^3}} \cdot \sin\left(\frac{\sin 3\varphi}{r^3}\right).$$

6) Имеем

$$e^{ie^{-z}} = e^{ie^{-x}\cdot e^{-iy}} = e^{ie^{-x}\cdot(\cos y - i\sin y)} = e^{ie^{-x}\cos y}\cdot e^{e^{-x}\sin y} =$$

$$= e^{e^{-x}\sin y}\cdot\left[\cos(e^{-x}\cos y) + i\sin(e^{-x}\cos y)\right].$$

Таким образом

$$u = e^{e^{-x}\sin y}\cdot\cos(e^{-x}\cos y);$$

$$v = e^{e^{-x}\sin y}\cdot\sin(e^{-x}\cos y).$$

7) Согласно определению (8) имеем

$$\cos 2i = \frac{e^{i\cdot 2i} + e^{-i\cdot 2i}}{2} = \frac{e^{-2}+e^{2}}{2} = ch\,2 \approx 3{,}76.$$

8) По определению (IO) имеем

$$sh\left(4 - \frac{\pi i}{2}\right) = \frac{e^{4-\frac{\pi i}{2}} - e^{-4+\frac{\pi i}{2}}}{2} = \frac{e^{4}\cdot e^{-\frac{\pi i}{2}} - e^{-4}\cdot e^{\frac{\pi i}{2}}}{2} = \frac{-ie^{4} - ie^{-4}}{2} = -i\,ch\,4.$$

9) По определению (8) имеем

$$\sin(3-5i) = \frac{e^{i(3-5i)} - e^{-i(3-5i)}}{2i} = \frac{e^{3i}\cdot e^{5} - e^{-3i}\cdot e^{-5}}{2i} =$$

$$= \frac{(\cos 3 + i\sin 3)e^{5} - (\cos 3 - i\sin 3)e^{-5}}{2i} =$$

$$= \frac{\cos 3\cdot(e^{5}-e^{-5}) + i\sin 3\cdot(e^{5}+e^{-5})}{2i} = \frac{1}{i}\cos 3\cdot sh\,5 + \sin 3\cdot ch\,5 =$$

$$= \sin 3\cdot ch\,5 - i\cos 3\cdot sh\,5.$$

Этот же результат значительно быстрее можно получить, используя формулу синуса разности с последующей заменой тригонометрических функций чисто мнимого аргумента через гиперболические функции:

$$\sin(3-5i) = \sin 3\cdot\cos(5i) - \cos 3\cdot\sin(5i) =$$

$$= \sin 3\cdot ch\,5 - i\cos 3\cdot sh\,5.$$

IO) Т.к.

$$ctg\,z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = i\cdot\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1},$$

то имеем

$$ctg\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right) = i\,\frac{e^{2i\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right)}+1}{e^{2i\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right)}-1} =$$

$$= i\cdot\frac{e^{\frac{\pi i}{2}}\cdot e^{2\ln 2}+1}{e^{\frac{\pi i}{2}}\cdot e^{2\ln 2}-1} = i\cdot\frac{4i+1}{4i-1} = \frac{(-4+i)(-4i-1)}{(4i-1)(-4i-1)} = \frac{8+15i}{17}.$$

II) Аналогично предыдущему, имеем

$$th\,z = \frac{sh\,z}{ch\,z} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}} = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1};$$

$$th\left(\ln 5 + \frac{\pi i}{3}\right) = \frac{e^{2\left(\ln 5+\frac{\pi i}{3}\right)}-1}{e^{2\left(\ln 5+\frac{\pi i}{3}\right)}+1} = \frac{e^{2\ln 5}\cdot e^{\frac{2}{3}\pi i}-1}{e^{2\ln 5}\cdot e^{\frac{2}{3}\pi i}+1} =$$

$$= \frac{\left(25e^{\frac{2}{3}\pi i}-1\right)\left(25e^{-\frac{2}{3}\pi i}+1\right)}{\left(25e^{\frac{2}{3}\pi i}+1\right)\cdot\left(25e^{-\frac{2}{3}\pi i}+1\right)} = \frac{625-1+50i\sin\frac{2}{3}\pi}{625+1+50\cos\frac{2}{3}\pi} =$$

$$= \frac{624+25\sqrt{3}i}{626-25} = \frac{624+25\sqrt{3}i}{601}.$$

I2) По определению (8) имеем

$$cth z = \frac{ch z}{sh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1} = \frac{\left[e^{2(x+iy)}+1\right]\cdot\left[e^{2(x-iy)}-1\right]}{\left[e^{2(x+iy)}-1\right]\cdot\left[e^{2(x-iy)}-1\right]} =$$

$$= \frac{e^{4x} - 1 + e^{2x}\cdot\left(e^{-2iy} - e^{2iy}\right)}{e^{4x}+1 - e^{2x}\cdot\left(e^{2iy}+e^{-2iy}\right)} = \frac{e^{4x} - 1 - 2i e^{2x}\sin 2y}{e^{4x}+1 - 2e^{2x}\cos 2y} =$$

$$= \frac{e^{2x}\left(e^{2x} - e^{-2x} - 2i\sin 2y\right)}{e^{2x}\left(e^{2x}+e^{-2x} - 2\cos 2y\right)} = \frac{sh 2x - i\sin 2y}{ch 2x - \cos 2y}.$$

Таким образом

$$Re(cth z) = \frac{sh 2x}{ch 2x - \cos 2y}, \quad Im(cth z) = -\frac{\sin 2y}{ch 2x - \cos 2y}.$$

II3. Проверить формулу $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\cdot\cos z_2 - \sin z_1\cdot\sin z_2$ и получить соответствующую формулу для $ch(z_1+z_2)$.

Решение.

$$\cos(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \frac{e^{iz_1}\cdot e^{iz_2} + e^{-iz_1}\cdot e^{-iz_2}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) + (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2) + i(\cos z_1\sin z_2 + \sin z_1\cos z_2) + \right.$$

$$\left. + (\cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2) - i(\cos z_1\sin z_2 + \sin z_1\cos z_2)\right] = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2.$$

Заменяя в полученной формуле всюду z_1 на iz_1 и z_2 на iz_2 с учетом (I2)-(I3), получим

$$\cos(iz_1+iz_2) = \cos(iz_1)\cdot\cos(iz_2) - \sin(iz_1)\cdot\sin(iz_2).$$

Но

$$\cos(iz_1+iz_2) = \cos\left[i(z_1+z_2)\right] = ch(z_1+z_2);$$

$$\cos(iz_1) = ch z_1, \quad \cos(iz_2) = ch z_2, \quad \sin(iz_1) = i\,sh z_1, \quad \sin(iz_2) = i\,sh z_2.$$

Таким образом, получается формула сложения для гиперболического косинуса.

$$ch(z_1+z_2) = ch z_1\cdot ch z_2 + sh z_1\cdot sh z_2.$$

II4. Проверить формулу

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

и получить из нее соответствующую формулу для гиперболических функций.

