

Министерство образования и науки Российской Федерации
Национальный исследовательский
Томский государственный университет

Л.Л. Миньков, Э.Р. Шрагер

**ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ЧИСЛЕННОМУ
РЕШЕНИЮ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ
ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ**

Учебное пособие

Scientific & Technical Translations



ИЗДАТЕЛЬСТВО

Томск – 2016

УДК 519.63 (075.8)

ББК 22.193

М62

М78 **Миньков Л.Л., Шрагер Э.Р.** Основные подходы к численному решению одномерных уравнений газовой динамики : учеб. пособие. – Томск : STT, 2016. – 136 с.

ISBN 978-5-93629-561-4

В учебном пособии представлены численные методы решения одномерного уравнения адвекции и одномерных нестационарных уравнений газовой динамики. Описываются разностные схемы и демонстрируются методы анализа их устойчивости. Приведена программа численного решения задачи Коши для уравнений газовой динамики. Учебное пособие составлено для магистрантов, изучающих курс «Вычислительная гидродинамика. Ч.1» по программе подготовки магистров по направлениям 16.04.01 – Техническая физика, 24.04.03 – Баллистика и гидроаэродинамика на физико-техническом факультете ТГУ.

УДК 519.63 (075.8)

ББК 22.193

Учебное пособие разработано при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 10.1329.2014/К.

Рецензенты:

- Васенин И.М. – докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета;
- Борисов Б.В. – докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической и промышленной теплотехники Томского политехнического университета.

ISBN 978-5-93629-561-4

© Л.Л. Миньков, Э.Р. Шрагер, 2016

© Томский государственный университет, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.....	7
1.1. Понятие метода конечных разностей.....	7
1.2. Метод конечных разностей.....	7
2. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.....	11
2.1. Погрешность аппроксимации.....	11
2.2. Согласованность разностных схем.....	13
2.3. Устойчивость разностных схем.....	13
2.4. Сходимость решения маршевых задач.....	14
2.5. Погрешность округления.....	14
3. УСТОЙЧИВОСТЬ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ.....	15
3.1. Метод Фурье или метод Неймана.....	16
3.2. Смысл условия Куранта-Фридрихса-Леви.....	19
3.3. Анализ устойчивости систем уравнений в частных производных.....	22
3.4. Дифференциальное приближение разностной схемы.....	23
3.4.1. Противопоточная разностная схема.....	23
3.4.2. Схема Лакса.....	30
3.4.3. Метод Лакса – Вендроффа.....	31
3.4.4. Двухшаговый метод Лакса – Вендроффа.....	33
3.4.5. Метод МакКормака.....	33
3.4.6. Разности против потока.....	34
4. ПОНЯТИЕ О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ РАСЧЕТА ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ.....	36
4.1. Обобщенное решение.....	36
4.1.1. Механизм возникновения разрывов.....	37
4.1.2. Определение обобщенного решения.....	39
4.1.3. Условие на линии разрыва решения.....	39
4.1.4. Распад произвольного разрыва.....	42
4.1.5. Другое определение обобщенного решения.....	44
4.2. Построение разностных схем для разрывных решений.....	44
4.2.1. Схема с искусственной вязкостью.....	45
4.2.2. Метод характеристик.....	46
4.2.3. Дивергентные разностные схемы.....	48
5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И ЕЕ СВОЙСТВА.....	51

5.1. Решение уравнений газовой динамики методом характеристик.....	54
5.2. Реализация граничных условий для метода характеристик.....	58
6. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ТИПА СХЕМЫ С.К.ГОДУНОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА.....	61
6.1. Общие положения.....	61
6.2. Нахождение потков по методу С.К.Годунова.....	63
6.3. Реализация граничных условий для метода С.К.Годунова....	70
6.4. Нахождение потков по методу Роу.....	72
6.5. Нахождение потков по методу Стегера-Уорминга.....	73
6.6. Нахождение потков по методу ван Лира.....	74
6.7. Нахождение потков по методу Лиу-Стеффана.....	76
6.8. Метод полиномиального представления матрицы численной вязкости.....	77
6.8.1. Расщепление приращения вектора потока.....	78
6.8.2. Расщепление вектора потока.....	80
7. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ.....	81
7.1. Немонотонные разностные схемы.....	82
7.1.1. Разностная схема Лакса-Вендроффа.....	82
7.1.2. Разностная схема МакКормака.....	84
7.2. Квазимонотонные разностные TVD схемы.....	85
7.2.1. Схема Колгана.....	85
7.2.2. Схема ван Лира.....	87
7.2.3. Схема Чакраварти-Ошера.....	88
7.3. Квазимонотонные разностные ENO-схемы.....	91
7.3.1. Одномерная ENO реконструкция и аппроксимация.....	91
7.3.2. Примеры ENO схем второго порядка аппроксимации	96
8. ПРОГРАММА РАСЧЕТА УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ.....	99
8.1. Описание программы расчета уравнений газовой динамики..	99
8.2. Описание переменных.....	100
8.3. Программа для точного расчета задачи Сода.....	104
ЛИТЕРАТУРА.....	110
ТЕСТЫ ДЛЯ САМОКОНТОРЛЯ.....	112

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость решения уравнений газовой динамики возникает при рассмотрении вопросов, связанных с формированием и распространением ударных волн в газах, течением газа в соплах или решетках турбин, обтеканием тел при их движении в атмосфере, взаимодействием ударных волн с преградами, истечением перерасширенных или недорасширенных струй из сопел ракетных двигателей и т.д., в общем, тогда, когда силами вязкости можно пренебречь по сравнению с силами инерции, а сжимаемость газа при этом существенна.

В силу того, что система газодинамических уравнений является квазилинейной, зачастую не удается получить аналитического решения, поэтому прибегают к численным методам их интегрирования. За последние 50 лет в России и за рубежом разработано большое количество разностных схем, позволяющих решать уравнения во всей области определения, не прибегая к специальной процедуре выделения особенностей (разрывов решения). С помощью таких схем было решено множество сложных задач газовой динамики.

Умение выбирать подходящую разностную схему для той или иной задачи определяет сложность алгоритма решения, время процессора, затрачиваемое на получение решения, и в конечном итоге точность результата.

Пособие состоит из восьми разделов.

В первом разделе кратко излагаются основы метода конечных разностей, во втором – дается понятие аппроксимации производных, вводятся основные понятия теории разностных схем, в третьем – рассматриваются вопросы устойчивости разностных схем для уравнения адвекции, в четвертом – обсуждаются разностные схемы для получения обобщенных решений.

В пятом разделе излагаются основные свойства системы одномерных нестационарных уравнений газовой динамики. Здесь вводится понятие характеристик, консервативных и Римановых переменных, матрицы преобразования подобия.

В шестом разделе рассматриваются монотонные консервативные схемы первого порядка аппроксимации, построенные по типу схемы Годунова С.К.

Седьмой раздел посвящен схемам повышенного порядка аппроксимации, излагаются принципы монотонизации схем.

В восьмом разделе приводится описание программы для решения уравнений газодинамики и точного решения задачи Сода.

Данное пособие предназначено для студентов, слушающих курс лекций по численным методам решения уравнений газовой динамики. Пособие будет полезно также аспирантам, специализирующимся в области механики жидкости, газа и плазмы.

1. ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

1.1. Понятие метода конечных разностей

Основой метода конечных разностей, применяемых при решении уравнений в частных производных, является дискретизация – замена непрерывной области совокупностью изолированных точек (сеткой), причем решение уравнений ищется лишь в этих точках (узлах сетки). Производные заменяются (аппроксимируются) конечными разностями, и решение уравнения в частных производных сводится к решению системы алгебраических уравнений. Основные особенности получающейся системы алгебраических уравнений определяются типом исходного уравнения в частных производных (или системы уравнений в частных производных). Нестационарные (маршевые) задачи часто сводятся к алгебраическим уравнениям, которые можно решать последовательно (хотя часто удобнее одновременно решать несколько уравнений). В этой главе рассматривается также вопрос о том, сколь точно решение разностных уравнений приближается к решению исходной задачи. Для этого анализируется погрешность аппроксимаций, устойчивость и согласованность разностных схем.

1.2. Метод конечных разностей

Для того чтобы лучше понять идею конечно-разностной аппроксимации производных, вспомним определение производной от функции $u(t, x)$ в точке (t, x) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} \quad (1.1)$$

Если функция $u(t, x)$ непрерывна, а Δx — достаточно мало, то значение разности $[u(t, x + \Delta x) - u(t, x)]/\Delta x$ будет близко к значению производной $\partial u/\partial x$. Формально проверить точность разностной аппроксимации производной можно, разложив функцию $u(t, x + \Delta x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (t, x) :

$$\begin{aligned}
 u(t, x + \Delta x) = u(t, x) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(t,x)} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(t,x)} + \\
 + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \Big|_{(t,x)} + \dots
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $x \leq \xi \leq x + \Delta x$. Из (1.2) следует формула «правых» разностей:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(t,x)} = \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(t,x)} + \dots \tag{1.3}$$

Можно построить бесконечно много конечно-разностных аппроксимаций производной $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(t,x)}$. Например, из разложения функции $u(t, x - \Delta x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (t, x) :

$$\begin{aligned}
 u(t, x - \Delta x) = u(t, x) - \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(t,x)} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(t,x)} + \\
 + \dots + \frac{(-\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \Big|_{(t,x)} + \dots
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

получается формула «левых» разностей:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(t,x)} = \frac{u(t, x) - u(t, x - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(t,x)} + \dots \tag{1.5}$$

Складывая (3) и (5) получим формулу центральных разностей:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(t,x)} = \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{(t,x)} + \dots \tag{1.6}$$

В правых частях выражений (1.3), (1.5), (1.6) первое слагаемое называется разностным аналогом производной, а остальные слагаемые — погрешностью аппроксимации производной. Степень приращения Δx в первом слагаемом погрешности называется по-

рядком аппроксимации производной.

Одним из первых шагов при применении метода конечных разностей к решению уравнения в частных производных является переход от непрерывной области к конечно-разностной сетке. Пусть, например, надо найти решение $u(t,x)$ уравнения в частных производных в прямоугольной области $a \leq x \leq b$, $0 \leq t \leq T$. Введем сетку (рис. 1), т.е. набор точек, координаты которых определяются по правилу: $x_j = a + j\Delta x$; $t_n = n\Delta t$, где j и n – целые числа.

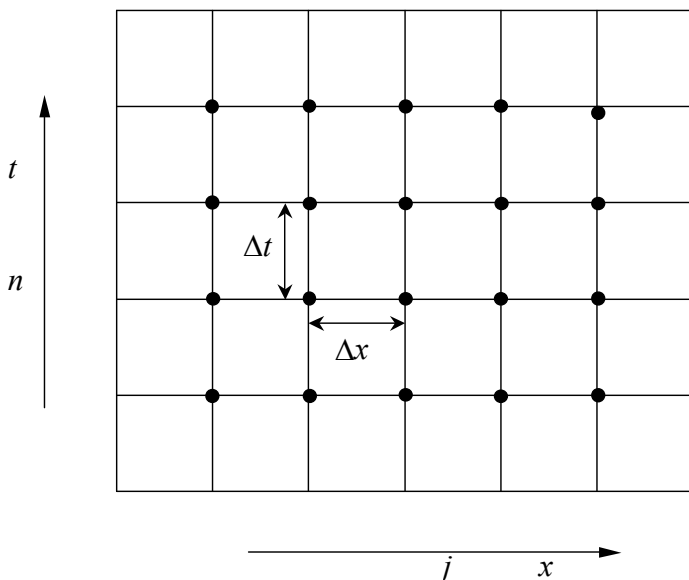


Рис. 1. Пример конечно-разностной сетки

Положение точек (узлов сетки) внутри области определяется значениями величин j и n , поэтому разностные уравнения обычно записываются для произвольного узла (j, n) . Будем рассматривать не $u(t,x)$, а $u(t_n, x_j)$ или для краткости записи – u_j^n . Согласно этим обозначениям выражения (1.3), (1.5) и (1.6) переписутся в виде:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j,n} &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x); & \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j,n} &= \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x); \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j,n} &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Представление погрешности аппроксимации в виде $O(\Delta x)^n$ означает, что погрешность аппроксимации по абсолютной величине не превосходит $K|\Delta x|^n$ при $\Delta x \rightarrow 0$, причем $K > 0$ – вещественная константа.

Аналогично можно записать производные по переменной t :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{j,n} &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t); & \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{j,n} &= \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t); \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{j,n} &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Для каждого уравнения в частных производных существует множество его конечно-разностных аналогов, из которых обычно нельзя выбрать наилучший со всех точек зрения. В первую очередь при использовании метода конечных разностей надо стремиться к правильной аппроксимации уравнений поставленной задачи, а во вторую очередь выбрать «наилучшую» схему, т. е. оптимизировать ее, учитывая ее точность, экономичность, удобство программной реализации на ЭВМ и т. д.

2. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

2.1. Погрешность аппроксимации

Проведем анализ погрешности аппроксимации на примере уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0 \quad (2.1)$$

Используя «правые» разности для аппроксимации производной по времени и «левые» разности для аппроксимации производной по пространству, получим следующую аппроксимацию дифференциального оператора в уравнении переноса:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x}}_I = \underbrace{\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)}_{II} + \underbrace{\left[-\frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(j,n)} + a \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(j,n)} + \dots \right]}_{III} \quad (2.2)$$

Здесь цифрами I, II, III обозначены исходное уравнение в частных производных, его конечно-разностный аналог и погрешность аппроксимации. Вместо дифференциального уравнения (2.1) будем рассматривать его конечно-разностный аналог

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) = 0, \quad (2.3)$$

который представляет собой систему алгебраических уравнений, в результате решения которой получим множество значений $\{u_j^n\}$, которые называют *сеточной функцией*.

Систему конечно-разностных уравнений (2.3) будем называть *явной схемой*, если аппроксимация производной по переменной x выполнена на n -ом временном шаге. В этом случае в каждое алгебраическое уравнение будет входить лишь одно неизвестное

u_j^{n+1} , которое с помощью этого уравнения может быть выражено через уже известные величины. Так как уравнение переноса решает маршевую задачу, то начальное распределение u_j^0 должно быть задано, поэтому значения функции u_j^n можно считать известными.

Если для аппроксимации производной по переменной x в уравнении переноса использовать значения функции на $(n + 1)$ -м временном шаге, то в каждое разностное уравнение войдут две неизвестных. Такая схема называется *неявной*, так как одновременно приходится решать несколько алгебраических уравнений.

Совокупность узловых точек разностной сетки, используемых в разностном уравнении называется *шаблоном* разностной схемы.

Так в уравнении (2.3) используется три узловые точки: (j, n) , $(j - 1, n)$, $(j, n + 1)$, и шаблон этой схемы показан на рис. 2. По форме шаблона схему называют «правый уголок» или противопоточной, учитывая тот факт, что на временном слое n направление от точки j к точке $j - 1$ противоположно направлению потока ($a > 0$).

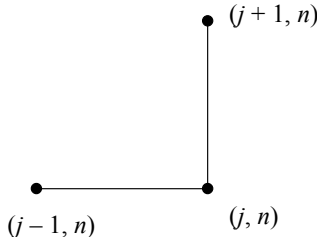


Рис. 2. Шаблон разностной схемы (2.3)

Заключенное в квадратные скобки и обозначенное цифрой III слагаемое в правой части соотношения (2.2) называется *погрешностью аппроксимации* уравнения переноса и определяется как разность между исходным уравнением в частных производных и его конечно-разностным аналогом. Отметим, что при вычислении погрешности использованы лишь первые слагаемые ряда Тейлора. *Порядок* погрешности аппроксимации в этом случае равен $O(\Delta t) + O[(Ax)^2]$, который для краткости записывают в виде $O[\Delta t, (Ax)^2]$.

Применяя численные методы, мы решаем лишь разностные уравнения и надеемся, что погрешность аппроксимации мала. Может быть, на первый взгляд такой подход не вызывает сомнений, но если задуматься, то сразу возникает ряд вопросов. Например, где гарантия, что, решая разностные уравнения маршевым методом, мы получим значения, достаточно близкие к решению исходного уравнения в частных производных? На этот вопрос можно ответить утвердительно, лишь, если разностная схема удовлетворяет условиям *согласованности* и *устойчивости*.

2.2. Согласованность разностных схем

Согласованной называется разностная схема, аппроксимирующая уравнение в частных производных. Напомним, что погрешностью аппроксимации называется разность между дифференциальным уравнением и его конечно-разностным аналогом, поэтому условием согласованности разностной схемы является стремление к нулю погрешности аппроксимации при измельчении сетки. Это условие безусловно выполняется, если погрешность аппроксимации убывает при измельчении сетки, т. е. если погрешность аппроксимации имеет порядок $O(\Delta t)$, $O(\Delta x)$ и т.д. Однако если порядок погрешности аппроксимации равен, например, $O(\Delta t/\Delta x)$, то схема будет согласованной лишь в том случае, когда измельчение сетки проводится в соответствии с условием $\Delta t/\Delta x \rightarrow 0$.

2.3. Устойчивость разностных схем

Разностная схема называется *устойчивой*, если на каждом шаге по маршевой координате любая ошибка (погрешность округления, погрешность аппроксимации, просто ошибка) не возрастает при переходе от одного шага к другому. Методы анализа устойчивости разностных схем мы подробно опишем позже. Большинство этих методов применимо лишь к линейным уравнениям в частных производных, однако полученные для линейных уравнений результаты позволяют анализировать устойчивость численного решения нелинейных уравнений.

Иногда на неустойчивость схемы указывает физическая нере-

альность следующих из нее результатов, т.е. неустойчивая разностная схема неправильно описывает физические процессы.