Решение. Имеем

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right) = \frac{4}{4} = 1.$$

Заменяя в этой формуле z на iz, получим

$$\sin^2(iz) + \cos^2(iz) = 1. \qquad \text{Но} \quad \sin(iz) = i\,sh z, \quad \cos(iz) = ch z$$

и соответствующая формула примет вид

$$ch^2 z - sh^2 z = 1.$$

II5. Найти модуль функции $w = \sin z$.

Решение.

Т.к. $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cdot\cos(iy) + \cos x\cdot\sin(iy) =$

$= \sin x\, ch y + i\cos x\cdot sh y,$

то $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x\cdot ch^2 y + \cos^2 x\cdot sh^2 y} = \sqrt{\sin^2 x\, ch^2 y + (1-\sin^2 x)\, sh^2 y} =$

$= \sqrt{\sin^2 x\cdot(ch^2 y - sh^2 y) + sh^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + sh^2 y}.$

Заметим, что $0 \le sh^2 y < \infty$ и поэтому $|\sin z|$ может принимать всевозможные значения от 0 до $+\infty$, в отличие от синуса вещественного переменного.

II6. Найти множество точек z, при которых следующие функции принимают вещественные значения:

I) $\sin z$; 2) $\cos(z^2)$; 3) $cth[(1+i)z]$.

Решение.

I) Из решения предыдущего примера следует, что

$Im(\sin z) = \cos x \cdot sh y$. Приравнивая мнимую часть нулю, будем иметь:

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad -\infty < y < \infty;$$

$$sh y = 0, \quad y = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Таким образом, функция $\sin z$ принимает вещественные значения не только при действительных $z = x, (y = 0)$, но и на вертикальных прямых $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

2) Имеем

$$\cos(z^2) = \cos[(x^2 - y^2) + i 2xy] = \cos(x^2 - y^2) \cdot ch 2xy - i \sin(x^2 - y^2) \cdot sh 2xy.$$

Из условия задачи следует, что

$\sin(x^2 - y^2) = 0$, т.е. $x^2 - y^2 = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – семейство гипербол;

$sh 2xy = 0$, т.е. $x = 0$ и $y = 0$ – действительная и мнимая оси.

3) Используя результат примера II2(I2) и учитывая, что

$$(1+i)z = (1+i)(x+iy) = (x-y) + i(x+y), \quad \text{имеем}$$

$$Im\, cth[(1+i)z] = -\frac{\sin 2(x+y)}{ch 2(x-y) - \cos 2(x+y)},$$

откуда следует,

что данная функция принимает вещественные значения на семействе параллельных прямых $x + y = \frac{k\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Введем теперь функции, обратные к рассмотренным выше. Логарифмическая функция комплексного переменного определяется как функция, обратная показательной. Так как значения показательной функции всегда отличны от нуля, то логарифмическая функция определяется на всей комплексной плоскости, кроме точки $z = 0$. Если $e^w = z$, то w называется логарифмом z и обозначается $w = Ln\, z$. Пусть $w = Ln\, z = u + iv$, $z = re^{i\varphi}$. Тогда, согласно определению логарифмической функции, получаем

$$e^{u+iv} = re^{i\varphi}, \quad \text{или} \quad e^u \cdot e^{iv} = r \cdot e^{i\varphi}.$$

Из равенства комплексных чисел в показательной форме имеем

$$e^u = r, \quad v = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Следовательно, $u = \ln r = \ln |z|$, $v = Arg\, z$.

Таким образом

$$w = Ln\, z = \ln |z| + i\, Arg\, z. \tag{I5}$$

Отсюда следует, что логарифмическая функция (комплексного переменного) является многозначной (бесконечнозначной). Если в формуле (I5) мнимую часть взять равной главному значению аргумента, то полученная функция называется главным значением $Ln\, z$ и обозначается через $\ln z$:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \tag{I6}$$

Отметим, что на практике для нахождения логарифма какого-либо выражения удобно это выражение записать в показательной форме с учетом всех значений аргумента и затем логарифм произведения представить в виде суммы логарифмов, а логарифм экспоненты взять равным показателю этой экспоненты

$$Ln\, z = Ln[r \cdot e^{i(\varphi + 2k\pi)}] = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{I7}$$

Введение логарифмической функции комплексного переменного позволяет рассматривать общую степенную функцию z^ν при любом комплексном показателе $\nu = \alpha + i\beta$ по формуле

$$z^\nu = e^{\nu \operatorname{Ln} z} = e^{(\alpha+i\beta)[\ln z + i(\varphi+2k\pi)]} =$$

$$= e^{\alpha \ln z - \beta(\varphi+2k\pi)} \cdot e^{i[\beta \ln z + \alpha(\varphi+2k\pi)]}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (18)$$

Можно рассмотреть функции, обратные к тригонометрическим и гиперболическим. Так как тригонометрические и гиперболические функции выражаются через показательную, то естественно ожидать, что обратные им функции будут выражаться через логарифмическую функцию.

Функция, обратная к функции $z = \cos w$, называется арккосинусом z и обозначается через $w = \operatorname{Arccos} z$.

Так как

$$\cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2},$$

то равенство $z = \cos w$ можно записать в виде

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}.$$

Приведем это уравнение к квадратному относительно e^{iw}:

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0.$$

Отсюда

$$e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}.$$

В этой формуле достаточно брать одно из двух значений квадратного корня. Окончательно имеем

$$w = \operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right). \qquad (19)$$

Рассмотрим подробнее случай $z = x$, $-1 \le x \le 1$. Положим $x = \cos\alpha$, где $0 \le \alpha \le \pi$. Отсюда α выражается через

функцию вещественного переменного $\alpha = \arccos x$.

Имеем

$$\operatorname{Arccos} x = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(\cos\alpha \pm i\sin\alpha) =$$

$$= \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left[e^{\pm i\alpha + 2k\pi i}\right] = \pm\alpha + 2k\pi = 2k\pi \pm \arccos x.$$

Таким образом, формула (19) в этом случае дает результат, совпадающий с известной из тригонометрии формулой об общем виде выражения $\operatorname{Arccos} x$.

Аналогично можно определить функции, обратные к гиперболическим. Например, функция, обратная к функции $z = \operatorname{sh} w$, называется арксинусом гиперболическим и обозначается $w = \operatorname{Arsh} z$.

Имеем

$$z = \frac{e^w - e^{-w}}{2}.$$

Преобразуя, приведем его к квадратному уравнению относительно e^w:

$$e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0,$$

из которого

$$e^w = z \pm \sqrt{z^2 + 1}.$$

Окончательно имеем

$$w = \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 + 1}\right). \qquad (20)$$

Упражнения.

II7. Вычислить

1) $\operatorname{Ln}(-1)$; 2) $\operatorname{Ln}(-i)$; 3) $\operatorname{Ln}(i - \sqrt{3})$;

4) $\operatorname{Ln}(1 - \cos\alpha + i\sin\alpha)$, $0 < \alpha < 2\pi$; 5) i^i 6) 2^{3+4i}.

Решение. 1. Будем пользоваться формулой (17).

Так как $-1 = e^{(\pi+2k\pi)i}$, то $\operatorname{Ln}(-1) = \operatorname{Ln}\left[e^{(\pi+2k\pi)i}\right] = (2k+1)\pi i$.

2. Аналогично

$$\operatorname{Ln}(-i) = \operatorname{Ln}\left[e^{\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}\right] = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i.$$

3. Так как $i-\sqrt{3}=2e^{\left(\frac{5}{6}\pi+2k\pi\right)i}$, то

$$\ln(i-\sqrt{3})=\ln\left[2e^{\left(\frac{5}{6}\pi+2k\pi\right)i}\right]=\ln 2+i\left(\frac{5}{6}\pi+2k\pi\right).$$

4. Запишем выражение, стоящее под знаком логарифма, в показательной форме:

$$1-\cos\alpha+i\sin\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}+i\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\left[\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right]=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot e^{\left(\frac{\pi-\alpha}{2}+2k\pi\right)i}.$$

Здесь, в силу ограничения $0<\alpha<2\pi$, $\sin\frac{\alpha}{2}>0$ и модуль заданного выражения равен $2\sin\frac{\alpha}{2}$. Тогда

$$\ln(1-\cos\alpha+i\sin\alpha)=\ln\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)+i\left(\frac{\pi-\alpha}{2}+2k\pi\right).$$

5. Воспользуемся формулой (I8)

$$i^i=e^{i\ln i}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}.$$

Таким образом, выражение i^i представляет собой бесконечное множество положительных чисел, образующее геометрическую прогрессию со знаменателем $q=e^{-2\pi}$.

6. Проводя вычисления по формуле (I8), получим

$$2^{3+4i}=e^{(3+4i)\ln 2}=e^{(3+4i)(\ln 2+2k\pi i)}=$$

$$=e^{3\ln 2-8k\pi}\cdot e^{i(4\ln 2+6k\pi)}=e^{\ln 8-8k\pi}\cdot e^{i\ln 16}=$$

$$=8e^{-8k\pi}\cdot(\cos\ln 16+i\sin\ln 16).$$

II8. Найти все решения следующих уравнений:

1) $\sin z=\frac{5}{3}$; 2) $\operatorname{th} z=-1+2i$; 3) $2\operatorname{ch} z+\operatorname{sh} z=i$;

4) $\sin z-\cos z=5\sqrt{2}$.

Решение. I. Заменяя $\sin z$ по формуле Эйлера, перепишем уравнение в виде

$$e^{iz}-e^{-iz}=\frac{10}{3}i.$$

Полагая для краткости $e^{iz}=t$, получим

$$t-\frac{1}{t}=\frac{10}{3}i,$$

откуда

$$t^2-\frac{10}{3}it-1=0$$

и

$$t=\frac{5}{3}i\pm\sqrt{-\frac{25}{9}+1}=\frac{5}{3}i\pm\frac{4}{3}i;\quad t_1=3i,\quad t_2=\frac{1}{3}i.$$

Так как оба корня квадратного уравнения отличны от нуля, то уравнение $e^{iz}=t$ относительно z имеет решение

$$z_1=\frac{1}{i}\ln(3i)=\frac{1}{i}\left(\ln 3+\frac{\pi i}{2}+2k\pi i\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln 3;$$

$$z_2=\frac{1}{i}\ln\left(\frac{1}{3}i\right)=\frac{1}{i}\left(\ln\frac{1}{3}+\frac{\pi i}{2}+2k\pi i\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi+i\ln 3.$$

Объединяя эти результаты в одну формулу, получим бесконечное множество корней данного уравнения

$$z_k=\operatorname{Arc}\sin\frac{5}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\pm i\ln 3,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

2. Пользуясь формулой

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1},$$

найдем

$$\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} = -1+2i,$$

откуда, приводя дробь к общему знаменателю, выразим

$$e^{2z} = \frac{2i}{2-2i} = \frac{i}{1-i} = \frac{-1+i}{2}.$$

Окончательно

$$z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{-1+i}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\tfrac{3}{4}\pi+2k\pi\right)i\right] = -\frac{1}{4}\ln 2 + \left(\tfrac{3}{8}+k\right)\pi i.$$

3. Выражая гиперболические функции через показательную, будем иметь

$$2\,\frac{e^{z}+e^{-z}}{2} + \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = i \quad \text{, или } \quad 3e^{z}+e^{-z} = 2i.$$

Домножая обе части последнего уравнения на e^{z}, придем к квадратному относительно e^{z} уравнению

$$3e^{2z} - 2ie^{z} + 1 = 0,$$

корни которого

$$e^{z} = \frac{i \pm 2i}{3}.$$

Отсюда

$$e^{z_1} = i, \quad z_1 = \operatorname{Ln} i = \left(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)i;$$

$$e^{z_2} = -\tfrac{1}{3}i; \quad z_2 = \operatorname{Ln}\left(-\tfrac{1}{3}i\right) = \ln\tfrac{1}{3} + \left(-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)i.$$

4. Используя формулы Эйлера, перепишем уравнение в виде

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} - \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 5\sqrt{2},$$

или

$$(1-i)e^{iz} - (1+i)e^{-iz} = 10\sqrt{2}\,i.$$

Домножая обе части полученного уравнения на e^{iz}, придем к квадратному относительно e^{iz} уравнению

$$(1-i)\,e^{2iz} - 10i\sqrt{2}\,e^{iz} - (1+i) = 0.$$

Решая последнее, будем иметь

$$e^{iz} = \frac{5\sqrt{2}\,i \pm \sqrt{-50+2}}{1-i} = \frac{\left(5\sqrt{2} \pm \sqrt{48}\right)i\,(1+i)}{(1-i)(1+i)} =$$

$$= \frac{\left(5 \pm \sqrt{24}\right)\cdot\sqrt{2}\cdot(i-1)}{2} = \left(5 \pm \sqrt{24}\right)e^{\left(\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right)i},$$