2.4. Сходимость решения маршевых задач

Выполнения условий устойчивости и согласованности достаточно для сходимости разностной схемы. Под *сходимостью* в данном случае понимается стремление решения конечно-разностного аналога уравнения в частных производных к решению исходного уравнения (для одинаковых начальных и граничных условий) при измельчении сетки. Для линейных уравнений в частных производных доказана теорема Лакса, [1].

***Теорема Лакса об эквивалентности.** Необходимым и достаточным условием сходимости разностной схемы для решения корректно поставленной задачи с начальными данными для линейного уравнения в частных производных является выполнение условий согласованности и устойчивости.*

2.5. Погрешность округления

Любое численно полученное решение, даже так называемое точное аналитическое решение уравнения в частных производных, зависит от ошибок округления, связанных с конечным числом знаков, используемых при арифметических операциях. Возникающая при этом погрешность называется *погрешностью округления*. Она может оказать существенное влияние на решение конечно-разностных уравнений, так как получение этого решения обычно связано с выполнением большого числа однотипных арифметических операций. В ряде случаев погрешность округления пропорциональна числу узлов разностной сетки, поэтому измельчение сетки, снижая погрешность аппроксимации, может увеличивать погрешность округления.

Следовательно, погрешность полученного на ЭВМ решения уравнения в частных производных равна сумме погрешностей аппроксимации и округления. Точность численного решения уравнения в частных производных определяется погрешностью аппроксимации не только самого уравнения, но и граничных условий.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Не любая согласованная конечно-разностная схема обеспечивает сходимость решения конечно-разностных уравнений к решению уравнения в частных производных. В соответствии с теоремой Лакса об эквивалентности (см. п. 2.4) такую сходимость решения обеспечивает лишь устойчивая разностная схема. В этой главе мы подробно рассмотрим теорию устойчивости конечно-разностных схем.

Рассмотрим маршевую задачу. Пусть на n -ом шаге по времени начальные значения известны, а на $(n+1)$ -м шаге по времени значения этих величин надо определить. Теория устойчивости разностных схем изучает способ, которым разностный оператор преобразует начальные значения величин в их значения на следующем шаге по времени, и является центральной проблемой анализа устойчивости.

Начнем изучение устойчивости конечно-разностных схем с анализа простой явной схемы (2.3) для уравнения переноса (2.1), общее решение которого имеет вид $u(x - at) = \text{const}$. Это решение требует, чтобы начальные данные, заданные при $t = 0$, без изменения переносились вдоль характеристик $x = at$.

Разрешив (2.3) относительно u_j^{n+1} , получим:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (3.1)$$

Обозначим буквой D точное решение этого разностного уравнения, т. е. решение, которое мы получили бы на ЭВМ при отсутствии ошибок округления, а буквой N — решение, полученное на реальной ЭВМ. Если A — аналитическое решение исходного уравнения в частных производных, то можно записать

$$\text{Погрешность аппроксимации} = A - D,$$

$$\text{Погрешность округления} = N - D.$$

Устойчивость конечно-разностной схемы определяется изменением погрешности в процессе вычисления. Устойчивость разностных схем можно классифицировать следующим образом:

1. Если полная погрешность округления *растет* (не рас-

тет), то разностная схема называется *сильно неустойчивой* (устойчивой).

2. Если отдельная погрешность округления *растет* (не растет), то разностная схема называется *слабо неустойчивой* (устойчивой).

Обычно изучают лишь слабую устойчивость, так как для ее анализа можно использовать метод *разложения решения в ряд Фурье*, называемый в вычислительной математике *методом Неймана*. При этом предполагают, что если выполнено условие слабой устойчивости, то выполнено и условие сильной устойчивости.

3.1. Метод Фурье или метод Неймана

Рассмотрим разностное уравнение (3.1). Если ε — погрешность округления, то численное решение разностного уравнения можно представить в виде $N = D + \varepsilon$. Так как численное решение N и точное решение разностного уравнения D удовлетворяют разностному уравнению (3.1), то, подставляя N в это уравнение, получим

$$\varepsilon_j^{n+1} = \varepsilon_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (\varepsilon_j^n - \varepsilon_{j-1}^n).$$

Видно, что погрешность \mathcal{E} удовлетворяет тому же уравнению.

Если разностная схема устойчива, то рост любого возмущения, вводимого на n -ом шаге по времени, ограничен; для неустойчивых конечно-разностных схем возмущение возрастает.

Рассмотрим распределение погрешности на сетке в любой момент времени. Для удобства выберем момент времени $t = 0$. Схематически это распределение погрешности показано на рис. 3. Предположим, что погрешность $\varepsilon(x, t)$ можно представить в виде суммы ряда Фурье:

$$\varepsilon(x, t) = \sum_m b_m(t) e^{ik_m x} \quad (3.2)$$

причем период основной частоты ($m = 1$) равен $2L$. Нас интересует решение в интервале длины L , поэтому волновые числа

$$k_m = m\pi/L, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M,$$

где M — число отрезков длины Δx , помещающихся в отрезке дли-

ны L . Напомним, что частота связана с волновым числом соотношением $f_m = k_m/2\pi = m/2L$ и указывает на число волн, помещающихся в отрезке длины $2L$. Если $m = 0$, то $f_0 = 0$, а соответствующее слагаемое описывает стационарную составляющую решения.

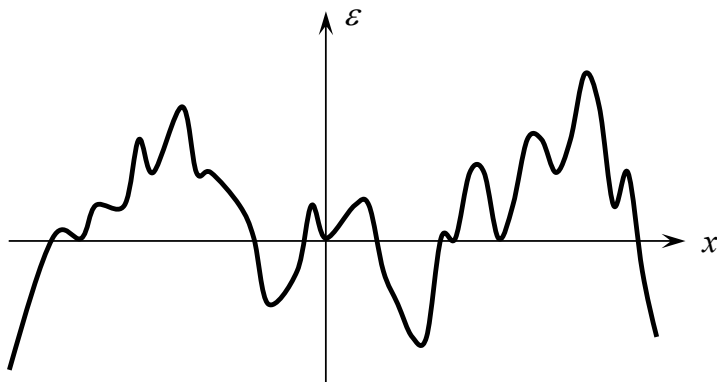


Рис. 3. Начальное распределение погрешности

Так как погрешность удовлетворяет линейному уравнению, то поведение каждой гармоники, входящей в (3.2), можно рассмотреть независимо. Рассмотрим слагаемое $\varepsilon_m(x, t) = b_m(t)e^{ik_mx}$. Будем искать решение уравнения в виде $z^n e^{ik_mx}$. При $t = 0$ ($n = 0$) оно имеет вид e^{ik_mx} . Пусть $z = e^{a\Delta t}$, тогда

$$z^n = e^{an\Delta t} = e^{at}, \quad \varepsilon_m(x, t) = e^{at} e^{ik_mx}, \quad (3.3)$$

причем a может быть и комплексным. Подставляя (3.3) в (3.2), получим

$$e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_mx} = e^{at} e^{ik_mx} - r \left(e^{at} e^{ik_mx} - e^{at} e^{ik_m(x-\Delta x)} \right),$$

где $r = a\Delta t/\Delta x$. Разделив на $e^{at} e^{ik_mx}$ получим

$$e^{a\Delta t} = 1 - r \left(1 - e^{-ik_m\Delta x} \right) = 1 - r(1 - \cos\beta) - ir \sin\beta,$$

где $\beta = k_m\Delta x$. Так как для каждой гармоники $\varepsilon_j^{n+1} = e^{a\Delta t} \varepsilon_j^n$, то по-

грешность округления не будет возрастать на каждом шаге по маршевой координате (времени), если $|e^{a\Delta t}|$ не превосходит единицы. Следовательно, разностная схема устойчива при

$$|1 - r(1 - \cos\beta) - ir \sin\beta| \leq 1 \quad (3.4)$$

Коэффициент $1 - r(1 - \cos\beta) - ir \sin\beta$ (равный отношению $\varepsilon_j^{n+1} / \varepsilon_j^n$) называют *коэффициентом* (или множителем) *перехода* и обозначают через G . Отметим, что при анализе Фурье устойчивости конечно-разностных схем реальные граничные условия не учитываются; вместо них для гармоник выставляют обычно периодические граничные условия.

Из неравенства (3.4) следует

$$[1 - r(1 - \cos\beta)]^2 + [r \sin\beta]^2 \leq 1$$

или

$$2r(1 - \cos\beta)(r - 1) \leq 0.$$

Следовательно

$$0 < r \leq 1 \quad (3.5)$$

Это неравенство и является условием устойчивости рассматриваемой конечно-разностной схемы; оно накладывает ограничение на соотношение шагов по времени и пространственной координате: $0 < a\Delta t / \Delta x \leq 1$. Параметр r называется *числом Куранта*. Условие (3.5) называется *условием устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви* (КФЛ).

Коэффициент перехода, или, как его еще иногда называют, множитель перехода, для конечно-разностных схем зависит от шагов сетки и волнового числа. Для рассмотренной схемы коэффициент перехода имеет вид:

$$G = 1 - r(1 - \cos\beta) - ir \sin\beta = |G| e^{i\Phi} = \\ = \sqrt{[1 - r(1 - \cos\beta)]^2 + [r \sin\beta]^2} \cdot \exp\left(i \cdot \arctg \left[\frac{-r \sin\beta}{1 - r(1 - \cos\beta)} \right] \right)$$

где Φ - фазовый угол. Из последнего соотношения ясно, как коэффициент G зависит от числа Куранта r и параметра частоты β .

Анализ зависимостей коэффициента G и фазового угла Φ от этих параметров позволяет сделать выводы о том как разностная схема искажает амплитуду и фазовый угол гармоник различных частот. В частности, для β близких к 0 (низкочастотные гармоники) амплитуда гармоник практически не искажается $G \approx 1$, тогда как для $\beta = \pi$ гармоники распространяются с затуханием, поскольку их амплитуда будет меньше единицы $G = |1 - 2r|$.

Очень важно понять физический смысл условия КФЛ (3.5) для гиперболических уравнений. Рассмотрим волновое уравнение второго порядка

3.2. Смысл условия Куранта-Фридрихса-Леви

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (3.6)$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (3.7)$$

Точное решение этой задачи можно получить методом характеристик. Действительно, так как $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}$, то для $\frac{dx}{dt} = a$ из уравнения (3.6) имеем $\frac{du}{dt} = 0$. Следовательно, вдоль линий

$x = at + const$ функция u принимает постоянные значения. Это означает, что поскольку $x - at = const$, то общее решение уравнения (3.6) можно записать в виде $u(x, t) = f(x - at)$, где f произвольная функция. Из начального условия (3.7) определяем вид функции f : $u(x, 0) = f(x) = \phi(x)$. Таким образом

$$u(x, t) = \phi(x - at).$$

Геометрическая интерпретация. Проведем из точки $A(-x_0, 0)$, лежащей на оси абсцисс пространственно-временной плоскости, характеристику (рис. 4) до пересечения с осью ординат в точке $P(0, x_0/a)$. Решение в точке A известно из начальных условий $u(-x_0, 0) = \phi(-x_0)$. Поскольку вдоль характеристики функция

$u(x, t)$ сохраняет постоянные значения, то решение в точке P будет равно решению в точке A : $u(0, x_0/a) = \phi(-x_0)$.

Построим разностное решение задачи (3.6) – (3.7) с помощью уравнения (3.1). Выберем шаг разностной сетки Δx так, чтобы точка $P(0, x_0/a)$ принадлежала сетке, т.е. чтобы число

$$N = \frac{x_0}{a\Delta t} = \frac{x_0}{r\Delta x}$$

было целым. В силу (3.1) значение u_0^{n+1} в точке $(0, x_0/a)$ выражается через значения u_0^n и u_{-1}^n в точках сетки $(0, x_0/a - \Delta t)$ и $(-\Delta x, x_0/a - \Delta t)$. В свою очередь значения u_0^n и u_{-1}^n выражаются через значения u_0^{n-1} , u_{-1}^{n-1} и u_{-2}^{n-1} в точках сетки $(0, x_0/a - 2\Delta t)$, $(-\Delta x, x_0/a - 2\Delta t)$ и $(-2\Delta x, x_0/a - 2\Delta t)$ и т.д. В конечном счете, значение u_0^{n+1} выражается через значения u_j^0 решения в начальный момент времени в точках сетки $(0, 0)$, $(-\Delta x, 0)$, $(-2\Delta x, 0)$, ..., $(-N\Delta x, 0)$.

Все эти точки лежат на отрезке: $-\frac{x_0}{r} \leq x \leq 0$ прямой $t=0$. Таким образом, решение разностного уравнения в точке $P(0, x_0/a)$ не будет зависеть от значения функции $\phi(x)$ в точках, лежащих вне этого отрезка. Т.е. областью зависимости решения разностного уравнения (3.1) в точке $P(0, x_0/a)$ является отрезок $-x_0/r \leq x \leq 0$.

Возьмем число Куранта $r > 1$, тогда отрезок оси абсцисс $-\frac{x_0}{r} \leq x \leq 0$ не будет содержать точку $-x_0$. Если изменить значение функции $\phi(x)$ в точке $A(-x_0, 0)$, то точное решение задачи (3.6) – (3.7) в точке $P(0, x_0/a)$ изменится тоже, в то время как решение разностной задачи не изменится, т.к. точка A будет лежать вне области зависимости решения разностного уравнения. Следовательно, при $\Delta x \rightarrow 0$ разностное решение не будет сходиться к точному, а в силу теоремы Лакса схема (3.1) при $r > 1$ будет неустойчивой.

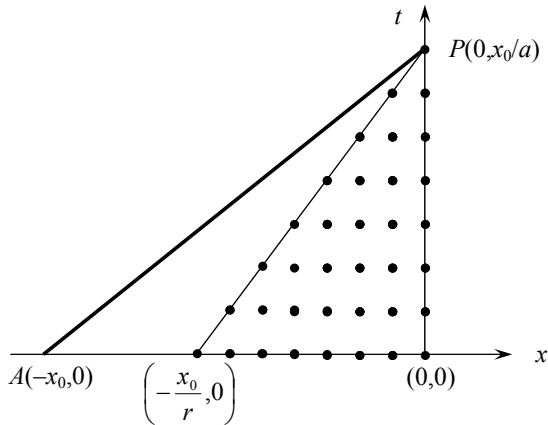


Рис. 4. Области зависимости решения для дифференциального и разностного уравнений

Если a является функцией x и t , то областью зависимости для решения в точке P разностного уравнения (3.1) будет треугольник с координатами $(-x_0, 0)$, $(0, 0)$ и $(0, x_0/a)$. Характеристика уравнения (3.6) будет представлять кривую, выходящую из точки A в точку P , и описываться дифференциальным уравнением $\frac{dx}{dt} = a(x, t)$. В этом

случае область зависимости решения дифференциального уравнения в точке P будет представлять криволинейный треугольник, а условие КФЛ будет звучать так: «Область зависимости решения дифференциального уравнения должна лежать внутри области зависимости решения разностного уравнения».

3.3. Анализ устойчивости систем уравнений в частных производных

Описанный в предыдущем разделе метод Неймана может быть использован и для анализа устойчивости конечно-разностных схем решения систем уравнений в частных производных.

Рассмотрим следующую систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad (3.8)$$

где A – матрица постоянных коэффициентов, \mathbf{U} – вектор неизвестных функций.

Применяя схему (3.1) к системе (3.8), получим:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \left(I - \frac{\Delta t}{\Delta x} A \right) \mathbf{U}_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} A \mathbf{U}_{j-1}^n \quad (3.9)$$

Здесь I – единичная матрица. Для анализа устойчивости применим метод Неймана, тогда для коэффициентов ряда Фурье будет иметь место соотношение:

$$\mathbf{b}_m(t + \Delta t) = G(\beta, \Delta t) \mathbf{b}_m(t),$$

где

$$G(\beta, \Delta t) = I - \frac{\Delta t}{\Delta x} A(1 - \cos \beta) - i \frac{\Delta t}{\Delta x} A \sin \beta$$

Матрица $G(\beta, \Delta t)$ называется *матрицей перехода*, она зависит от шага по времени и частоты. Если конечно-разностная схема устойчива, то максимальное собственное значение σ_{\max} матрицы $G(\beta, \Delta t)$ должно удовлетворять условию:

$$|\sigma_{\max}| \leq 1$$

откуда следует, что разностная схема устойчива при

$$\left| \lambda_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$$

где λ_{\max} — максимальное собственное значение матрицы A .

3.4. Дифференциальное приближение разностной схемы

Для анализа устойчивости и исследования свойств разностных схем можно использовать так называемое дифференциальное приближение разностной схемы.

Дифференциальным приближением разностной схемы называется дифференциальное уравнение в частных производных, которое получается из разностной схемы, если вместо сеточных функ-

ций подставить их разложение в ряд Тейлора.

В этом разделе рассматривается способ получения дифференциального приближения для ряда известных разностных схем.

3.4.1. Противопоточная разностная схема

Рассмотрим разностную схему (2.3) для уравнения (2.1). Эта разностная схема имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, \Delta x)$. Из условия устойчивости Неймана следует, что схема устойчива при $r \leq 1$, где $r = a\Delta t/\Delta x$.