и окончательно

$$z = \frac{1}{i}\left[\ln\left(5\pm\sqrt{24}\right) + \left(\tfrac{3}{4}\pi+2k\pi\right)i\right] = \left(2k+\tfrac{3}{4}\right)\pi - i\ln\left(5\pm\sqrt{24}\right) =$$

$$= \left(2k+\tfrac{3}{4}\right)\pi \pm i\ln\left(5+2\sqrt{6}\right).$$

Рассмотрим в заключение применение тригонометрических, гиперболических и обратных им функций к нахождению корней кубических уравнений. Основная идея метода состоит в применении тригонометрических (гиперболических) подстановок. Сначала рассмотрим кубическое уравнение частного вида

$$4z^3 - 3z = m, \qquad (21)$$

где m – произвольное число, действительное или даже комплексное. Учитывая известную формулу тригонометрии

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha,$$

в уравнении (21) сделаем замену

$$z = \cos\alpha. \qquad (22)$$

Тогда уравнение примет вид

$$\cos 3\alpha = m,$$

все корни которого

$$\alpha = \tfrac{1}{3}\operatorname{Arccos} m.$$

Таким образом, все корни кубического уравнения (21), с учетом (22), определяются формулой

$$z = \cos\left(\tfrac{1}{3}\operatorname{Arccos} m\right). \qquad (23)$$

Если вместо уравнения (2I) рассмотреть уравнение

$$4z^3 + 3z = m, \qquad (24)$$

то следует применить замену

$$z = \operatorname{sh}\alpha, \qquad (25)$$

так как

$$4\operatorname{sh}^3\alpha + 3\operatorname{sh}\alpha = \operatorname{sh} 3\alpha.$$

Уравнение (24) преобразуется к виду

$$\operatorname{sh} 3\alpha = m,$$

корни которого

$$\alpha = \tfrac{1}{3}\operatorname{Ar}\operatorname{sh} m,$$

и, следовательно, все корни уравнения (24) определяются формулой

$$z = \operatorname{sh}\left(\tfrac{1}{3}\operatorname{Ar}\operatorname{sh} m\right). \qquad (26)$$

Умея теперь решать простые кубические уравнения (2I), (24), рассмотрим уравнение вида

$$y^3 + py + q = 0, \qquad (27)$$

где p и q -заданные числа. Оказывается, что уравнение (27) может быть сведено к любому уравнению (2I) или (24).

В уравнении (27) сделаем замену

$$y = l \cdot z, \qquad (28)$$

где число l следует выбрать так, чтобы получалось одно из уравнений (2I), (24).

Имеем

$$l^3 z^3 + pl z + q = 0.$$

Домножая полученное уравнение на число $\frac{4}{l^3}$, получим

$$4z^3 + \frac{4p}{l^2} z + \frac{4q}{l^3} = 0. \qquad (29)$$

Полагая

$$l = \sqrt{-\tfrac{4}{3}p}, \qquad (30)$$

приходим к уравнению (2I), где

$$m = -\frac{4q}{l^3}. \qquad (3I)$$

Таким образом, все корни уравнения (27) определяются формулой

$$y = l \cdot \cos\left(\tfrac{1}{3}\operatorname{Arccos} m\right). \qquad (32)$$

Выбор параметра l по формуле (30) удобен, когда p и q вещественны и $p<0$. Если же в уравнении (27) $p>0$, то удобно взять

$$l = \sqrt{\tfrac{4}{3}p}. \qquad (33)$$

Тогда мы придем к уравнению (24), и все корни уравнения (27) определятся по формуле

$$y = l \cdot \operatorname{sh}\left(\tfrac{1}{3}\operatorname{Ar}\operatorname{sh} m\right). \qquad (34)$$

Заметим, что при нахождении численных значений корней уравнения (27) не обязательно подсчитывать все три корня по формулам (32) или (34). Достаточно найти по этим формулам какой-то один корень y_1, а остальные два будут являться корнями квадратного трехчлена, полученного от деления левой части (27) на двучлен $y - y_1$. Нетрудно получить выражение этих корней через значения y_1 и p:

$$y_{2,3} = \frac{-y_1 \pm \sqrt{-4p - 3y_1^2}}{2}. \qquad (35)$$

Отметим также, что общее кубическое уравнение

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad (36)$$

сводится к уравнению (27) при помощи замены

$$x=y-\frac{a}{3}. \qquad (37)$$

Упражнения.

II9. Найти все корни следующих уравнений:

1) $4z^3-3z=\frac{1}{2}$; 2) $4z^3-3z=3$; 3) $4z^3+3z=5$;

4) $5y^3-15y-2=0$; 5) $y^3+y+4=0$; 6) $2y^3-6y-(3+i)=0$;

7) $16x^3+48x^2-6x-11=0$.

Решение.

1) Уравнение имеет вид (21) с параметром $m=\frac{1}{2}$. Согласно (23), все корни уравнения определяются формулой

$$z=\cos\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}\frac{1}{2}\right).$$

Но $\operatorname{Arccos}\frac{1}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$. Поэтому $z=\cos\left(\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi\right)$.

При $k=0$ имеем $z_1=\cos\left(\pm\frac{\pi}{9}\right)\approx 0{,}93969$.

При $k=1$ имеем $z_{2,3}=\cos\left(\frac{2}{3}\pi\pm\frac{1}{9}\pi\right)$;

$z_2=\cos\frac{5}{9}\pi\approx -0{,}17365$; $z_3=\cos\frac{7}{9}\pi\approx -0{,}76604$.

При всех остальных значениях k получаются значения корней, перечисленные выше.

2) В этом уравнении $m=3$ и все его корни определяются формулой (23)

$$z=\cos\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}3\right).$$

По формуле (I9) с учетом (I7) имеем

$$\operatorname{Arccos}3=\frac{1}{i}\ln\left(3\pm\sqrt{8}\right)=-i\left[\ln\left(3\pm\sqrt{8}\right)+2k\pi i\right]=$$

$$=2k\pi-i\ln\left(3\pm\sqrt{8}\right).$$

Так как $\ln\left(3-\sqrt{8}\right)=\ln\frac{1}{3+\sqrt{8}}=-\ln\left(3+\sqrt{8}\right)$, то

$$\operatorname{Arccos}3=2k\pi\pm i\ln\left(3+\sqrt{8}\right).$$

Корни уравнения теперь определяются формулой

$$z=\cos\frac{1}{3}\left[2k\pi\pm i\ln\left(3+\sqrt{8}\right)\right].$$

При $k=0$ имеем

$$z_1=\cos\left[\pm\frac{i}{3}\ln\left(3+\sqrt{8}\right)\right]=\operatorname{ch}\left[\frac{1}{3}\ln\left(3+\sqrt{8}\right)\right]=$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{3}\ln\left(3+\sqrt{8}\right)}+e^{-\frac{1}{3}\ln\left(3+\sqrt{8}\right)}}{2}=\frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(3+\sqrt{8}\right)^{-\frac{1}{3}}}{2}\approx 1{,}17765.$$

При $k=1$ получаем

$$z_{2,3}=\cos\left[\frac{2\pi}{3}\pm\frac{i}{3}\ln\left(3+\sqrt{8}\right)\right]=\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\operatorname{ch}\left[\frac{1}{3}\ln\left(3+\sqrt{8}\right)\right]\mp$$

$$\mp i\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\operatorname{sh}\left[\frac{1}{3}\ln\left(3+\sqrt{8}\right)\right]=-\frac{1}{2}z_1\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{z_1^2-1}\approx -0{,}58882\pm i\cdot 0{,}53865.$$

При этом мы отделили действительную и мнимую части косинуса и заменили гиперболический синус через гиперболический косинус. Заметим, что два последних корня можно было бы получить быстрее, если воспользоваться формулой (35), взяв $\rho=-\frac{3}{4}$.

3) Данное уравнение имеет вид (24) с $m=5$. Его корни определяются формулой (26)

$$z=\operatorname{sh}\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arsh}5\right).$$

По формуле (20) найдем одно из значений

$$\operatorname{arsh} 5 = \ln(5+\sqrt{26}).$$

Имеем

$$z_1 = \operatorname{sh}\left[\tfrac{1}{3}\ln(5+\sqrt{26})\right] = \frac{e^{\frac{1}{3}\ln(5+\sqrt{26})} - e^{-\frac{1}{3}\ln(5+\sqrt{26})}}{2} =$$

$$= \frac{(5+\sqrt{26})^{\frac{1}{3}} - (5+\sqrt{26})^{-\frac{1}{3}}}{2} \approx 0,84944.$$

Остальные два корня найдем по формуле (35), заменяя в ней y на z и взяв $\rho = \frac{3}{4}$

$$z_{2,3} = \frac{-z_1 \pm i\sqrt{3(1+z_1^2)}}{2} \approx -0,42472 \pm i\cdot 1,13629.$$

4) Разделив обе части уравнения на коэффициент при y^3, равный 5, получим уравнение вида (27), в котором $\rho=-3$, $q=-0,4$. Так как коэффициент $\rho<0$, то выберем множитель l по формуле (30)

$$l = \sqrt{\left(-\tfrac{4}{3}\right)\cdot(-3)} = 2$$

(достаточно взять одно значение корня).
Тогда по формуле (31)

$$m = -\frac{4\cdot(-0,4)}{8} = 0,2,$$

и корни заданного уравнения определяются формулой (32)

$$y = 2\cos\left(\tfrac{1}{3}\arccos 0,2\right).$$

Так как $\operatorname{Arccos} 0,2 = 2k\pi \pm \arccos 0,2$, то имеем

$$y_1 = 2\cos\left(\tfrac{1}{3}\arccos 0,2\right) \approx 1,79522;$$

$$y_2 = 2\cos\left[\tfrac{1}{3}(2\pi - \arccos 0,2)\right] \approx -0,13414;$$

$$y_3 = 2\cos\left[\tfrac{1}{3}(2\pi + \arccos 0,2)\right] \approx -1,66108.$$

5) В этом уравнении $\rho=1$, $q=4$. По формулам (33), (31), (34) имеем

$$l = \sqrt{\tfrac{4}{3}\cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad m = -\frac{4\cdot 4\cdot 3\sqrt{3}}{8} = -6\sqrt{3};$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sh}\left[\tfrac{1}{3}\operatorname{Arsh}(-6\sqrt{3})\right].$$

По формуле (20) найдем главное значение гиперболического арксинуса:

$$\operatorname{arsh}(-6\sqrt{3}) = \ln(-6\sqrt{3}+\sqrt{109}).$$

Тогда, учитывая определение гиперболического синуса [формула (10)], имеем

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[e^{\frac{1}{3}\ln(-6\sqrt{3}+\sqrt{109})} - e^{-\frac{1}{3}\ln(-6\sqrt{3}+\sqrt{109})}\right] =$$

$$= \frac{(-6\sqrt{3}+\sqrt{109})^{\frac{1}{3}} - (-6\sqrt{3}+\sqrt{109})^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}} \approx -1,37880.$$

По формуле (35) найдем оставшиеся два корня уравнения

$$y_{2,3} = \frac{-y_1 \pm i\sqrt{4+3y_1^2}}{2} \approx 0,68940 \pm i\cdot 1,55750.$$

6) В этом уравнении имеется комплексный коэффициент. Сравнивая с (27), имеем

$$\rho=-3, \quad q = -\frac{3+i}{2}.$$

Согласно (30), выбираем $l=2$, из (31) имеем $m = \frac{3+i}{4}$

и по (32) все корни уравнения определяются формулой

$$y = 2\cos\left[\tfrac{1}{3}\operatorname{Arccos}\left(\tfrac{3+i}{4}\right)\right].$$

По формуле (19)

$$\operatorname{Arccos}\left(\frac{3+i}{4}\right) = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{3+i}{4} \pm \frac{\sqrt{-8+6i}}{4}\right).$$

Замечая, что $-8+6i = (1+3i)^2$, или пользуясь результатом задачи 18 и выбирая для простоты только один знак перед корнем, будем иметь частные значения

$$\operatorname{Arccos}\left(\frac{3+i}{4}\right) = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{3+i}{4} + \frac{1+3i}{4}\right) = \frac{1}{i}\ln(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i\ln\sqrt{2}.$$