Подставим в (9) вместо u_j^{n+1} и u_{j-1}^n их выражения в виде ряда Тейлора. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[u_j^n + \Delta t \cdot u_t + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt} + \frac{(\Delta t)^3}{6} u_{ttt} + \dots \right] - u_j^n \right\} + \\ & + \frac{a}{\Delta x} \left\{ u_j^n - \left[u_j^n - \Delta x \cdot u_x + \frac{(\Delta x)^2}{2} u_{xx} - \frac{(\Delta x)^3}{6} u_{xxx} + \dots \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

После несложных преобразований уравнение (3.10) приводится к виду

$$u_t + au_x = -\frac{\Delta t}{2} u_{tt} + a \frac{\Delta x}{2} u_{xx} - \frac{(\Delta t)^2}{6} u_{ttt} - a \frac{(\Delta x)^2}{6} u_{xxx} + \dots \quad (3.11)$$

В левой части последнего равенства записано исходное уравнение переноса, а в правой — погрешность аппроксимации, которая обычно отлична от нуля. Значение членов, входящих в погрешность аппроксимации, можно лучше понять, если заменить производные по времени производными по пространству. Для этого выразим производную u_{tt} через производную по x . Дифференцируя (3.11) по времени, получаем

$$u_{tt} + au_{xt} = -\frac{\Delta t}{2} u_{ttt} + a \frac{\Delta x}{2} u_{xxt} - \frac{(\Delta t)^2}{6} u_{ttt} - a \frac{(\Delta x)^2}{6} u_{xxx} + \dots \quad (3.12)$$

а дифференцируя (3.11) по x и умножая на $-a$, находим

$$\begin{aligned}
-au_{tx} - a^2 u_{xx} &= a \frac{\Delta t}{2} u_{ttx} - a^2 \frac{\Delta x}{2} u_{xxx} + \\
&+ \frac{a(\Delta t)^2}{6} u_{tttx} + a^2 \frac{(\Delta x)^2}{6} u_{xxxx} + \dots
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Складывая (3.12) и (3.13), получаем

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx} + \Delta t \left(\frac{-u_{ttt}}{2} + \frac{a}{2} u_{ttx} + O(\Delta t) \right) + \\
&+ \Delta x \left(\frac{a}{2} u_{xxt} - \frac{a^2}{2} u_{xxx} + O(\Delta x) \right)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Аналогично можно получить следующие выражения для производных u_{ttt} , u_{ttx} , u_{xxt}

$$\begin{aligned}
u_{ttt} &= -a^3 u_{xxx} + O(\Delta t, \Delta x), \\
u_{ttx} &= a^2 u_{xxx} + O(\Delta t, \Delta x), \\
u_{xxt} &= -a u_{xxx} + O(\Delta t, \Delta x).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Из уравнений (3.11), (3.14) и (3.15) следует, что

$$\begin{aligned}
u_t + au_x &= \frac{a\Delta x}{2} (1-r) u_{xx} - \frac{a(\Delta x)^2}{6} (2r^2 - 3r + 1) u_{xxx} + \\
&+ O\left((\Delta x)^3, (\Delta x)^2 \Delta t, \Delta x (\Delta t)^2, (\Delta t)^3\right)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Уравнение (3.16), называют *дифференциальным приближением* [2] или *модифицированным уравнением*. При использовании метода конечных разностей решается на самом деле модифицированное уравнение, а не исходное уравнение в частных производных. Подчеркнем, что для исключения производных по времени высших порядков необходимо использовать именно уравнение, получающееся после подстановки разложения в ряд Тейлора в разностное уравнение, т. е. уравнение (3.11), а не исходное уравнение в частных производных (2.1). Это связано с тем, что решение исходного уравнения обычно не является решением разностного уравнения, и так как модифицированное уравнение следует из разностного уравнения, то очевидно, что исходное уравнение в частных

производных не должно использоваться для исключения производных по времени.

Правая часть модифицированного уравнения (3.16) является погрешностью аппроксимации, так как она равна разности решений исходного уравнения в частных производных и его конечно-разностного аналога. Следовательно, член наименьшего порядка в правой части модифицированного уравнения определяет порядок точности метода. В рассматриваемом случае метод имеет первый порядок точности, так как член наименьшего порядка имеет порядок $O(\Delta t, \Delta x)$. Если $r = 1$, то правая часть (3.16) равна нулю и решение разностного уравнения является точным решением исходного дифференциального уравнения. В этом случае разностная схема с разностями против потока имеет вид

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$$

Такая запись разностной схемы эквивалентна точному решению уравнения (2.1) методом характеристик. Заметим, что погрешность аппроксимации равна разности точных решений модифицированного и волнового уравнений (при периодических граничных условиях).

Главный член в выражении для погрешности аппроксимации в рассматриваемом случае пропорционален производной u_{xx} , т. е. он аналогичен диссипативному вязкому члену в одномерном уравнении движения жидкости. Например, если коэффициент вязкости μ постоянен, то градиент вязкого трения в одномерном уравнении Навье — Стокса можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) = \frac{4}{3}\mu \cdot u_{xx}$$

Следовательно, при $r \neq 1$ схема с разностями против потока неявно вводит в уравнение *искусственную вязкость*, которую часто называют *неявной (схемной) искусственной вязкостью* в отличие от *явной искусственной вязкости*, которая преднамеренно вводится в разностное уравнение. Искусственная вязкость сглаживает решение уравнения, уменьшая градиенты всех параметров независимо от причины возникновения этих градиентов, физической или

вычислительной. Такое свойство разностной схемы, обусловленное наличием в выражении для погрешности аппроксимации производных четного порядка, называют *диссипацией* на разностной сетке.

Другое близкое к физическому свойство разностных схем называют *дисперсией*. Оно непосредственно связано с производными нечетного порядка в выражении для погрешности аппроксимации. Дисперсия приводит к искажению соотношения фаз различных волн. Совместное воздействие диссипации и дисперсии на решение иногда называют *диффузией*. Диффузия приводит к растяжению крутых линий раздела, которые могут появляться в расчетной области. На рис. 5 показаны эффекты диссипации и дисперсии на расчет разрыва. Обычно если главный член в выражении для погрешности аппроксимации содержит производную четного порядка, то схема обладает в основном диссипативными свойствами, а если производную нечетного порядка — то дисперсионными.

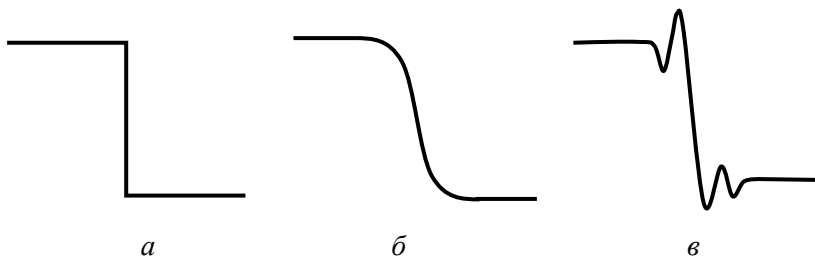


Рис. 5. Влияние диссипации и дисперсии:

a — точное решение; *б* — численное решение, полученное в том случае, когда ошибка является в основном диссипативной (такое решение типично для схем первого порядка точности); *в* — численное решение, полученное в случае, когда ошибка является в основном дисперсионной (такое решение типично для схем второго порядка точности) .

Ранее показывалось, как можно определить относительную погрешность в амплитуде (диссипацию) и фазе (дисперсию) каждой гармоники, зная коэффициент перехода. Поэтому естественно возникает вопрос: есть ли какая-либо связь между коэффициентом перехода и видом модифицированного уравнения. Оказывается, что такая связь действительно существует. На основе анализа

членов модифицированного уравнения с производными четного порядка можно судить о устойчивости разностных схем, а по производным нечетного порядка можно определять погрешность, связанную с изменением фазы.

Коэффициент перехода для рассматриваемой разностной схемы с разностями против потока имеет вид

$$G = 1 - r(1 - \cos\beta) - i \cdot r \sin\beta$$

Его модуль

$$|G| = \sqrt{(1 - r(1 - \cos\beta))^2 + (r \sin\beta)^2}$$

при различных r изображен на рис. 6. Из представленных на нем данных видно, что условие устойчивости Неймана $|G| \leq 1$ выполняется лишь при $r \leq 1$

Запишем коэффициент перехода в виде $G = |G|e^{i\Phi}$, где Φ — фазовый угол, определяемый соотношением

$$\Phi = \arctg \frac{\text{Im}(G)}{\text{Re}(G)} = \arctg \left[\frac{-r \sin\beta}{1 - r(1 - \cos\beta)} \right]$$

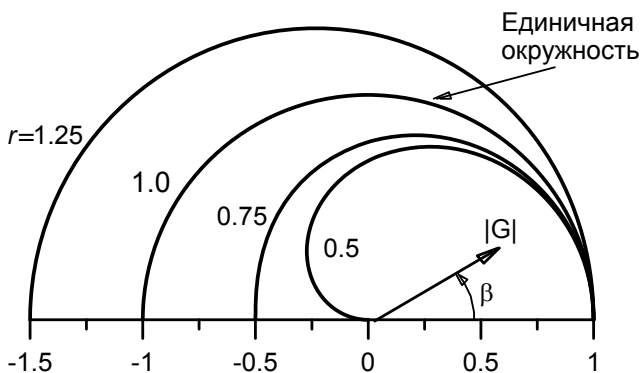


Рис. 6. Модуль коэффициента перехода для схемы с разностями против потока

Фазовый угол точного решения уравнения переноса Φ_e определяется аналогично, если известен коэффициент перехода точного решения уравнения переноса. Для определения точного значения коэффициента перехода подставим в уравнение переноса его фундаментальное решение $u = e^{at} e^{ik_m x}$ и найдем, что $\alpha = -ik_m a$. Тогда $u = e^{ik_m(x-at)}$ и, следовательно, коэффициент перехода для точного решения имеет вид

$$G_e = \frac{u(t + \Delta t)}{u(t)} = \frac{e^{ik_m[x-a(t+\Delta t)]}}{e^{ik_m(x-at)}} = e^{-ik_m a \Delta t} = e^{i\Phi_e}$$

Здесь $\Phi_e = -k_m a \Delta t = -\beta r$, причем $|G_e| = 1$

Итак, обусловленная диссипацией суммарная ошибка в определении амплитуды после n шагов решения уравнения по схеме с разностями против потока равна $(1 - |G|^n)u_0$, где u_0 – начальное значение амплитуды волны. Аналогично полную дисперсионную ошибку (искажение фазы волны) можно записать в виде $n(\Phi_e - \Phi)$. Относительная погрешность в определении смещения по фазе на одном шаге по времени равна

$$\frac{\Phi}{\Phi_e} = \frac{\arctg[-r \cdot \sin \beta / (1 - r(1 - \cos \beta))]}{-\beta r}$$

На рис. 7 показано отношение Φ/Φ_e при различных r .

Если относительная погрешность в определении фазы при заданном β превосходит единицу, то рассчитанная скорость распространения соответствующей гармонической волны оказывается больше точного значения скорости этой волны. Про такие волны говорят, что они распространяются с опережением по фазе. Аналогично, если относительная погрешность в определении фазы меньше единицы, то рассчитанная скорость распространения гармонической волны оказывается меньше точного значения скорости этой волны, поэтому говорят, что такая волна распространяется с отставанием по фазе. При использовании разностей против

потока опережение по фазе возникает при $0.5 < r < 1$, а отставание — если $r < 0.5$.

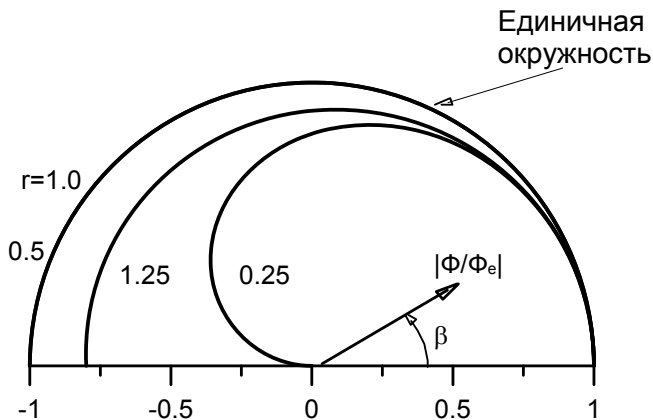


Рис. 7. Относительная погрешность определения фазы для схемы с разностями против потока

Чтобы показать связь коэффициента перехода и модифицированного уравнения (3.16), запишем это уравнение в виде

$$u_t + au_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{2n} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} + C_{2n+1} \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} \right)$$

Здесь C_{2n} и C_{2n+1} — коэффициенты перед членами уравнения с производными четного и нечетного порядков по пространству. Необходимым условием устойчивости разностной схемы является условие

$$(-1)^{l-1} C_{2l} > 0 \quad (3.17)$$

где C_{2l} — коэффициент перед низшей производной четного порядка. Условие (3.17) аналогично требованию положительности коэффициента вязкости в уравнениях движения вязкой жидкости. В уравнении (3.16) коэффициент при низшей производной четного порядка имеет вид

$$C_2 = \frac{a\Delta x}{2}(1-r).$$

Поэтому необходимое условие устойчивости разностной схемы запишется в виде $(a\Delta x/2)(1-r) > 0$, т. е. разностная схема устойчива, если $r < 1$. Это же условие устойчивости получалось ранее из анализа коэффициента перехода.

Относительная погрешность в определении фазы для разностных схем решения волнового уравнения определяется выражением

$$\frac{\Phi}{\Phi_e} = 1 - \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (k_m)^{2n} C_{2n+1}$$

где $k_m = \beta/\Delta x$ — волновое число.

Итак, показано, что между коэффициентом перехода и видом модифицированного уравнения существует непосредственная связь.

3.4.2. Схема Лакса

Для решения уравнения (2.1) Лакс [3] предложил следующую схему:

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (3.18)$$

Это явная одношаговая схема первого порядка точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2/\Delta t)$. Коэффициент перехода для схемы Лакса имеет вид:

$$G = \cos \beta + ir \sin \beta = \sqrt{\cos^2 \beta + r^2 \sin^2 \beta} \exp[i \arctg(-r \operatorname{tg} \beta)],$$

а дифференциальное приближение для нее:

$$u_t + au_x = \frac{a\Delta x}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right) u_{xx} + \frac{a(\Delta x)^2}{3} (1 - r^2) u_{xxx} + \dots \quad (3.19)$$

Отметим, что эта схема не всегда удовлетворяет условию согласованности, так как отношение $(\Delta x)^2/\Delta t$ может не стремиться к нулю при Δt , Δx , стремящихся к нулю. Однако если при стремлении Δt и Δx к нулю число Куранта r сохраняется постоянным, то условие согласованности выполняется. Схема Лакса отличается высоким уровнем диссипации при $r \neq 1$. В этом можно убедиться, сравнив коэффициент при члене u_{xx} в уравнении (3.19) и в уравнении (3.16) для противопоточной разностной схемы для разных r .

На высокий уровень диссипации указывает и модуль коэффициента перехода $|G| = \sqrt{\cos^2 \beta + r^2 \sin^2 \beta}$ (рис. 8 а). Погрешность в определении фазы определяется соотношением: $\frac{\Phi}{\Phi_e} = \frac{\text{arctg}(-r \text{tg} \beta)}{-\beta r}$, и как видно из рис. 8 б происходит опережение по фазе.

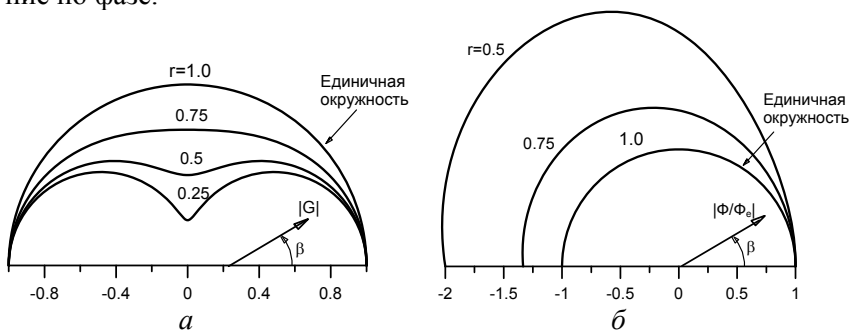


Рис. 8. Схема Лакса:
 а – модуль коэффициента перехода,
 б – относительная погрешность определения фазы.

3.4.3. Метод Лакса — Вендроффа

Схему Лакса — Вендроффа [4] можно построить, исходя из разложения в ряд Тейлора:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + u_t \Delta t + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 + O((\Delta t)^3) \quad (3.20)$$

Из волнового уравнения следует

$$u_t = -au_x, \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Тогда уравнение (3.20) можно переписать в виде

$$u_j^{n+1} = u_j^n - au_x \Delta t + \frac{1}{2} a^2 u_{xx} (\Delta t)^2 + O((\Delta t)^3).$$

Заменим производные u_x и u_{xx} , используя центральные разности второго порядка. В результате получим широко известную схему Лакса — Вендроффа

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{a \Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.21)$$

Это явная одношаговая схема второго порядка точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta x)^2, (\Delta t)^2)$, устойчивая при $|r| < 1$.

Модифицированное уравнение в этом случае имеет вид

$$u_t + au_x = -a \frac{(\Delta x)^2}{6} (1-r^2) u_{xxx} - \frac{a(\Delta x)^3}{8} r(1-r^2) u_{xxxx} + \dots$$

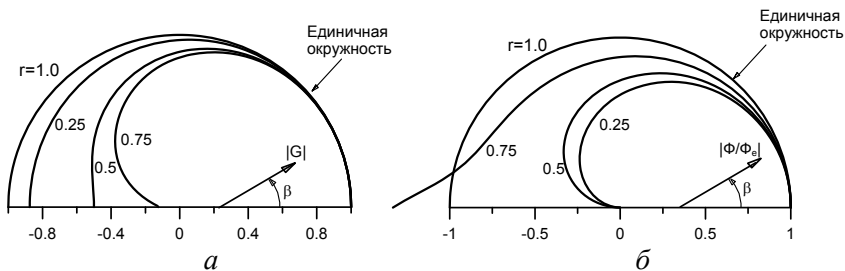


Рис. 9. Схема Лакса-Вендроффа:
 a – модуль коэффициента перехода;
 b – относительная погрешность определения фазы.