При $k=0$ имеем

$$y_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{i}{6}\ln 2\right) = 2\left[\cos\frac{\pi}{12}\cdot\operatorname{ch}\left(\frac{1}{6}\ln 2\right) + i\sin\frac{\pi}{12}\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{1}{6}\ln 2\right)\right] \approx$$

$$\approx 1,94476 + i\cdot 0,05993.$$

При $k=1$ имеем

$$y_2 = 2\cos\left(\frac{7}{12}\pi - \frac{i}{6}\ln 2\right) = 2\left[\cos\frac{7}{12}\pi\cdot\operatorname{ch}\left(\frac{1}{6}\ln 2\right) + i\sin\frac{7}{12}\pi\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{1}{6}\ln 2\right)\right] \approx$$

$$\approx -1,42394 + i\cdot 0,16374.$$

И, наконец, при $k=2$

$$y_3 = 2\cos\left(\frac{17}{12}\pi - \frac{i}{6}\ln 2\right) = 2\left[\cos\frac{17}{12}\pi\cdot\operatorname{ch}\left(\frac{1}{6}\ln 2\right) + i\sin\frac{17}{12}\pi\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{1}{6}\ln 2\right)\right] \approx$$

$$\approx -0,52110 - i\cdot 0,22366.$$

7) Перепишем уравнение в виде

$$x^3 + 3x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{11}{16} = 0.$$

Сравнивая с (36), имеем $a=3$. Согласно (37), делаем замену

$$x = y - 1.$$

Получается уравнение вида (27)

$$y^3 - \frac{27}{8}y + \frac{27}{16} = 0,$$

причем

$$p = -\frac{27}{8}, \quad q = \frac{27}{16}.$$

Согласно (30)-(32) имеем

$$l = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad m = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$y = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\left[\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\left[\frac{1}{3}\left(2k\pi \pm \frac{3}{4}\pi\right)\right].$$

Таким образом

$$x_1 = y_1 - 1 = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = 0,5 \quad (k=0);$$

$$x_2 = y_2 - 1 = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\frac{5}{12}\pi - 1 = \frac{3\sqrt{3}-7}{4} \approx -0,45096 \quad (k=1, \text{знак}"-");$$

$$x_3 = y_3 - 1 = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\frac{11}{12}\pi - 1 = -\frac{3\sqrt{3}+7}{4} \approx -3,04904 \quad (k=1, \text{знак}"+");$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

I20. Найти действительные и мнимые части следующих комплексных чисел и функций:

I) $e^{4-\pi i}$; 2) $e^{1-\frac{3}{2}\pi i}$; 3) $e^{6+\frac{2\pi i}{5}}$; 4) e^{2+5i};

5) e^{-iz}; 6) e^{z^4}; 7) $e^{\frac{i}{z}}$; 8) $e^{-e^{2iz}}$;

9) $\cos(-\pi+3i)$; I0) $ch(1-4i)$; II) $tg\left(\frac{\pi}{6}+i\ln 2\right)$;

I2) $cth(-2+6i)$; I3) $tg\,z$.

I2I. Исходя из определения тригонометрических функций, доказать следующие формулы и получить аналогичные формулы для гиперболических функций:

I) $\cos(-z)=\cos z$; 2) $\sin(-z)=-\sin z$;

3) $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cdot\cos z_2+\cos z_1\cdot\sin z_2$;

4) $\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z$; 5) $\cos z_1+\cos z_2=2\cos\frac{z_1+z_2}{2}\cos\frac{z_1-z_2}{2}$;

6) $tg(z_1+z_2)=\dfrac{tg\,z_1+tg\,z_2}{1-tg\,z_1\cdot tg\,z_2}$.

I22. При каких значениях z следующие функции принимают чисто мнимые значения:

I) $\cos z$; 2) $sh\,z$; 3) $cth\,z$; 4) $th(3z-6+2i)$.

I23. Доказать, что

I) $|sh\,z|=\sqrt{sh^2x+\sin^2y}$; 2) $|\cos z|=\sqrt{\cos^2x+sh^2y}$;

3) $|tg\,z|=\dfrac{\sqrt{\sin^2 2x+sh^2 2y}}{\cos 2x+ch\,2y}$; 4) $|cth\,z|=\dfrac{\sqrt{sh^2 2x+\sin^2 2y}}{ch\,2y+\cos 2x}$.

I24. Найти все точки, в которых обращаются в нуль следующие функции:

I) $\sin z$; 2) $ch\,z$; 3) $ctg\,z$; 4) $th\,z$.

I25. Вычислить

I) $Ln(-1+i)$; 2) $Ln(1-i\sqrt{3})$; 3) $Ln\dfrac{\sqrt{3}-i}{i(1+i)^3}$;

4) $Ln(1-e^{-i\alpha})$, $0<\alpha<2\pi$; 5) 1^{-i}; 6) $(1-i)^{1+i}$;

7) $(\sqrt{3}+i)^{2-3i}$.

I26. Найти все корни следующих уравнений:

I) $\cos z=\frac{3}{4}i$; 2) $\sin z=i$; 3) $cth\,z=3$;

4) $ch\,z-sh\,z=1$; 5) $\sin z+\cos z=2i$; 6) $3ch\,z+2sh\,z=2$.

I27. Доказать равенства:

I) $Arc\sin z=-i\,Ln\left[i\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right)\right]$;

2) $Arc\,tg\,z=\frac{i}{2}Ln\frac{i+z}{i-z}$;

3) $Arc\,ctg\,z=\frac{i}{2}Ln\frac{z-i}{z+i}$;

4) $Ar\,ch\,z=Ln\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right)$;

5) $Ar\,th\,z=\frac{1}{2}Ln\frac{1+z}{1-z}$;

6) $Ar\,cth\,z=\frac{1}{2}Ln\frac{z+1}{z-1}$.

128. Найти все корни следующих кубических уравнений:

1) $4z^3-3z=\frac{1}{4}$; 2) $4z^3-3z=5$; 3) $12z^3+8z+1=0$;

4) $100y^3-21y-2=0$; 5) $y^3-3y-110=0$; 6) $32y^3-54y+27=0$;

7) $24x^3-72x^2+66x-17=0$.

ОТВЕТЫ.

ГЛАВА I

25. 1) $-1+i$; 2) $2-4i$; 3) $-13+11i$; 4) 58; 5) $-5-12i$; 6) $52-42i$; 7) 1.

26. 1) $2\pm3i$; $(2\pm3i)^2-4(2\pm3i)+13=0$; 2) $-3\pm5i$;
3) $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\pm2-4i$; 5) $\pm\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i$.

27. 1) $\frac{17}{29}+\frac{1}{29}i$; 2) $-i$; 3) $5-i$; 4) $2+7i$.

28. 1) $\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$; 2) $\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$. Можно ли было предвидеть, что получатся сопряженные результаты?