Коэффициент перехода

$$G = 1 - r^2 (1 - \cos \beta) - i \cdot r \sin \beta$$

и относительная погрешность в определении фазы

$$\frac{\Phi}{\Phi_e} = \frac{\operatorname{arctg} \left\{ -r \sin \beta / [1 - r^2 (1 - \cos \beta)] \right\}}{-\beta r}$$

изображены на рис. 9. Для схемы Лакса — Вендроффа характерно запаздывание по фазе, исключение составляют лишь гармоники с большими волновыми числами при $\sqrt{0.5} < r < 1$.

3.4.4. Двухшаговый метод Лакса-Вендроффа

Для решения нелинейных уравнений, например уравнений, описывающих движение невязкой жидкости, можно использовать двухшаговый вариант метода Лакса — Вендроффа. Применяя этот метод для решения уравнения переноса, получаем явную двухшаговую трехслойную по времени разностную схему:

Шаг 1 (предиктор)

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - (u_{j+1}^n + u_j^n)/2}{\Delta t/2} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.22)$$

Шаг 2 (корректор)

$$\frac{u_j^n - u_j^n}{\Delta t/2} + a \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0 \quad (3.23)$$

Эта схема имеет второй порядок точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta x)^2, (\Delta t)^2)$ и устойчива при $|r| \leq 1$. Шаг 1 — это просто метод Лакса, использованный для построения разностного уравнения в точке $j + 1/2$ на полушаге по времени, а шаг 2 — метод с перешагиванием, примененный на оставшемся полушаге по времени. В случае линейного уравнения переноса первого порядка двухшаговый метод Лакса — Вендроффа эквивалентен описанному в предыдущем разделе методу Лакса — Вендроффа. В этом легко убедиться при помощи подстановки (3.22) в (3.23). Так как оба метода эквивалентны, то и модифицированное уравнение, и коэффициент перехода у них будут одинаковы.

3.4.5. Метод МакКормака

Метод МакКормака [5] широко применяется для решения урав-

нений газовой динамики. Фактически это один из вариантов двухшагового метода Лакса — Вендроффа, не требующий вычисления значений искомой функции в точках $j+1/2$ и $j-1/2$. Благодаря этому метод МакКормака особенно удобен для решения нелинейных уравнений в частных производных. Применяя явный метод предиктор-корректор к линейному уравнению переноса, получаем следующую разностную схему:

Предиктор

$$\overline{u_j^{n+1}} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (3.24)$$

Корректор

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[u_j^n + \overline{u_j^{n+1}} - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (\overline{u_j^{n+1}} - \overline{u_{j-1}^{n+1}}) \right] \quad (3.25)$$

Первоначально (предиктор) находится оценка величины u на $n+1$ шаге по времени ($\overline{u_j^{n+1}}$), а потом (корректор) определяется окончательное значение u на $(n+1)$ -м шаге по времени. Отметим, что в предикторе производная du/dx аппроксимируется разностями вперед, а в корректоре — разностями назад. Можно поступить и наоборот, что бывает полезным при решении некоторых задач. К таким задачам относятся, в частности, задачи с движущимися разрывами. Для линейного уравнения переноса схема МакКормака эквивалентна схеме Лакса—Вендроффа (3.21), поэтому у них одинаковые погрешность аппроксимации, условие устойчивости, модифицированное уравнение и коэффициент перехода.

3.4.6. Разности против потока

Бим и Уорминг [6] предложили несколько изменить метод МакКормака, используя как на шаге предиктор, так и на шаге корректор разности назад (разности против потока). При $a > 0$ этот метод приводит к разностной схеме.

Предиктор

$$\overline{u_j^{n+1}} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (3.26)$$

Корректор

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[u_j^n + \overline{u_j^{n+1}} - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (\overline{u_j^{n+1}} - \overline{u_{j-1}^{n+1}}) - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) \right] \quad (3.27)$$

Благодаря тому что в правую часть уравнения (3.27) включена односторонняя с разностями против потока аппроксимация второй производной, схема имеет второй порядок точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta t)(\Delta x), (\Delta x)^2)$. Если подставить (3.26) в (3.27), то получится одношаговый алгоритм

$$u_j^{n+1} = u_j^n - r(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} r(r-1)(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) \quad (3.28)$$

Модифицированное уравнение для рассматриваемой разностной схемы имеет вид

$$u_t + au_x = a \frac{(\Delta x)^2}{6} (1-r)(2-r) u_{xxx} - \frac{a(\Delta x)^4}{8\Delta t} r(1-r)^2 (2-r) u_{xxxx} + \dots \quad (3.29)$$

При $r=1$ и $r=2$ схема с разностями против потока имеет бесконечный порядок точности. Коэффициент перехода выражается в виде

$$G = 1 - 2r \left[r + 2(1-r) \sin^2 \frac{\beta}{2} \right] \sin^2 \frac{\beta}{2} - i \cdot r \sin \beta \left[1 + 2(1-r) \sin^2 \frac{\beta}{2} \right]$$

и разностная схема устойчива при $0 \leq r \leq 2$. Для метода с разностями против потока при $0 < r < 1$ характерно в основном опережение по фазе, а при $1 < r < 2$ — отставание. Отметим, что при $0 < r < 1$ метод Лакса — Вендроффа и метод Бима и Уорминга с разностями против потока имеют противоположные ошибки по фазе, поэтому дисперсионную ошибку можно существенно уменьшить, применив линейную комбинацию двух этих методов.

4. ПОНЯТИЕ О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ РАСЧЕТА ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ

4.1.Обобщенное решение

Во всех рассмотренных до сих пор примерах предполагается, что существуют достаточно гладкие решения дифференциальных краевых задач, а в основе построения разностных лежит приближенная замена производных в дифференциальном уравнении разностными отношениями. Однако дифференцируемых функций недостаточно для описания многих важных процессов физики. Так, например, физические эксперименты показывают, что распределения давления, плотности и температуры в сверхзвуковом течении невязкого газа описываются функциями, имеющими скачки — ударные волны. Скачки могут возникать с течением времени при гладких начальных данных.

Соответствующие дифференциальные краевые задачи не имеют гладких решений. Приходится расширить понятие решения и некоторым естественным способом ввести обобщенные решения, которые могут быть и разрывными. Для этого существуют два основных способа.

Первый способ состоит в том, чтобы записывать физические законы сохранения (массы, импульса, энергии и т. д.) не в дифференциальной, а в интегральной форме. Тогда они имеют смысл и для разрывных функций, которые нельзя дифференцировать, но интегрировать можно.

Второй способ состоит в искусственном введении в дифференциальные уравнения таких членов, при которых эти уравнения имеют гладкие' решения. Эти искусственно введенные члены в случае газодинамических задач имеют смысл малой вязкости, выглаживающей разрывы течения. Затем коэффициенты при «вязких» членах устремляют к нулю, а предел, к которому стремится решение, принимают за обобщенное решение исходной задачи.

Поясним определение обобщенного решения и способов его получения на примере следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = \phi(x),$$

которая является простейшей моделью уравнений газовой динамики среди обладающих свойством возникновения разрывных решений из гладких начальных данных.

4.1.1. Механизм возникновения разрывов

Предположим сначала, что задача (4.1) имеет гладкое решение $u(x, t)$. Введем линии $x = x(t)$, определяемые уравнением

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) \quad (4.2)$$

Эти линии называются характеристиками уравнения $u_t + u u_x = 0$. Вдоль каждой характеристики $x = x(t)$ решение $u(x, t)$ можно считать функцией, зависящей только от t :

$$u(x, t) = u[x(t), t] = u(t).$$

Тогда

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Поэтому вдоль характеристики решение постоянно, $u(x, t) = \text{const}$. Но в силу уравнения (38) из $u = \text{const}$ следует, что характеристика есть прямая линия $x = ut + x_0$. Здесь x_0 — абсцисса точки $(x_0, 0)$, из которой выходит характеристика, а $u = \phi(x_0)$ — угловой коэффициент ее наклона к оси Ot . Заданием начальной функции $u(x, 0) = \phi(x)$, таким образом, наглядно определяется и картина характеристик, и значения решения $u(x, t)$ в каждой точке полуплоскости $t > 0$.

Если предполагать существование гладкого решения $u(x, t)$, то характеристики не могут пересекаться, так как каждая характеристика приносила бы в точку пересечения свое значение решения и решение не было бы однозначной функцией. При монотонно возрастающей функции $\phi(x)$ с ростом x_0 угол наклона увеличивается, характеристики не пересекаются (рис. 10 а). Но в случае

убывания функции $\varphi(x)$ характеристики сходятся и пересечения неизбежны — независимо от гладкости функции $\varphi(x)$. Гладкое решение задачи (4.1) перестает существовать с момента $t = t_*$, когда хотя бы две характеристики пересекутся (рис. 10 б).

Графики функции $u = u(x, t)$ при $t = 0, t_*/2$ и t_* , изображены на рис. 11.

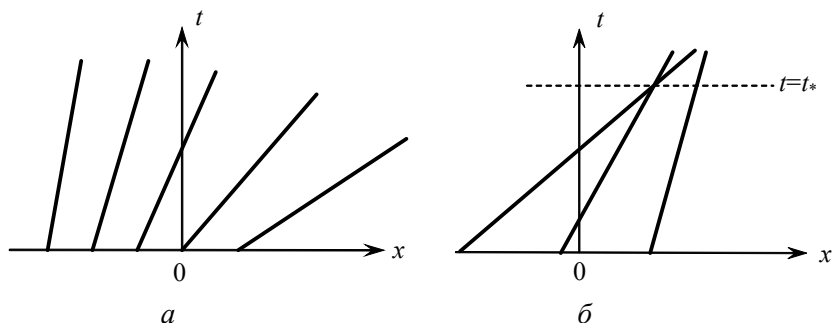


Рис. 10. Положение характеристик от вида функции $\varphi(x)$:
 а – разрывные решения не образуются, $\varphi'(x) > 0$
 б – в момент $t = t_*$ образуется разрывное решение, $\varphi'(x) < 0$

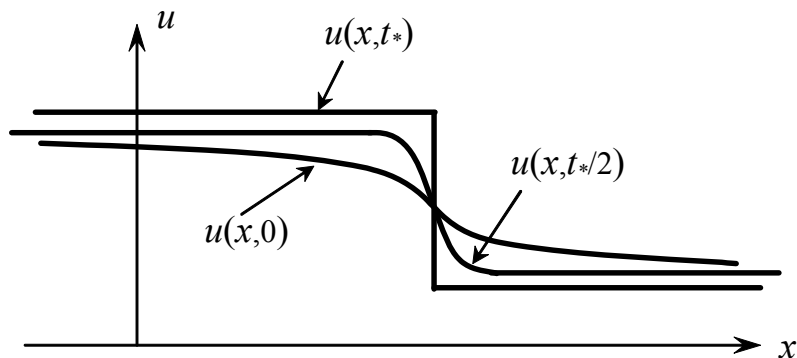


Рис. 11. Формирование разрывного решения

4.1.2. Определение обобщенного решения

Запишем дифференциальное уравнение из задачи (4.1) в дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0. \quad (4.3)$$

Проинтегрируем обе части уравнения (4.3) по произвольной области D , лежащей в полуплоскости $t \geq 0$. Используя формулу Грина, получим

$$0 = \iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] dx dt = \int_{\Gamma} u dx - \frac{u^2}{2} dt$$

Таким образом, каждое дифференцируемое решение уравнения (4.3) удовлетворяет интегральному соотношению

$$\int_{\Gamma} u dx - \frac{u^2}{2} dt = 0, \quad (4.4)$$

где Γ — произвольный контур, лежащий в полуплоскости $t > 0$. Равенство (4.3) выражает некоторый закон сохранения: поток вектора $\begin{pmatrix} u \\ u^2/2 \end{pmatrix}$ через любой замкнутый контур равен нулю.

Верно и обратное, если гладкая функция удовлетворяет при любом контуре Γ интегральному закону сохранения (4.4), то в каждой точке (x_0, t_0) , $t_0 > 0$, выполнено равенство (4.3). Т.е. в случае гладкой функции $u(x, t)$ следует, что (4.3) и (4.4) равносильны. Но в случае разрывной функции $u(x, t)$ дифференциальное уравнение (4.3) на линии разрыва теряет смысл, а интегральное условие (4.4) смысла не теряет. Поэтому будем называть *обобщенным решением* уравнения (4.3) всякую кусочно-дифференцируемую функцию, удовлетворяющую при произвольном выборе контура Γ в полуплоскости $t > 0$ условию (4.4).

4.1.3. Условие на линии разрыва решения

Пусть внутри области, где отыскивается решение, имеется ли-

ния $x \equiv x(t)$, на которой обобщенное решение $u(x, t)$ терпит разрыв первого рода. Пусть при приближении к этой линии слева или справа получаем на ней соответственно $u(x, t) = u_{\text{лев}}(x, t)$, $u(x, t) = u_{\text{прав}}(x, t)$. Оказывается, что значения $u_{\text{лев}}(x, t)$, $u_{\text{прав}}(x, t)$ и скорость движения точки разрыва $x' = dx/dt$ не могут быть произвольны: они связаны между собой некоторым соотношением.

Пусть L является линией разрыва (рис. 12).

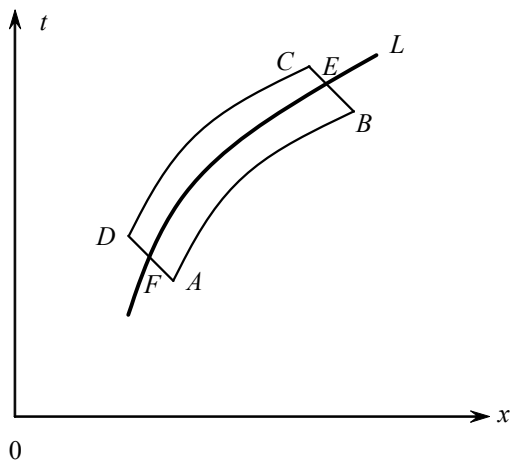


Рис. 12. Интегрирование по контуру $ABCD$ на линии разрыва L

Интеграл $\oint_{ABCD} u dx - \frac{u^2}{2} dt$ по контуру $ABCD$, как и по любому другому контуру, обращается в нуль. Когда отрезки BC и DA стягиваются к точкам E и F соответственно, интегралы по ним обращаются в нуль и получается равенство

$$\int_L [u] dx - \left[\frac{u^2}{2} \right] dt = 0$$

или

$$\int_{L'} \left([u] \frac{dx}{dt} - \left[\frac{u^2}{2} \right] \right) = 0$$

где $[z] = z_{\text{прав}} - z_{\text{лев}}$ — скачок величины z на линии разрыва, а L' — произвольный участок этой линии $L' = EF$.

Ввиду произвольности участка L' в каждой точке линии L должна обращаться в нуль подынтегральная функция:

$$[u] \frac{dx}{dt} - \left[\frac{u^2}{2} \right] = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{u^2}{2} \right] / [u] = \frac{u_{\text{прав}}^2 - u_{\text{лев}}^2}{2(u_{\text{прав}} + u_{\text{лев}})} = \frac{u_{\text{прав}} + u_{\text{лев}}}{2}$$

так что на линии разрыва выполнено условие:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_{\text{прав}} + u_{\text{лев}}}{2} \quad (4.5)$$

Если бы мы записали уравнение $u_t + uu_x = 0$ в другой дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^3}{3} \right) = 0. \quad (4.6)$$

то пришли бы аналогичным путем к другому интегральному соотношению:

$$\oint_{\Gamma} \frac{u^2}{2} dx - \frac{u^3}{3} dt = 0 \quad (4.7)$$

и к другому условию на линии разрыва:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3} \frac{u_{\text{прав}}^2 + u_{\text{прав}} u_{\text{лев}} + u_{\text{лев}}^2}{u_{\text{прав}} + u_{\text{лев}}} \quad (4.8)$$

Наклон (4.8) линии разрыва (или скорость x ударной волны) не совпадает с наклоном (4.5), отвечающим первой дивергентной записи (4.2). Отсюда видно, что понятие обобщенного решения зависит от того, какой именно интегральный закон сохранения отражается заданным дифференциальным уравнением (4.1). В зада-

цах математической физики интегральные законы сохранения имеют вполне определенный физический смысл.

На гладких функциях u все пять форм записи (4.1), (4.3), (4.4), (4.6), (4.7) равносильны между собой.

В дальнейшем, рассматривая задачу Коши (4.1), мы будем иметь в виду выполнение интегрального закона сохранения (4.3) и вытекающего из него условия (4.5) на разрыве.

4.1.4. Распад произвольного разрыва

Пусть заданы разрывные начальные данные

$$u = \begin{cases} 2, & \text{при } x < 0 \\ 1, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Построенное по этим начальным данным решение изображено на рис. 13.

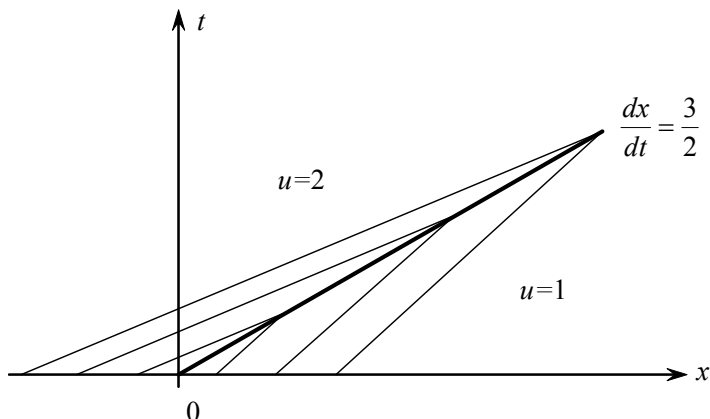


Рис. 13. Положение линии разрыва и характеристик

Тангенс угла наклона линии разрыва $\frac{dx}{dt} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ является средним арифметическим из тангенсов углов наклона характеристик по обе стороны от нее.

Зададим теперь в начальных условиях другой разрыв:

$$u = \begin{cases} 1, & \text{при } x < 0 \\ 2, & \text{при } x > 0 \end{cases}.$$

Из рис. 14 видно, что возможны два способа построения решения. В первом способе мы получаем непрерывное решение (рис. 14 а), а во втором — разрывное при $t > 0$ (рис. 14 б). Следует предпочесть непрерывное решение. В пользу этого говорит следующее рассуждение.

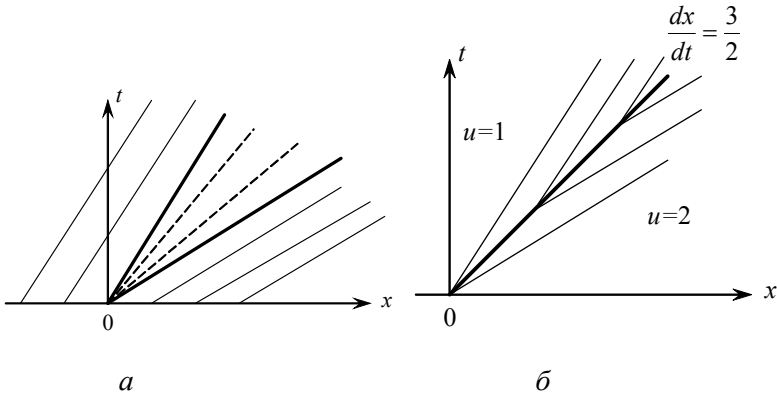


Рис. 14. Возможные способы построения решения: а — непрерывное решение; б — разрывное решение.

Если несколько изменить начальные данные, задав их формулой

$$u = \begin{cases} 1, & \text{при } x < 0 \\ 2, & \text{при } x > \varepsilon \\ 1 + x/\varepsilon, & \text{при } 0 \leq x \leq \varepsilon \end{cases},$$

то решение u определится однозначно. Оно изображено на рис.15. При стремлении ε к нулю это решение переходит в непрерывное решение, изображенное на рис. 14 а). Запрет решения, изображенного на рис. 14 б), по причине его неустойчивости относительно возмущения начальных данных аналогичен запрету ударных волн разрежения при математическом описании течения идеального газа.

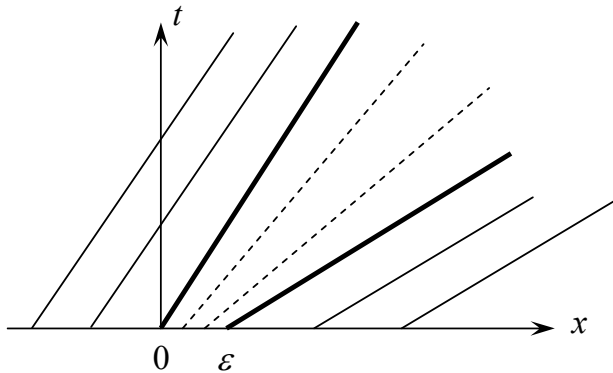


Рис. 15. Построение непрерывного решения

4.1.5. Другое определение обобщенного решения

Для определения понятия обобщенного решения задачи (4.1) можно рассмотреть вспомогательную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.9)$$

Здесь дифференциальное уравнение уже не гиперболического, а параболического типа. Его решения сохраняют гладкость, если $\varphi(x)$ – гладкая функция. А если $u(x, 0) = \varphi(x)$ разрывно, то разрыв сглаживается. Параметр $\mu > 0$ играет роль вязкости в газовой динамике. При $\mu > 0$ решение задачи (4.9) стремится к пределу, который можно принять за обобщенное решение задачи (4.1). Можно показать, что для задачи (4.1) последнее определение обобщенного решения равносильно определению с помощью закона сохранения (4.4).

4.2. Построение разностных схем для разрывных решений

Рассмотрим решение задачи (4.1). Для определенности будем полагать, что $\varphi(x) > 0$, тогда $u(x, t) > 0$. Первое, что кажется естественным, — это рассмотреть разностную схему вида (2.3), по-

ложив $a = u_j^n$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (4.10)$$

Если решение задачи (4.1) гладкое, то ее аппроксимация схемой (4.10) не вызывает сомнения.

Однако если задача (4.1) имеет разрывное решение, то сходимости к обобщенному решению, заданному, интегральным законом сохранения (4.4) ожидать нет оснований, поскольку в используемую разностную схему (4.10) не заложена информация о том, какой именно закон сохранения — (4.4) или (4.7), или какой-нибудь другой — положен в основу определения обобщенного решения.

Поэтому при построении разностной схемы надо использовать либо интегральный закон сохранения, соответствующий искомому обобщенному решению, например, закон (4.4), либо уравнение с искусственной вязкостью (4.9), осуществляющее при $\mu \rightarrow 0$ отбор интересующего нас обобщенного решения.

4.2.1. Схема с искусственной вязкостью

Разностная схема с искусственно введенной малой вязкостью

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

$$u_j^0 = \phi(x_j)$$

имеет решение, равномерно сходящееся при $\Delta x \rightarrow 0$ и достаточно малом Δt к искомому обобщенному решению задачи (4.1) вне сколь угодно малых окрестностей линий разрыва обобщенного решения. При этом $\mu = \mu(\Delta x)$ должно достаточно медленно стремиться к нулю при $\mu \rightarrow 0$. Различные разностные схемы, использующие искусственную вязкость, успешно применяются при газодинамических расчетах. Их недостатком является размазывание разрывов.

4.2.2. Метод характеристик.

Наиболее четко идея выделения разрыва при расчете обобщенного решения реализуется в методе характеристик, который можно считать одним из вариантов метода конечных разностей. Развитие возникающих в процессе расчета, т. е. при увеличении времени t , разрывов считается по особым формулам, использующим соотношение (4.5) на разрыве. Вне разрывов задания дифференциального уравнения во всех формах равносильны между собой. Поэтому при построении расчетных формул в точках областей гладкости можно исходить из записи закона сохранения в дифференциальной форме, т. е. из дифференциального уравнения (4.1).

Принципиальная схема одного из вариантов метода характеристик применительно к нашему примеру состоит в следующем. Отметим на оси Ox точки $x_j = j\Delta x$. Будем считать для определенности, что начальное условие задается гладкой функцией $\varphi(x)$. Из каждой точки $(x_j, 0)$ выпустим характеристику уравнения (4.1).

Предположим, для простоты, что при заданной функции $\varphi(x)$ можно выбрать столь малое Δt , что за этот промежуток времени каждая характеристика пересекается не более чем с одной из соседних характеристик.

Рассмотрим точки пересечения характеристик, выходящих из точек $(x_j, 0)$ с прямой $t = \Delta t$ и перенесем в эти точки по характеристикам значения решения $u(x_j, 0) = \varphi(x_j)$. Если на участке $0 \leq t \leq \Delta t$ никакие две характеристики не пересеклись, то делаем следующий шаг. Продолжаем характеристики до пересечения с прямой $t = 2\Delta t$ и переносим по характеристикам значения решения в точки пересечения и т.д. Если же на некотором участке $t_n < t < t_{n+1}$ две характеристики, выходящие из точек $(x_j^n, 0)$ и $(x_{j+1}^n, 0)$, пересекутся (рис. 16), то середину отрезка x_j^{n+1}, x_{j+1}^{n+1} будем считать точкой, из которой выходит зарождающийся разрыв. Точки x_j^{n+1} и x_{j+1}^{n+1} заменяем одной точкой x , приписывая ей два значения решения $u_{лев} = u(x_j^{n+1})$

и $u_{\text{прав}} = u(x_{j+1}^{n+1})$. Из точки x выпускаем линию разрыва до пересечения с прямой $t = t_{n+2}$. Угловым коэффициентом разрыва определяем из условия на разрыве (4.5). Из точки пересечения разрыва с прямой $t = t_{n+2}$ проводим характеристики назад до пересечения с прямой $t = t_{n+1}$, проведя их с угловыми коэффициентами $u_{\text{лев}}$ и $u_{\text{прав}}$ с предыдущего слоя. В точках пересечения этих характеристик с прямой $t = t_{n+1}$ с помощью интерполяции по x находим значения u и принимаем их за левое и правое значения решения в точке разрыва, лежащей на прямой t_{n+2} . Это позволяет определить новый наклон разрыва как среднее арифметическое найденных значений слева и справа и проложить разрыв еще на шаг Δt по времени.

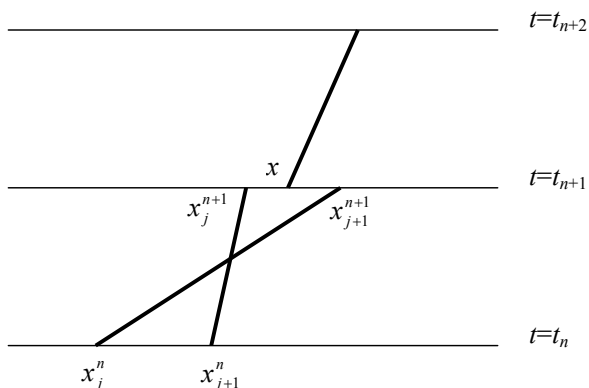


Рис. 16. Схема расчета в случае образования разрыва.

Достоинство метода характеристик в том, что он позволяет следить за разрывами и аккуратно их рассчитывать. Однако в процессе счета возникают все новые и новые разрывы. При этом малосущественные разрывы могут пересекаться, так что с течением времени картина усложняется, а поэтому и логика расчета усложняется. В этом состоит недостаток метода характеристик.

4.2.3. Дивергентные разностные схемы

Разностные схемы, не использующие искусственно введенную вязкость и не использующие условия на разрыве, как было выяснено, должны опираться на интегральные законы сохранения.

Проведем на плоскости Oxt сетку прямых $t_n = n\Delta t$, $x_j = j\Delta x$, $n = 0, 1, \dots; j = 0, \pm 1, \dots$. Отметим точками на сторонах возникающих прямоугольников их середины $(j-0.5, n+0.5)$, $(j+0.5, n+0.5)$ (рис. 17). Значение функции в точках сетки определим как среднее значение по соответствующим сторонам прямоугольника:

$$\overline{u(x_j, t_n)} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-0.5}}^{x_{j+0.5}} u(x, t_n) dx, \quad \overline{u(x_{j+0.5}, t_{n+0.5})} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u(x_{j+0.5}, t) dt$$

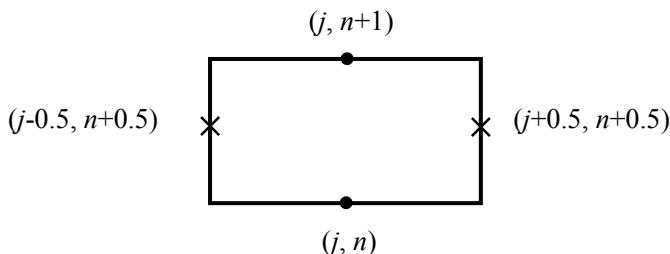


Рис. 17. Элемент разностной сетки

Приближенное решение задачи определим на той же сетке. Значения сеточной функции в точках (x_j, t_n) , лежащих на горизонтальных сторонах прямоугольников, обозначим u_j^n , а в точках $(x_{j+0.5}, t_{n+0.5})$ вертикальных сторон — через $U_{j+0.5}^{n+0.5}$.

Величину u_j^n можно считать продолженной на всю сторону $t = t_n$, $x_j < x < x_{j+1}$ прямоугольника, которому принадлежит точка (x_j, t_n) . Аналогично будем считать, что $U_{j+0.5}^{n+0.5}$, определена на всем вертикальном промежутке.

Рассмотрим в качестве контура Γ уравнения (4.4) элементарный прямоугольник сетки (рис. 17). получим:

$$\Delta x [u_j^{n+1} - u_j^n] + \frac{\Delta t}{2} \left[(U_{j+0.5}^{n+0.5})^2 - (U_{j-0.5}^{n+0.5})^2 \right] = 0 \quad (4.11)$$

Эта схема позволяет вычислить значение u_j^n по значениям $U_{j+0.5}^{n+0.5}$. Независимо от конкретного способа вычисления величины $U_{j+0.5}^{n+0.5}$ разностная схема вида (4.11) обладает *свойством дивергентности*, которое состоит в следующем. Проведем в полуплоскости $t \geq 0$ какой-либо замкнутый несамопересекающийся контур, целиком состоящий из сторон сеточных многоугольников (рис. 18). Этот контур ограничивает некоторую область, составленную из сеточных прямоугольников. Просуммируем почленно все уравнения (4.11), относящиеся к прямоугольникам, составляющим область.

Все величины уравнений (4.11) определенные на сторонах сеточных прямоугольников, которые не лежат на границе области, после суммирования уравнений взаимно уничтожатся.

Действительно, каждая из этих сторон принадлежит двум соседним прямоугольникам, так что интегрирование функции по ней встречается дважды и ведется в противоположных направлениях (рис. 18).

Разностные схемы, при суммировании которых по точкам сеточной области остаются только алгебраические суммы значений неизвестных или функций от них вдоль границы области, называют *дивергентными* или *консервативными*. Такие схемы аналогичны дифференциальным уравнениям дивергентного вида

$$\operatorname{div} \Phi \equiv \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0,$$

при почленном интегрировании которых по двумерной области D в левой части возникает контурный интеграл (4.4). Разностная схема (4.10) недивергентна, схема (4.11) дивергентна.

Чтобы схема (4.11) приобрела смысл, надо указать способ вычисления величин $U_{j+0.5}^{n+0.5}$ по величинам u_j^n . В схеме С. К. Годунова для этого используется решение задачи о «распаде разрыва».

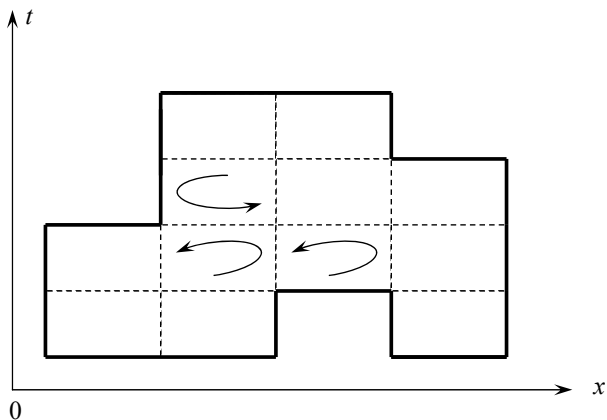


Рис. 18. Разбиение области решения

Пусть в начальный момент решение $u(x,0)$ задано условиями

$$u = \begin{cases} u_{лев}, & \text{при } x < 0 \\ u_{прав}, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

где $u_{прав} = const$, $u_{лев} = const$. Тогда можно найти соответствующее обобщенное решение. (п. 4.1.5). Нам важно знать значение $U = u(0, t)$ решения $u(x, t)$ при $x = 0$. Легко убедиться в том, что на прямой $x = 0$ решение принимает значения либо $u_{прав}$, либо $u_{лев}$, либо 0 в зависимости от начальных данных. Например, при $u_{лев} > 0$, $u_{прав} > 0$ будет $u(0, t) = u_{лев}$, а при $u_{лев} < 0$, $u_{прав} < 0$ будет $u(0, t) = u_{прав}$. Величина $U_{j+0.5}^{n+0.5}$ в схеме (4.11) будет определяться из задачи о распаде разрыва, возникающего на границе $x = x_{j+0.5}$ каждого двух участков, где заданы постоянные значения $u_j^n (= u_{лев})$ и $u_{j+1}^n (= u_{прав})$.

5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И ЕЕ СВОЙСТВА

Система уравнений, описывающая нестационарное течение сжимаемого невязкого газа в одномерном приближении имеет следующий вид [7]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

Здесь \mathbf{U} - вектор консервативных переменных, \mathbf{F} - вектор потоков:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \end{pmatrix}$$

где ρ - плотность, u - скорость, E - полная энергия, $E = e + \frac{1}{2}u^2$, p -

давление, H - энтальпия, $H = E + \frac{p}{\rho}$.

Уравнения системы (5.1) носят название уравнения Эйлера и представляют собой дифференциальную форму законов сохранения. Поскольку в системе насчитывается три уравнения, а неизвестных четыре ρ , u , p , E , то необходимо привлечь одно дополнительное соотношение. В качестве такого соотношения выступает уравнение состояния, которое для совершенного газа имеет вид: $E = \frac{p}{\rho(k-1)}$, k - отношение удельных теплоемкостей

при постоянном давлении и при постоянном объеме.

Система (5.1) является системой нелинейных относительно консервативных переменных уравнений, и может быть представлена в следующей форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad (5.2)$$

где $A(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$ - матрица Якоби.