29 1) 1; 2) -1; 3) $-i$; 4) $-\sqrt{3}-i$; 5) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

30. 1) $2e^{\frac{\pi i}{2}}$; 2) $3e^{\pi i}$; 3) $5e^{(\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3})i}$; 4) $2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}$, $-\pi<\alpha<\pi$;
5) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot e^{\frac{\alpha-\pi}{2}i}$, $0<\alpha<2\pi$; 6) $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}e^{\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}i}$, $0<\alpha-\beta<2\pi$;
7) 1024; 8) $e^{\frac{8}{3}\pi i}$.

31. 1) -63; 2) $-\sqrt{3}+i$.

32. 1) 0; 2) 0; 3) $-2\pm12i$.

34. 1) 0; 2) $1-i\sqrt{3}$.

35. 1) $1-i$; 2) $-1-i$; 3) $\pm1, \pm i, 0$; 4) $0, \pm i$.

36. -1.

40. В левой части расписать квадраты модулей по формуле $|z|^2=z\cdot\bar{z}$.

44. $z_1-z_2+z_3$.

46. 1) $e^{\frac{2k\pi i}{6}}$; 2) $\sqrt{2}\,e^{\frac{(2k+1)\pi i}{6}}$; 3) $\sqrt[5]{5}\cdot e^{\frac{(2k+1)\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{5}i}$; 4) $\pm(2+i)$;
5) $\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{3}(2k+\frac{1}{2})\pi i}$; 6) $e^{\frac{1}{5}(\frac{\pi}{2}+2k)\pi i}$; 7) $2\sqrt[6]{18}\cdot e^{(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})i}$; 8) $\sqrt[24]{2}\,e^{\frac{12k+1}{60}\pi i}$.

47. 3 – при $n=3k$, 0 – при $n=3k\pm1$.

48. 1) $z_1=1+i$, $z_2=\frac{3}{2}(1-i)$; 2) $z_1=1+i$, $z_2=\frac{1}{2}(1-3i)$; 3) $z_1=-1$, $z_2=-1+2i$;
4) $\frac{1}{2}(\pm1\pm i\sqrt{3})$; 5) i, $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}-i)$.

50. $z_3=z_2+(z_2-z_1)e^{\pm\frac{2\pi i}{n}}$.

52. 1) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;
2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

53. 1) $\sin^4\varphi=\frac{1}{8}(\cos4\varphi-4\cos2\varphi+3)$; 2) $\sin^6\varphi=-\frac{1}{32}(\cos6\varphi-6\cos4\varphi+15\cos2\varphi-10)$;
3) $\cos^5\varphi=\frac{1}{16}(\cos5\varphi+5\cos3\varphi+10\cos\varphi)$;
4) $\cos^{10}\varphi=\frac{1}{512}(\cos10\varphi+10\cos8\varphi+45\cos6\varphi+120\cos4\varphi+210\cos2\varphi+126)$.

54. 1) $\cos4\varphi=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi+\sin^4\varphi=1-8\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi$,
$\sin4\varphi=4\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi-4\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi$;
2) $\cos7\varphi=\cos^7\varphi-21\cos^5\varphi\cdot\sin^2\varphi+35\cos^3\varphi\cdot\sin^4\varphi-7\cos\varphi\cdot\sin^6\varphi$,
$\sin7\varphi=7\cos^6\varphi\cdot\sin\varphi-35\cos^4\varphi\cdot\sin^3\varphi+21\cos^2\varphi\cdot\sin^5\varphi-\sin^7\varphi$.

ГЛАВА II

60. Левая полуокружность радиуса a с центром в точке $z_0=0$.
61. Окружность радиуса 3 с центром в точке $z_0=i$.
62. Эллипс $4x^2+y^2=1$.
63. Отрезок прямой от точки $z=1$ до точки $z=1+i$.
64. Верхняя полуокружность радиуса 1 с центром в точке $z_0=0$.
65. Четверть дуги окружности радиуса 1 с центром в точке $z_0=0$, от точки $z=1$ до точки $z=i$.
66. Циклоида $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.
67. Первая (считая от начала координат) дуга удлиненной циклоиды $x=t-2\sin t$, $y=1-2\cos t$.

68. Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$.
69. Точки плоскости z, лежащие на прямой $y=2$ и ниже ее.
70. Полуплоскость, расположенная справа от прямой $x=-1$.
71. Прямая $x-2y=3$.
72. Прямая $3x+4y=5$.
73. Прямая $y-x+1=0$.
74. Точки плоскости z, лежащей между прямыми $x=-3$ и $x=3$ (вертикальная полоса).
75. Точки плоскости z, лежащие между прямыми $y=-3$ и $y=1$ (горизонтальная полоса).
76. Точки плоскости z, расположенные на окружности $x^2+y^2=1$ и вне ее.
77. Точки плоскости z, расположенные внутри круга радиуса 2 с центром в точке $z_0=i$.
78. Окружность радиуса 5 с центром в точке $z_0=-3+4i$.
79. Внутренность кольца, ограниченного окружностями радиусов 1 и 4 с центром в точке $z_0=-2$.
80. Внутренность угла, ограниченного лучами, выходящими из начала координат и составляющими с положительным направлением действительной оси OX углы $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$.
81. Четверть плоскости, ограниченная лучами $y=0$, $x>-1$ и $x=-1$, $y>0$.
82. Гипербола $x^2-y^2=4$.
83. Гипербола $xy=2$.
84. Эллипс с фокусами в точках ±1 и большой осью $2a=5$.
85. Внутренность эллипса с фокусами в точках $z_1=-i$ и $z_2=0$ и осью $2a=3$.
86. Левая ветвь гиперболы с фокусами в точках ±5 и осью $2a=6$.
87. Нижняя ветвь гиперболы $y^2-x^2=\frac{1}{2}$ и ее внутренность.
88. Прямая $x=0$ и окружность $x^2+y^2=1$.

89. Гипербола $x^2-y^2=\frac{1}{2}$.

90. Прямая $x=-1$.

91. Прямая $x+y=0$.

92. Полуплоскость $x>0$.

93. Лемниската $z^2=2\cos 2\varphi$.(Удобно z записать в показательной форме).

94. Две окружности с центрами в точках $\pm i$ радиусами $\sqrt{2}$. (Уравнение четвертого порядка распадается на два уравнения второго порядка $\left[x^2+(y-1)^2-2\right]\cdot\left[x^2+(y+1)^2-2\right]=0$.

95. Мнимая ось OY и семейство окружностей с центрами на прямой $y=1$, проходящих через точку $z=i$.

96. Вертикальная прямая $x=-2$ и семейство окружностей с центрами на действительной оси, проходящих через точку $z=-2$.

97. Прямая $x+y+1=0$ и семейство окружностей с центрами на прямой $y=x+1$, проходящих через точку $z=-1$.