Чтобы найти матрицу Якоби, удобно \mathbf{U} и \mathbf{F} записать через консервативные переменные ρ , $m = \rho u$, $\varepsilon = \rho E$:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ \varepsilon \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} \frac{3-k}{2} + (k-1)\varepsilon \\ \frac{km\varepsilon}{\rho} - \frac{(k-1)m^3}{2\rho^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда дифференцируя каждую строку вектора \mathbf{F} относительно строк вектора \mathbf{U} , получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-k}{2} \frac{m^2}{\rho^2} & \frac{m}{\rho}(3-k) & k-1 \\ -\frac{km\varepsilon}{\rho^2} + \frac{(k-1)m^3}{\rho^3} & \frac{k\varepsilon}{\rho} - \frac{3}{2}(k-1)\frac{m^2}{\rho^2} & \frac{km}{\rho} \end{pmatrix}$$

или

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-k}{2}u^2 & (3-k)u & k-1 \\ -kuE + (k-1)u^3 & kE - \frac{3}{2}(k-1)u^2 & ku \end{pmatrix}.$$

Как показано в [6] вектор потоков \mathbf{F} выражается через матрицу Якоби и вектор консервативных переменных в следующем виде: $\mathbf{F} = A\mathbf{U}$. Тогда система (5.1) может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial A(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (5.3)$$

Матрица Якоби приводится к диагональному виду с помощью преобразования подобия [8]: $A=LAR$, где A - диагональная матрица, составленная из собственных чисел матрицы A , L - матрица левых собственных векторов-строк, R - матрица правых собственных векторов-столбцов, причем $L=R^{-1}$ - матрица обратная R . Собственные числа матрицы A находятся из решения уравнения $\det(A - \Lambda U) = 0$, где U - единичная матрица. Для нахождения собственных векторов, соответствующих собственным числам, решают систему уравнений: $RA=AR$. В полученной системе уравнений неизвестные из одного и того же столбца матрицы R могут быть выражены друг через друга, поэтому способов представления матрицы R и, следовательно, L может быть бесконечное множество. Для системы одномерных газодинамических уравнений существуют три различных собственных числа u , $u+c$, $u-c$. По физическому смыслу они соответствуют скоростям распространения слабого возмущения в газе.

Если диагональную матрицу собственных чисел записать как

$$\Lambda = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u+c & 0 \\ 0 & 0 & u-c \end{pmatrix},$$

то матрицы R и L имеют вид:

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2} & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ -\frac{u}{c^2} & \frac{u+c}{2c^2} & \frac{u-c}{2c^2} \\ -\frac{u^2}{2c^2} & \frac{H+uc}{2c^2} & \frac{H-uc}{2c^2} \end{pmatrix},$$

$$L = R^{-1} = \begin{pmatrix} (u^2 - H)\chi & -\chi u & \chi \\ -cu + \frac{u^2}{2}\chi & c - u\chi & \chi \\ cu + \frac{u^2}{2}\chi & -c - u\chi & \chi \end{pmatrix}$$

где c – местная скорость звука, $c = \sqrt{kp/\rho}$; $\chi = k - 1$.

Матрица левых собственных векторов L имеет определенный физический смысл, а именно, она преобразует дифференциалы консервативных газодинамических переменных $d\mathbf{U}$ в дифференциалы Римановых переменных $d\mathbf{W}$:

$$Ld\mathbf{U} = L \begin{pmatrix} dp \\ d\rho u \\ d\rho E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dp - c^2 d\rho \\ dp + \rho c du \\ dp - \rho c du \end{pmatrix} \equiv d\mathbf{W}. \quad (5.4)$$

Зная правые собственные векторы-столбцы \mathbf{R}_i матрицы R , можно определить консервативные переменные:

$$\mathbf{U} = \gamma_1 \mathbf{R}_1 + \gamma_2 \mathbf{R}_2 + \gamma_3 \mathbf{R}_3, \quad (5.5)$$

где

$$\gamma_1 = -\frac{k-1}{k} \rho c^2; \quad \gamma_2 = \frac{1}{k} \rho c^2; \quad \gamma_3 = \frac{1}{k} \rho c^2.$$

5.1. Решение уравнений газовой динамики методом характеристик

Запишем систему уравнений Эйлера в форме (5.2)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0.$$

Домножим ее слева на матрицу левых собственных векторов-строк L и учтем тот факт, что $L \cdot A(\mathbf{U}) \cdot R = \Lambda$, а $R \cdot L$ – единичная матрица, получим:

$$L \frac{\partial U}{\partial t} + LA(U)R \cdot L \frac{\partial U}{\partial x} = L \frac{\partial U}{\partial t} + A \cdot L \frac{\partial U}{\partial x} = 0 .$$

Тогда в силу (5.4) получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \quad (5.6)$$

В характеристической форме система уравнений (5.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} - c^2 \frac{d\rho}{dt} &= 0 \quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt} = u ; \\ \frac{dp}{dt} + \rho c \frac{du}{dt} &= 0 \quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt} = u + c ; \\ \frac{dp}{dt} - \rho c \frac{du}{dt} &= 0 \quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt} = u - c . \end{aligned} \quad (5.7)$$

Предполагая, что решение системы (5.6) не содержит разрывов, рассмотрим задачу Коши для системы (5.7) с начальными условиями:

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) , \quad u(x, 0) = u_0(x) , \quad p(x, 0) = p_0(x) .$$

Разобьем область изменения независимых переменных точками с координатами (x_i, t_n) таким образом, что $x_i - x_{i-1} = h$, а $t_{n+1} - t_n = \tau$, причем h и τ – постоянные. Фрагмент такого разбиения показан на рис. 19. Решение на временном слое $t=t_n$ в точках x_i известно. (Для начального момента времени $n = 0$). Требуется получить решение в точке $M(x_i, t_{n+1})$. Для определенности будем предполагать, что течение дозвуковое и направлено слева направо.

Из точки M выпустим характеристические линии до пересечения с прямой $t = t_n$. Координаты точек пересечения обозначим x_1 – для $\frac{dx}{dt} = u$, x_2 – для $\frac{dx}{dt} = u + c$, x_3 – для $\frac{dx}{dt} = u - c$.

При выполнении условия $\tau \leq \frac{h}{\max(u + c)}$ координаты точек пере-

сечения будут удовлетворять следующим неравенствам:

$$x_{i-1} \leq x_1 \leq x_i , \quad x_{i-1} \leq x_2 \leq x_i , \quad x_i \leq x_3 \leq x_{i+1} .$$

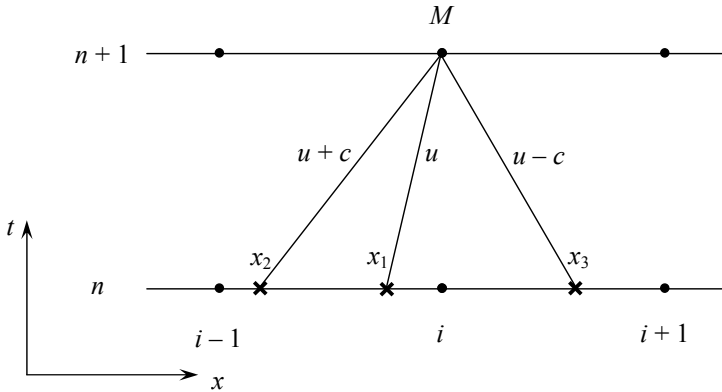


Рис. 19. Метод характеристик

Тогда в этих точках можно найти значения любой функции с помощью линейной интерполяции по значениям функций в близлежащих узлах по формулам:

для точек с координатами x_1 и x_2 :

$$a_{1,2} = a_i^n + \frac{a_i^n - a_{i-1}^n}{h}(x_{1,2} - x_{i-1}) \quad (5.8 \text{ а})$$

для точки с координатой x_3 :

$$a_3 = a_i + \frac{a_{i+1}^n - a_i^n}{h}(x_3 - x_i) \quad (5.8 \text{ б})$$

Расписывая уравнения характеристик в конечно-разностном виде

$$\frac{x_i - x_1}{\tau} = u_1, \quad \frac{x_i - x_2}{\tau} = u_2 + c_2, \quad \frac{x_3 - x_i}{\tau} = u_3 - c_3,$$

и используя формулы (5.8) для интерполированных значений a_i , получим выражения для нахождения x_1 , x_2 и x_3 .

$$x_1 = x_i - \tau \frac{u_i^n}{1 + \frac{\tau}{h}(u_i^n - u_{i-1}^n)};$$

$$x_2 = x_i - \tau \frac{u_i^n + c_i^n}{1 + \frac{\tau}{h}(u_i^n + c_i^n - u_{i-1}^n - c_{i-1}^n)}; \quad (5.9)$$

$$x_3 = x_i - \tau \frac{u_i^n - c_i^n}{1 + \frac{\tau}{h}(u_{i+1}^n - c_{i+1}^n - u_i^n + c_i^n)}$$

Формулы (5.9) и (5.8) позволяют получить значения функций ρ , u , p , c в трех точках с координатами (x_i, t_n) , (x_1, t_n) и (x_3, t_n) .

Распишем в конечно-разностном виде соотношения на характеристиках (5.7), причем соотношение $dp - c^2 d\rho = 0$ – по точкам (x_1, t_n) и (x_i, t_{n+1}) , соотношение $dp + \rho c du = 0$ – по точкам (x_2, t_n) и (x_i, t_{n+1}) , соотношение $dp - \rho c du = 0$ – по точкам (x_3, t_n) и (x_i, t_{n+1}) :

$$p_i^{n+1} - p_1 - c_1^2 (\rho_i^{n+1} - \rho_1) = 0,$$

$$p_i^{n+1} - p_2 + \rho_2 c_2 (u_i^{n+1} - u_2) = 0,$$

$$p_i^{n+1} - p_3 - \rho_3 c_3 (u_i^{n+1} - u_3) = 0.$$

Разрешая полученную линейную систему уравнений относительно ρ , u , p , получим:

$$u_i^{n+1} = \frac{p_2 - p_3 + \rho_2 c_2 u_2 + \rho_3 c_3 u_3}{\rho_2 c_2 + \rho_3 c_3}, \quad p_i^{n+1} = \frac{u_2 - u_3 + \frac{p_2}{\rho_2 c_2} + \frac{p_3}{\rho_3 c_3}}{\frac{1}{\rho_2 c_2} + \frac{1}{\rho_3 c_3}},$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_1 + \frac{u_2 - u_3 + \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 c_2} + \frac{p_3 - p_1}{\rho_3 c_3}}{\frac{c_1^2}{\rho_2 c_2} + \frac{c_1^2}{\rho_3 c_3}}.$$

Для простоты вычислений удобнее пользоваться формулами:

$$\begin{aligned}
 u_i^{n+1} &= \frac{p_2 - p_3 + \rho_2 c_2 u_2 + \rho_3 c_3 u_3}{\rho_2 c_2 + \rho_3 c_3}, \\
 p_i^{n+1} &= p_2 - \rho_2 c_2 (u_i^{n+1} - u_2), \\
 \rho_i^{n+1} &= \rho_1 + \frac{p_i^{n+1} - p_1}{c_1^2}.
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

В случае сверхзвукового течения для точки с координатой x_3 будет выполнено неравенство $x_{i-1} \leq x_3 \leq x_i$, и вместо формулы (5.8б) нужно будет использовать формулу (5.8а). Формулы (5.9) и (5.10) останутся неизменными.

5.2. Реализация граничных условий для метода характеристик

В соответствие с направлением характеристических линий на границах задаются столько условий, сколько характеристик входит в область решения. Для дозвукового течения на входной границе необходимо задать два крайевых условия, а на выходной границе одно условие. При сверхзвуковом течении на входной границе задается три условия, а на выходной условия не задаются.

Пусть на *левой входной границе* заданы расход G_0 и энтальпия H_0 . Из области решения на границу приходит характеристика $\frac{dx}{dt} = u - c$ (рис. 20 а), вдоль которой выполняется соотношение $dp - \rho c du = 0$. Тогда алгоритм нахождения значений ρ_0^{n+1} , u_0^{n+1} , p_0^{n+1} на левой границе области следующий:

1) Из (5.9) находим координаты точки пересечения характеристики с линией $t = t_n$:

$$x_3 = x_0 - \tau \frac{u_0^n - c_0^n}{1 + \frac{\tau}{h} (u_1^n - c_1^n - u_0^n + c_0^n)}.$$

2) Из (5.8б) определяем ρ_3 , u_3 , p_3 в этой точке по формулам:

$$a_3 = a_0^n + \frac{a_1^n - a_0^n}{h} (x_3 - x_0).$$

3) Записываем соотношение на характеристике в разностном виде

$$p_0^{n+1} - p_3 - \rho_3 c_3 (u_0^{n+1} - u_3) = 0.$$

и привлекаем краевые условия

$$G_0 = \rho_0^{n+1} u_0^{n+1}, \quad H_0 = \frac{k}{k-1} \frac{p_0^{n+1}}{\rho_0^{n+1}} + \frac{(u_0^{n+1})^2}{2}.$$

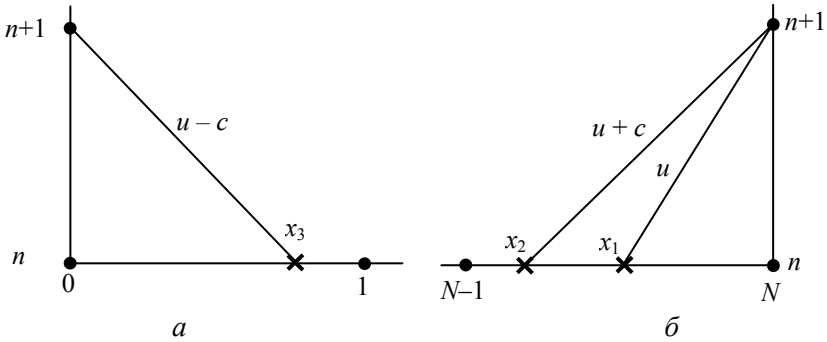


Рис. 20. Расчет параметров на границах области:
a – левая граница; *б* – правая граница.

4) Обозначив выражение $p_3 - \rho_3 c_3 u_3$ через F_3 , разрешаем последние три уравнения относительно ρ_0^{n+1} , u_0^{n+1} , p_0^{n+1} :

$$u_0^{n+1} = \frac{-\frac{k}{k-1} \frac{F_3}{G_0} + \sqrt{\left(\frac{k}{k-1} \frac{F_3}{G_0}\right)^2 + 2H_0 \left(1 + \frac{\rho_3 c_3}{G_0} \frac{2k}{k-1}\right)}}{1 + \frac{\rho_3 c_3}{G_0} \frac{2k}{k-1}};$$

$$p_0^{n+1} = F_3 + \rho_3 c_3 u_0^{n+1}; \quad \rho_0^{n+1} = \frac{G_0}{u_0^{n+1}},$$

Пусть на *правой выходной границе* задано давление p_e . На правую границу из области приходит две характеристики, рис. 20 б: $\frac{dx}{dt} = u$ и $\frac{dx}{dt} = u + c$, вдоль которых, соответственно $dp - c^2 d\rho = 0$ и $dp + \rho c du = 0$. Алгоритм нахождения значений ρ_N^{n+1} , u_N^{n+1} на правой границе области:

1) Из (5.9) находим координаты точек пересечения характеристик с линией $t = t_n$:

$$x_1 = x_N - \tau \frac{u_N^n}{1 + \frac{\tau}{h}(u_N^n - u_{N-1}^n)};$$

$$x_2 = x_N - \tau \frac{u_N^n + c_N^n}{1 + \frac{\tau}{h}(u_N^n + c_N^n - u_{N-1}^n - c_{N-1}^n)};$$

2) Полагая $i=N$, из (5.8а) определяем ρ_1 , u_1 , p_1 и ρ_2 , u_2 , p_2 в этих точках.

3) Записываем соотношения на характеристиках в разностном виде:

$$p_N^{n+1} - p_1 - c_1^2 (\rho_N^{n+1} - \rho_1) = 0,$$

$$p_N^{n+1} - p_2 + \rho_2 c_2 (u_N^{n+1} - u_2) = 0.$$

4) Учитывая тот факт, что на границе $p_N^{n+1} = p_e$, из последних двух уравнений получаем:

$$\rho_N^{n+1} = \rho_1 + \frac{p_N^{n+1} - p_1}{c_1^2}, \quad u_N^{n+1} = u_2 - \frac{p_N^{n+1} - p_2}{\rho_2 c_2}.$$

6. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ТИПА СХЕМЫ С.К.ГОДУНОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

6.1. Общие положения

Разобьем область решения по пространству $0 \leq x \leq 1$ (рис. 21) на N отрезков (ячеек). Концы отрезков, называемых гранями ячеек, пронумеруем полуцелыми индексами от $1/2$ до $N+1/2$, а середины каждой ячейки пронумеруем целыми индексами от 1 до N . Тогда размер i -ой ячейки (шаг по пространству) определится как $h = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. При этом $x_{1/2} = 0$, $x_{N+1/2} = 1$. Разобьем временной интервал $0 \leq t \leq T$ на K временных слоев так, чтобы 0 -ой временной слой соответствовал начальному моменту времени, тогда n -ый временной слой будет соответствовать времени $t_n = n\tau$, где τ - шаг по времени, $\tau = T/K$.