98. Прямая $6x+8y-7=0$ при $\lambda=1$ и семейство окружностей Аполлония $\left(x-\frac{3}{\lambda^2-1}\right)^2+\left(y-4-\frac{4}{\lambda^2-1}\right)^2=\left(\frac{5\lambda}{\lambda^2-1}\right)^2$ с центрами на прямой $3y-4x-12=0$, проходящей через точки $z_1=-3$, $z_2=4i$.

99. Полуплоскость $x+y+1>0$ с выброшенным кругом $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}$.

100. Плоскость z с выброшенными кругами $(x-2)^2+(y+1)^2\le 5$ и $(x-6)^2+(y-1)^2\le 5$.

101. Полуплоскость $y-2x+2>0$ с выброшенным кругом.

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{4}\right)^2\le\frac{5}{16}.$$

102. Полуплоскость $3y+2x+1>0$ с выброшенным кругом

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2\le\frac{13}{4}.$$

103. Полуплоскость $2x+4y-3<0$ с выброшенным кругом

$$\left(x+\frac{9}{8}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2\le\frac{45}{64}.$$

104. Полуплоскость $y>1$ с выброшенным кругом $x^2+\left(y-\frac{13}{3}\right)^2\le\frac{64}{9}$.

105. Кольцо, ограниченное окружностями $\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+y^2=\frac{64}{9}$ и $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$.

106. Плоскость с выброшенными кругами $x^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2\le\frac{4}{9}$ и $x^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2\le\frac{4}{9}$.

107. Верхняя полуплоскость $y>0$ с выброшенной частью круга с центром в точке $-1+i$ радиуса $\sqrt{2}$.

108. Круговая луночка, лежащая в верхней полуплоскости, ограниченная окружностями с центрами в точках $-1+3i$ и $-1+i\sqrt{3}$ радиусами $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$.

109. Круговая луночка, лежащая в левой полуплоскости, ограниченная окружностями с центрами в точках $-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\frac{1}{2}(1+i)$ радиусами $\sqrt{5}$ и $\sqrt{2{,}5}$.

110. Часть комплексной плоскости, расположенная вне кругов с центрами в точках $-2-i$ и $-i$ радиусами $2\sqrt{2}$ и 2 .

111. Внешность круга с центром в точке $-2-2i$ радиуса $2\sqrt{2}$

ГЛАВА III

120. 1) $u=-e^{-4}$, $v=0$; 2) $u=0$, $v=e$; 3) $u=-\frac{1}{2}e^6$, $v=\frac{\sqrt{3}}{2}e^6$;

4) $u=e^2\cos 5$, $v=e^2\sin 5$; 5) $u=e^y\cos x$, $v=-e^y\sin x$;

6) $u=e^{x^4\cos 4\varphi}\cdot\cos(x^4\sin 4\varphi)$; $v=e^{x^4\cos 4\varphi}\cdot\sin(x^4\sin 4\varphi)$;

7) $u=e^{\frac{\cos\varphi}{r}}\cdot\cos\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right)=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cdot\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$,

$v=-e^{\frac{\cos\varphi}{r}}\cdot\sin\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right)=-e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cdot\sin\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$;

8) $u = e^{-e^{-2y}\cos 2x} \cdot \cos\left(e^{-2y}\sin 2x\right)$, $v = -e^{-e^{-2y}\cos 2x} \cdot \sin\left(e^{-2y}\sin 2x\right)$;

9) $u = -\operatorname{ch} 3$, $v = 0$; 10) $u = \cos 4 \cdot \operatorname{ch} 1$, $v = -\sin 4 \cdot \operatorname{sh} 1$;

11) $u = \frac{4\sqrt{3}}{21}$, $v = \frac{15}{21}$; 12) $u = \frac{\operatorname{sh} 4}{\cos 12 - \operatorname{ch} 4}$, $v = \frac{\sin 12}{\cos 12 - \operatorname{ch} 4}$;

13) $u = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$, $v = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$.

I22.

1) $z = \frac{\pi}{2} + k\pi + iy$; 2) $z = iy$, $z = x + i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$; 3) $z = iy$; 4) $z = 2 + iy$.

I24.

1) $z = k\pi$; 2) $z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)i$; 3) $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$; 4) $z = k\pi i$.

I25. 1) $\ln\sqrt{2} + \left(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi\right)i$; 2) $\ln 2 + \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i$; 3) $-\ln\sqrt{2} + \left(-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi\right)i$;

4) $\ln\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{\pi - \alpha}{2} + 2k\pi\right)i$; 5) $e^{2k\pi}$; 6) $\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi} \cdot e^{i\left(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$;

7) $4e^{\frac{\pi}{2} + 6k\pi} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3} - 3\ln 2\right)}$.

I26.

1) $2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - i\ln 2\right)$; 2) $k\pi + i \cdot (-1)^k \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$; 3) $\ln\sqrt{2} + k\pi i$;

4) $2k\pi i$; 5) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \pm \left[\frac{\pi}{2} - i\ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right]$; 6) $-\ln\sqrt{5} \pm i\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2} + 2k\pi\right)$.

I28.

1) $z = \cos\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}\frac{1}{4}\right)$; $z_1 \approx 0{,}90502$; $z_2 \approx -0{,}08413$; $z_3 \approx -0{,}82089$;

2) $z = \cos\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arccos} 5\right)$; $z_1 \approx 1{,}30644$; $z_{2,3} \approx -0{,}65322 \pm i \cdot 0{,}72807$;

3) $z = \operatorname{sh}\left[\frac{1}{3}\operatorname{Arsh}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$; $z_1 \approx -0{,}10937$; $z_{2,3} \approx 0{,}05468 \pm i \cdot 0{,}87119$;

4) $y = \sqrt{0{,}28}\cos\left[\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}\frac{0{,}08}{\sqrt{0{,}28^3}}\right]$; $y_1 = 0{,}5$; $y_2 = -0{,}1$; $y_3 = -0{,}4$;

5) $y = 2\cos\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arccos} 55\right)$; $y_1 = 5$; $y_{2,3} \approx -2{,}5 \pm i \cdot 3{,}96863$;

6) $y = \frac{3}{2}\cos\left[\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}(-1)\right]$; $y_{1,2} = 0{,}75$; $y_3 = -1{,}5$;

7) $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$; $x_1 \approx 1{,}37111$; $x_2 \approx 1{,}19746$; $x_3 \approx 0{,}43142$.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие 3
Введение 4
Глава I. Комплексные числа и действия над ними 5
Глава II. Кривые и области в комплексной плоскости .. 26
Глава III. Основные трансцендентные функции комплексного переменного 40
Ответы 67