В плоскости (x, t) выделим прямоугольник D с координатами $x_{i-1/2}$, $x_{i+1/2}$ по пространству, и координатами t_n , t_{n+1} по времени (рис. 21). Проинтегрируем уравнение (5.1) по площади выделенного прямоугольника:

$$\iint \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} \right] dx dt = 0$$

В соответствии с формулой Остроградского-Гаусса можно записать

$$\oint U dx - F(U) dt = 0 \tag{6.1.1}$$

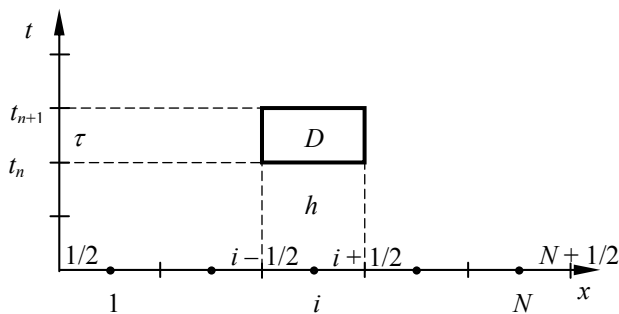


Рис. 21. Схема дискретизации области

Уравнение (6.1) есть не что иное, как интегральная форма законов сохранения (5.1). Интегрируя (6.1) по контуру прямоугольника D, обходя при этом его против часовой стрелки, получим:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x, t_n) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x, t_{n+1}) dx - \\ - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, t)) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i-1/2}, t)) dt = 0 \quad (6.1.2)$$

Предположим, что внутри интервала $]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ на n -ом временном слое (нижняя сторона прямоугольника D) функция $\mathbf{U}(x, t_n)$ принимает постоянное значение U_i^n , а на временном интервале $]t_n, t_{n+1}[$ в точке $x_{i+1/2}$ (правая сторона прямоугольника D) функция $\mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, t))$ принимает постоянное значение $\mathbf{F}_{i+1/2}$, тогда

$$U_i^n = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x, t_n) dx, \quad \mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, t)) dt.$$

Аналогичные выражения получаются и для U_i^{n+1} и $\mathbf{F}_{i-1/2}$. При сделанных предположениях (6.2) запишется в следующем виде.

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{h} = 0 \quad (6.1.3)$$

Решение системы (6.3) проводится в два этапа. Вначале, по известным на нижнем временном слое t_n значениям параметров U_i^n вычисляются потоки $\mathbf{F}_{i-1/2}$ на гранях ячеек, $i=1, \dots, N$, затем с помощью (6.3) вычисляют U_i^{n+1} на верхнем временном слое t_{n+1} .

В 50-ых годах С.К.Годуновым [9] было предложено использовать решение задачи о распаде произвольного разрыва (задача Римана) [10] для нахождения значений потоков $\mathbf{F}_{i-1/2}$ на гранях разностных ячеек.

Реализация задачи о распаде произвольного разрыва на ЭВМ является дорогостоящей процедурой с вычислительной точки

зрения, и к тому же большая часть информации о структуре распада теряется в результате осреднения по ячейке. Позже, рядом авторов (Роу, Эйнфельдт) [11, 12] были предложены приближенные решения задачи о распаде произвольного разрыва, которые позволили значительно сократить число вычислений для получения потоков на гранях ячеек.

6.2. Нахождение потков по методу С.К.Годунова

Известно, что разрывы в газе могут быть устойчивыми только тогда, когда на них выполняются определенные соотношения (условия совместности). Если эти условия не выполнены, то происходит распад этого разрыва на устойчивые. Задача о распаде произвольного разрыва была подробно проанализирована Кочиным Н.Е. в 1928 году [10]. Приведем алгоритм решения этой задачи, подробно описанный в [7].

На рис. 22 в плоскости x, t схематически изображены возможные картины течения, возникающие при распаде. Здесь приняты следующие обозначения: УВ – ударная волна, ЦВР-центрированная волна разряжения, КР – контактный разрыв.

Пусть ρ_1, u_1, p_1 – параметры газа слева от разрыва, а ρ_2, u_2, p_2 – параметры газа справа от разрыва. В области слева и справа от контактного разрыва давление P и нормальная скорость U принимают постоянные значения, при этом плотность терпит разрыв. Плотность газа слева от контактного разрыва обозначим через R_1 , а справа – через R_2 .

Используя условие Ренкина-Гюгоньо на ударной волне и постоянство массовой скорости a_i при переходе через ударную волну, получим следующие соотношения:

для левой ударной волны

$$U = u_1 - \frac{P - p_1}{a_1}; \quad (6.2.1)$$

где

$$a_1 = \sqrt{\rho_1 \left[\frac{k+1}{2} P + \frac{k-1}{2} p_1 \right]}. \quad (6.2.2)$$

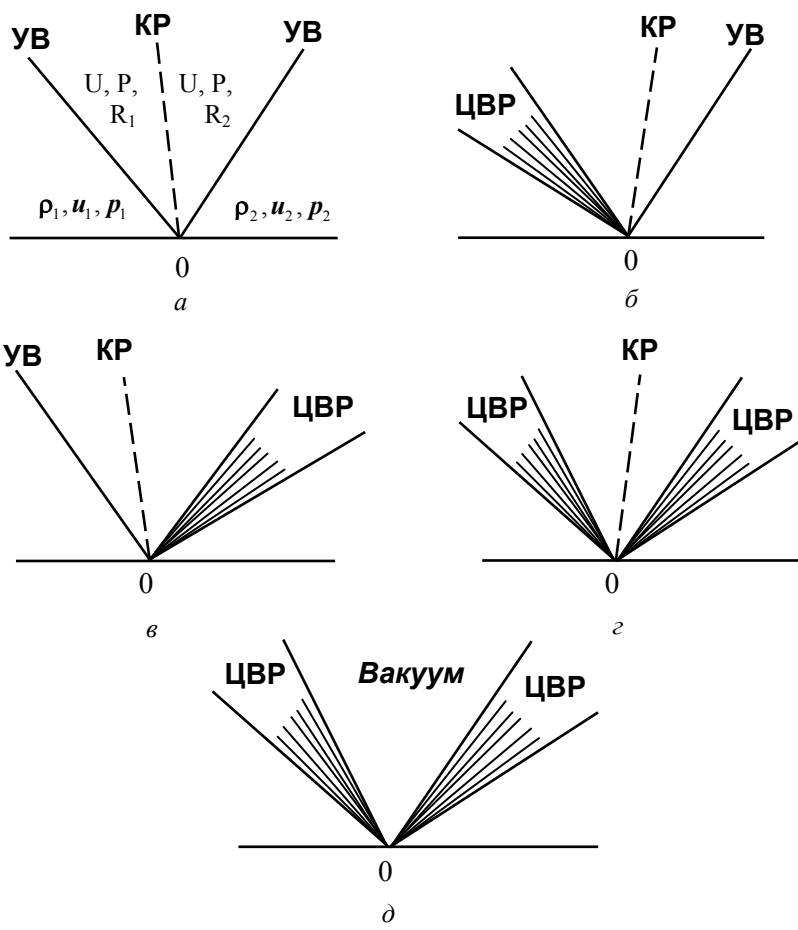


Рис. 22. Возможные конфигурации распада разрыва

для правой ударной волны

$$U = u_2 + \frac{P - p_2}{a_2}; \tag{6.2.3}$$

где

$$a_2 = \sqrt{\rho_2 \left[\frac{k+1}{2} P + \frac{k-1}{2} p_2 \right]}. \quad (6.2.4)$$

Для ударных волн $P > p_i, i=1,2$

Из условия непрерывности энтропийной функции и Риманова инварианта в волне разрежения, получим уравнения аналогичные (6.2.1) и (6.2.3), в которых a_1 и a_2 будут условными массовыми скоростями и выражаются как:

$$a_1 = \frac{k-1}{2k} \rho_1 c_1 \frac{1 - \frac{P}{p_1}}{1 - \left(\frac{P}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{2k}}}; \quad a_2 = \frac{k-1}{2k} \rho_2 c_2 \frac{1 - \frac{P}{p_2}}{1 - \left(\frac{P}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{2k}}}; \quad (6.2.5)$$

Для волн разряжения $P < p_i, i=1,2$

Соотношения (6.2.1)-(6.2.5) позволяют определить давление P и скорость U по обе стороны контактного разрыва, если известна конфигурация распада разрыва. Для определения картины распада рассмотрим функцию $F(P)$, полученную из (6.2.1) и (6.2.3) путем исключения U :

$$F(P) \equiv f(P, p_1, \rho_1) + f(P, p_2, \rho_2) = u_1 - u_2, \quad (6.2.6)$$

где

$$f(P, p_i, \rho_i) = \begin{cases} \frac{P - p_i}{\rho_i c_i \sqrt{\frac{k+1}{2k} \pi_i + \frac{k-1}{2k}}}, & P \geq p_i \\ \frac{2}{k-1} c_i \left(\pi_i^{\frac{k-1}{2k}} - 1 \right), & P < p_i \end{cases}; \quad \pi_i = \frac{P}{p_i}; \quad c_i = \sqrt{k \frac{p_i}{\rho_i}}.$$

Функция $F(P)$ является монотонно возрастающей и выпуклой, т.к. $f'(P, p_i, \rho_i) > 0$ и $f''(P, p_i, \rho_i) < 0$. Для простоты положим $p_1 < p_2$. В противном случае можно изменить направление отсчета на оси x , т.е. знаки у скоростей u_1, u_2 и поменять местами индексы 1 и 2 для

исходных параметров, а после проведения расчета проделать обратную операцию.

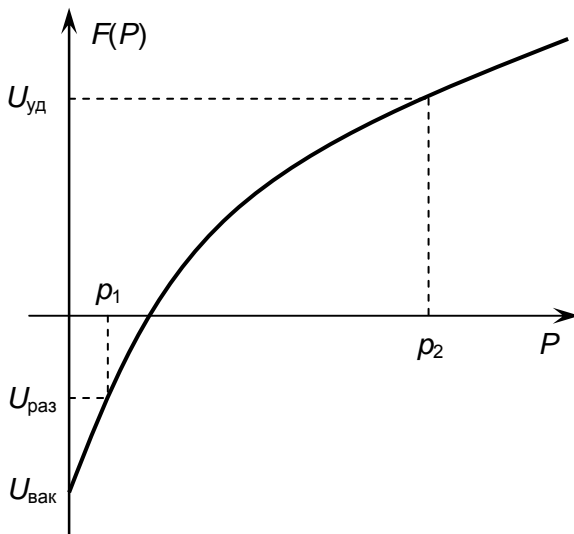


Рис. 23. Поведение функции $F(P)$

Из графика функции $F(P)$ (рис. 23) видно, что в зависимости от величины $u_1 - u_2$ возможны следующие ситуации.

$u_1 - u_2 > U_{уд}$. В этом случае $P > p_2$, $P > p_1$. Возникают две ударные волны (рис. 22 а)

$U_{раз} < u_1 - u_2 < U_{уд}$. В этом случае $P > p_1$ и $P < p_2$. Возникают ударная волна и центрированная волна разряжения (рис. 22 в). Случай $P > p_2$ и $P < p_1$ (рис. 22 б) аналогичен случаю рис. 22 в.

$U_{вак} < u_1 - u_2 < U_{раз}$. В этом случае $P < p_1$ и $P < p_2$. Возникают две центрированные волны разряжения (рис. 22 г)

$u_1 - u_2 < U_{вак}$. Возникает область вакуума $P=0$, $R=0$. (рис. 22 д).

Здесь

$$U_{вак} = F(0) = -\frac{2}{k-1}(c_1 + c_2);$$

$$U_{\text{раз}} = F(p_1) = -\frac{2c_2}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \right];$$

$$U_{\text{во}} = F(p_2) = \frac{p_2 - p_1}{\sqrt{\rho_1 \left[\frac{k+1}{2} p_2 + \frac{k-1}{2} p_1 \right]}}.$$

Итак, при выполнении условия $u_1 - u_2 \geq U_{\text{вак}}$ уравнение (6.2.6) имеет единственное решение.

Поскольку уравнение (6.2.6) нелинейное, то для нахождения его корня целесообразно использовать метод Ньютона, причем в качестве начальных приближений корня удобно использовать следующие значения:

для конфигурации УВ-УВ:

$$P^{(0)} = \frac{p_1 \rho_2 c_2 + p_2 \rho_1 c_1 + (u_1 - u_2) \rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2};$$

для конфигурации УВ-ЦВР:

$$P^{(0)} = p_1.$$

для конфигурации ЦВР-ЦВР:

$$P^{(0)} = p_1 \cdot 10^{-5}.$$

После определения конфигурации распада и нахождения давления P , определяется скорость контактного разрыва

$$U = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + p_1 - p_2}{a_1 + a_2},$$

где a_1 и a_2 вычисляются по каким либо из

формул (6.2.2), (6.2.4), (6.2.5) в зависимости от конфигурации распада.

Скорость левой ударной волны определяется как $D_1 = u_1 - \frac{a_1}{\rho_1}$, а

правой $D_2 = u_2 + \frac{a_2}{\rho_2}$, при этом

$$R_1 = \frac{\rho_1 a_1}{a_1 - \rho_1(u_1 - U)}; \quad R_2 = \frac{\rho_2 a_2}{a_2 + \rho_2(u_2 - U)}.$$

Для левой волны разрежения скорости крайних характеристик её ограничивающих определяются как $D_1 = u_1 - c_1$, $D_1^* = U - c_1^*$, где

$$c_1^* = c_1 + \frac{k-1}{2}(u_1 - U), \quad \text{а плотность } R_1 = k \frac{P}{(c_1^*)^2}.$$

Для правой волны разрежения: $D_2 = u_2 + c_2$, $D_2^* = U + c_2^*$, $R_2 = k \frac{P}{(c_2^*)^2}$,

где $c_2^* = c_2 - \frac{k-1}{2}(u_2 - U)$.

Обозначим через U_x , P_x , R_x соответственно, скорость, давление и плотность на грани расчетной ячейки. Возможны следующие ситуации:

Для любых конфигураций:

- 1) Если $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, тогда $U_x = u_1$; $P_x = p_1$; $R_x = \rho_1$.
- 2) Если $D_1 < 0$, $D_2 < 0$, тогда $U_x = u_2$; $P_x = p_2$; $R_x = \rho_2$.

Для конфигурации УВ-УВ.

$$D_1 < 0, D_2 > 0; U_x = U; P_x = P.$$

- 1) Если $U > 0$ тогда $R_x = R_1$.
- 2) Если $U < 0$ тогда $R_x = R_2$.

Для конфигурации УВ-ЦВР.

$$D_1 < 0, D_2 > 0.$$

- 1) Если $U > 0$ тогда $U_x = U$; $P_x = P$; $R_x = R_1$.
- 2) Если $U < 0$, $D_2^* > 0$, тогда $U_x = U$; $P_x = P$; $R_x = R_2$.
- 3) Если $U < 0$, $D_2^* < 0$, тогда грань ячейки попадает в правую волну разрежения и скорость потока будет звуковой.

$$U_x = \frac{k-1}{k+1}u_2 - \frac{2}{k+1}c_2; R_x = \rho_2 \left(\frac{U_x}{c_2} \right)^{\frac{2}{k-1}}; P_x = R_x \frac{U_x^2}{k}.$$

Для конфигурации ЦВР-ЦВР.

$$D_1 < 0, D_2 > 0.$$

1) Если $U > 0, D_1^* < 0$ тогда $U_x = U; P_x = P; R_x = R_1$.

2) Если $U > 0, D_1^* > 0$ тогда грань ячейки попадает в левую волну разрежения и скорость потока будет звуковой.

$$U_x = \frac{k-1}{k+1}u_1 + \frac{2}{k+1}c_1; R_x = \rho_1 \left(\frac{U_x}{c_1} \right)^{\frac{2}{k-1}}; P_x = R_x \frac{U_x^2}{k}$$

3) Если $U < 0, D_2^* > 0$, тогда $U_x = U; P_x = P; R_x = R_2$.

4) Если $U < 0, D_2^* < 0$, тогда грань ячейки попадает в правую волну разрежения и скорость потока будет звуковой.

$$U_x = \frac{k-1}{k+1}u_2 - \frac{2}{k+1}c_2; R_x = \rho_2 \left(\frac{U_x}{c_2} \right)^{\frac{2}{k-1}}; P_x = R_x \frac{U_x^2}{k}.$$

После нахождения значений параметров на гранях ячейки определяются потоки $\mathbf{F}_{i+1/2}$, и по формуле (6.1.3) вычисляются значения переменных на новом временном слое.

Условие устойчивости разностной схемы получается из анализа системы уравнений, полученной в результате линеаризации (5.1) (акустическое приближение) и имеет следующий физический смысл. Шаг по времени τ не должен быть больше времени τ^* , которое требуется самой быстрой волне, образовавшейся в результате распада разрыва, на прохождение расстояния равного длине ячейки h . Для i -ой ячейки это условие выглядит как

$$\tau_i < \tau_i^* \frac{h_i}{\max(D_{2,i-1/2}, D_{1,i+1/2})}$$

Поскольку в различных ячейках время τ_i^* разное, то общее условие для всей области будет иметь вид: $\tau < \tau^* = \min_i \tau_i^*$.

6.3. Реализация граничных условий для метода .К.Годунова

Ограничимся случаем дозвукового течения $0 < u < c$, когда на входе в область решения заданы два граничных условия – расход G_0 и энтальпия H_0 , а на выходе задано давление p_2 . На рис. 24 показана конфигурация картин распада разрыва на границах области.

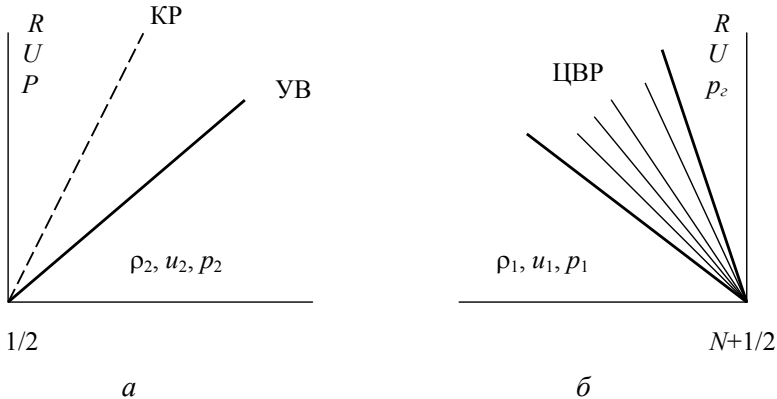


Рис. 24. Распад разрыва на границах области:
a – левая входная граница; *б* – правая выходная граница.

Для левой границы запишем соотношение на правой УВ:

$$U = u_2 + \frac{P - p_2}{a_2}; \quad a_2 = \sqrt{\rho_2 \left[\frac{k+1}{2} P + \frac{k-1}{2} p_2 \right]}$$

и граничные условия:

$$G_0 = RU, \quad H_0 = \frac{k}{k-1} \frac{P}{R} + \frac{U^2}{2}.$$

Из этих трех уравнений получается уравнение для нахождения давления P на границе:

$$\frac{k}{k-1} \frac{P}{G_0} U(P) + \frac{[U(P)]^2}{2} - H_0 = 0,$$

где $U(P) = u_2 + \frac{P - p_2}{\sqrt{\rho_2 \left[\frac{k+1}{2} P + \frac{k-1}{2} p_2 \right]}}$. Плотность R на границе

определяется из условия $R = \frac{G_0}{U(P)}$.

Для правой границы из условия непрерывности инварианта Римана и изоэнтропийности течения на левой ЦВР получают следующие соотношения:

$$U = u_1 - \frac{P - p_1}{a_1},$$

где $a_1 = \frac{k-1}{2k} \rho_1 c_1 \frac{1 - \frac{P}{p_1}}{1 - \left(\frac{P}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{2k}}}$, $P = p_2$.

$$R = k \frac{P}{(c_1^*)^2}, \text{ где } c_1^* = c_1 + \frac{k-1}{2}(u_1 - U).$$

Замечание.

В случае звукового истечения из области (когда граница попадает внутрь ЦВР) значения «больших» величин на границах находятся с привлечением условия $U = C \equiv \sqrt{k \frac{P}{R}}$. Тогда

$$U = \frac{k-1}{k+1}u_1 + \frac{2}{k+1}c_1; R = \rho_1 \left(\frac{U}{c_1} \right)^{\frac{2}{k-1}}; P = R \frac{U^2}{k}.$$

6.4. Нахождение потков по методу Роу

Приближенный метод Роу [11] основан на точном решении линеаризованной задачи распада разрыва. Линеаризованная форма уравнения (5.2) имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A_{\approx} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

где $A_{\approx} = A_{i+1/2}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1})$ – матрица, полученная в результате линеаризации Якобиана $A(\mathbf{U})$ на грани $i+1/2$. Согласно Роу матрица A должна удовлетворять следующим условиям.

- 1) $\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i = A_{i+1/2}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i)$;
- 2) $A_{i+1/2}$ диагонализуема и её собственные значения вещественны.
- 3) $A_{i+1/2}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = A(\mathbf{U})$.

Эти условия обеспечивают консервативность разностной схемы и непротиворечивость исходной системе гиперболических уравнений.

Роу показал, что в случае уравнений Эйлера всегда возможно получить линеаризованную матрицу Якоби, если вычислить её по средним значениям, определенных следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{i+1/2} &= \frac{\rho_i \sqrt{\rho_i} + \rho_{i+1} \sqrt{\rho_{i+1}}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_{i+1}}}; \\ u_{i+1/2} &= \frac{u_i \sqrt{\rho_i} + u_{i+1} \sqrt{\rho_{i+1}}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_{i+1}}}; \\ H_{i+1/2} &= \frac{H_i \sqrt{\rho_i} + H_{i+1} \sqrt{\rho_{i+1}}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_{i+1}}}; \\ c_{i+1/2}^2 &= (k-1) \left(H_{i+1/2} - \frac{u_{i+1/2}^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Из точного решения линеаризованной задачи распада разрыва можно показать, что значение потока на грани $i+1/2$ определяется как

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}(\mathbf{U}_i) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) - R_{i+1/2} |\Lambda_{i+1/2}| R_{i+1/2}^{-1} (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i) \right].$$

Для правильного разрешения возникающих скачков разряжения функцию $|X|$ заменяют следующей:

$$|X|^* = \begin{cases} |X|, & |X| > \varepsilon \\ 0.5\varepsilon \left(1 + (X/\varepsilon)^2 \right), & |X| \leq \varepsilon \end{cases},$$

где ε - малая величина порядка $10^{-1} \div 10^{-2}$.

6.5. Нахождение потков по методу Стегера-Уорминга

Эта схема [13] основана на расщеплении вектора потока \mathbf{F} на два вектора \mathbf{F}^- и \mathbf{F}^+ , у которых матрицы Якоби имеют, соответственно, неположительные и неотрицательные собственные значения.

Поскольку имеет место равенство $\mathbf{F} = A\mathbf{U}$, то, диагонализировав матрицу Якоби A , получим $\mathbf{F} = R\Lambda R^{-1}\mathbf{U}$. Представив диагональную матрицу Λ в виде суммы матриц Λ^+ и Λ^- , где $\Lambda^+ = (\Lambda + |\Lambda|) / 2$; $\Lambda^- = (\Lambda - |\Lambda|) / 2$, получим

$$\mathbf{F} = R(\Lambda^+ + \Lambda^-)R^{-1}\mathbf{U} = R\Lambda^+R^{-1}\mathbf{U} + R\Lambda^-R^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-. \quad (6.5.1)$$

Согласно (5.5) вектор консервативных переменных \mathbf{U} может быть спроецирован на правые собственные векторы-столбцы матрицы преобразования подобия, а именно, $\mathbf{U} = R\mathbf{\Gamma}$, где $\mathbf{\Gamma}$ - вектор столбец коэффициентов γ_i . Тогда из (6.5.1) следует, что $\mathbf{F} = R(\Lambda^+ + \Lambda^-) \cdot R^{-1}R\mathbf{\Gamma} = R\Lambda^+\mathbf{\Gamma} + R\Lambda^-\mathbf{\Gamma} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-$, или $\mathbf{F}^\pm = R\Lambda^\pm\mathbf{\Gamma}$, расписав которые получим следующие :

$$\mathbf{F}^\pm = \mathbf{R}_1\lambda_1^\pm\gamma_1 + \mathbf{R}_2\lambda_2^\pm\gamma_2 + \mathbf{R}_3\lambda_3^\pm\gamma_3 \quad (6.5.2)$$

В соответствии с расщеплением \mathbf{F} на два потока схема (6.1.3) запишется как

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{F_{i+1/2}^+ - F_{i-1/2}^+}{h} + \frac{F_{i+1/2}^- - F_{i-1/2}^-}{h} = 0 \quad (6.5.3)$$

Следуя характеристическим направлениям (рис. 25) положим $F_{i+1/2}^+ = F_i^+$; $F_{i-1/2}^+ = F_{i-1}^+$; $F_{i+1/2}^- = F_{i+1}^-$; $F_{i-1/2}^- = F_i^-$, тогда (6.5.3) запишется как

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{F_i^+ + F_{i+1}^- - (F_{i-1}^+ + F_i^-)}{h} = 0 \quad (6.5.4)$$

Из сравнения (6.1.3) и (6.5.4) видно, что поток на грани $i+1/2$ представляется как сумма двух потоков: $F_{i+1/2} = F_i^+ + F_{i+1}^-$.

В случае дозвукового течения при $u > 0$ собственные числа $(\lambda_3^+)_i$, $(\lambda_1^-)_{i+1}$, $(\lambda_2^-)_{i+1}$ равны нулю, поэтому

$$F_{i+1/2} = (R_1 \lambda_1^+ \gamma_1)_i + (R_2 \lambda_2^+ \gamma_2)_i + (R_3 \lambda_3^- \gamma_3)_{i+1}.$$

При $u < 0$ в ноль обращаются $(\lambda_1^+)_i$, $(\lambda_3^+)_i$, $(\lambda_2^-)_{i+1}$, тогда

$$F_{i+1/2} = (R_1 \lambda_1^- \gamma_1)_{i+1} + (R_2 \lambda_2^+ \gamma_2)_i + (R_3 \lambda_3^- \gamma_3)_{i+1}$$

Для сверхзвукового течения $F_{i+1/2} = F_i$, при $u > 0$ и $F_{i-1/2} = F_{i+1}$, при $u < 0$.

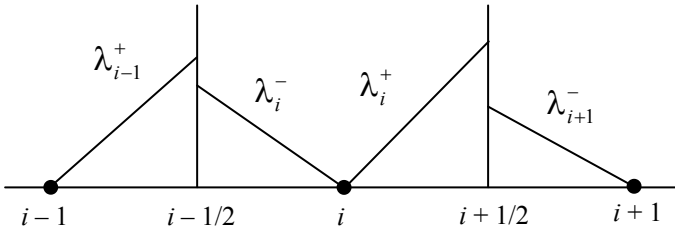


Рис. 25. Характеристические направления

6.5. Нахождение потков по методу ван Лира

Использование схемы расщепления приводит к неблагоприятным результатам в звуковой точки и в месте расположения скачка уплотнения.

Для устранения особенности в звуковой точке, которая состоит в том, что производные от потока $\partial F / \partial U$ терпят разрыв, ван Лир

[14] сформулировал условия, которые должны соблюдаться при разложении $\mathbf{F}=\mathbf{F}^++\mathbf{F}^-$:

1) Все собственные числа матрицы A^+ должны быть положительными, а собственные числа матрицы A^- – отрицательными.

2) Вектора потоков \mathbf{F}^\pm должны быть непрерывны. Если $M > 1$, то $\mathbf{F}^+ = \mathbf{F}_i$. Если $M < -1$, то $\mathbf{F}^- = \mathbf{F}_{i+1}$.

3) \mathbf{F}^+ и \mathbf{F}^- должны быть симметричны, $\mathbf{F}^+(M) = -\mathbf{F}^-(M)$.

4) A^\pm должны быть непрерывны во всех точках, в том числе и звуковой.

5) Матрицы должны иметь одно собственное число равное нулю при $|M| < 1$

6) Составляющие $\mathbf{F}^\pm(M)$ и $\mathbf{F}(M)$ должны быть полиномами от числа Маха как можно низшей степени.

Исходя из этих свойств, Ван Лир получил следующие выражения для составляющих потоков.

$$\mathbf{F}^\pm = \left(\begin{array}{c} \pm \frac{\rho c}{4} (M \pm 1)^2 \\ \pm \frac{\rho c}{4} (M \pm 1)^2 \frac{(k-1)u \pm 2c}{k} \\ \pm \frac{\rho c}{4} (M \pm 1)^2 \frac{[(k-1)u \pm 2c]^2}{2(k^2-1)} \end{array} \right), \text{ для } |M| < 1.$$

$$\mathbf{F}^+ = \mathbf{F}, \mathbf{F}^- = 0, \text{ при } M \geq 1,$$

$$\mathbf{F}^+ = 0, \mathbf{F}^- = \mathbf{F}, \text{ при } M \leq -1.$$

Как и в предыдущей схеме, поток через $i+1/2$ грань вычисляется как сумма потоков

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}_i^+ + \mathbf{F}_{i+1}^-.$$

Как и в методе Роу, для правильного разрешения особенностей в окрестности звуковой точки необходимо видоизменить функцию

$$X^2 = |X|^2 \text{ на } |X^*|^2.$$

6.7. Нахождение потков по методу Лиу-Стеффана

Этот метод имеет еще название AUSM (Advection Upstream Splitting Method) – Метод противопоточного расщепления адвекции [23].

Идея метода заключается в том, что вектор потока \mathbf{F} расщепляется на два: конвективный вектор $\mathbf{F}^{(c)}$ и вектор давления $\mathbf{F}^{(p)}$,

где

$$\mathbf{F}^{(c)} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho u H \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho c u \\ \rho c H \end{pmatrix} \equiv M \hat{\mathbf{F}}^{(c)}, \quad \mathbf{F}^{(p)} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом значение вектора потока на границах ячеек определяется следующим образом:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}_{i+1/2}^{(c)} + \mathbf{F}_{i+1/2}^{(p)}.$$

Конвективный вектор потока рассчитывается по «противопоточному» правилу:

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{(c)} = \begin{cases} \hat{\mathbf{F}}_i^{(c)}, & \text{если } M_{i+1/2} \geq 0 \\ \hat{\mathbf{F}}_{i+1}^{(c)}, & \text{если } M_{i+1/2} \leq 0 \end{cases}.$$

Число Маха на границах ячеек $M_{i+1/2}$ определяется как сумма неотрицательной и неположительной составляющих, аналогично методу ван Лира:

$$M_{i+1/2} = M_i^+ + M_{i+1}^-,$$

где

$$M^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M \pm 1)^2, & \text{если } |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2} (M \pm |M|), & \text{если } |M| > 1 \end{cases}$$

Вектор давления зависит только от давления и на границах ячеек определяется через сумму неотрицательной и неположительной составляющих:

$$p_{i+1/2} = p_i^+ + p_{i+1}^-.$$

Лиу и Стеффан предлагают два способа аппроксимации этих составляющих:

$$p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2} p(1 \pm M), & \text{если } |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2} p \frac{(M \pm |M|)}{M}, & \text{если } |M| > 1 \end{cases}$$

или

$$p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4} p(M \pm 1)^2 (2 \mp M), & \text{если } |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2} p \frac{(M \pm |M|)}{M}, & \text{если } |M| > 1 \end{cases}.$$

Здесь также, как и в методе ван Лира, для правильного разрешения особенностей в окрестности звуковой точки функцию $X^2 = |X|^2$ следует заменить на $|X^*|^2$.

6.8. Метод полиномиального представления матрицы численной вязкости (ППВ)

В работе [15] показано, что аппроксимация вектора потока между узлами для любой консервативной схемы может быть представлена в виде среднеарифметического векторов потоков в этих узлах и члена, представляющего численную вязкость.

В методах Годунова и Роу для определения численной вязкости привлекается модель взаимодействия двух соседних узлов расчетной сетки, которое происходит за счет дискретных волн конечной интенсивности. Природа волн находится из решения задачи о распаде разрыва (точного или приближенного) для общей грани расчетных ячеек.

Идея метода ППВ [16] состоит в разложении матрицы, определяющей численную вязкость в полином по степеням матрицы Якоби с использованием свойств однородности вектора газодинамических потоков ($\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{U}$) и U -свойства:

$$A_{i+1/2}\Delta_{i+1/2}\mathbf{U}=\Delta_{i+1/2}\mathbf{F},$$

где $\Delta_{i+1/2}\mathbf{U}=\mathbf{U}_{i+1}-\mathbf{U}_i$. Этот метод позволяет полностью отказаться от операторов преобразования от консервативных переменных к характеристическим переменным.

6.8.1. Расщепление приращения вектора потока

В работе [17] вектор потока на грани ячейки предложено записывать как

$$\mathbf{F}_{i+1/2}=\frac{1}{2}[\mathbf{F}_i+\mathbf{F}_{i+1}-Q_{i+1/2}\Delta_{i+1/2}\mathbf{U}], \quad (6.8.1)$$

где Q – матрица искусственной вязкости, строящаяся в зависимости от модели взаимодействия двух соседних узлов. Введение матрицы Q позволяет учитывать характеристические свойства матрицы Якоби $A(\mathbf{U})$.

Рассматривают такие Q , которые обладают следующими свойствами:

- 1) коммутативность $AQ=QA$;
- 2) устойчивость $\lambda^2 A^2 \leq Q \leq E$;

Устойчивая схема будет монотонна на любых начальных данных, если $\lambda|A| \leq Q \leq E$, где $|A|=R|\Lambda|R^{-1}$.

Представим Q в следующем виде:

$$Q=q_0E+q_1A+q_2A^2. \quad (6.8.2)$$

Тогда, используя представление $A=RLR^{-1}$, получим

$$N=R^{-1}QR=q_0+q_1\Lambda+q_2\Lambda^2,$$

или

$$v_- = q_0 + q_1(u - c) + q_2(u - c)^2;$$

$$v_0 = q_0 + q_1u + q_2u^2;$$

$$v_+ = q_0 + q_1(u + c) + q_2(u + c)^2;$$

Здесь v_i – собственные значения матрицы Q . При заданных v_i существует единственный набор коэффициентов q_i .

Поскольку в методе Роу роль матрицы численной вязкости играет матрица $|A_{i+1/2}|$, то $N \equiv |\Lambda|$, т.е. $v_- = |u-c|$; $v_0 = |u|$; $v_+ = |u+c|$. Заменяя Q в (6.8.1) через (6.8.2) и используя U -свойство, получим следующее выражение для вектора потока:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i - [(q_0)_{i+1/2} \Delta_{i+1/2} \mathbf{U} + (q_1)_{i+1/2} \Delta_{i+1/2} \mathbf{F} + (q_2)_{i+1/2} A_{i+1/2} \Delta_{i+1/2} \mathbf{F}]) \quad (6.8.3)$$

В случае дозвукового течения

$$q_0 = c|M|(1-M^2); \quad q_1 = M(2|M|-1); \quad q_3 = (1-|M|)/c, \quad (6.8.4 \text{ а})$$

а в случае сверхзвукового течения:

$$q_0 = q_2 = 0, \quad q_1 = \text{sign}(M). \quad (6.8.4 \text{ б})$$

Представление матрицы численной вязкости через трехчлен называется трехволновой моделью. Существует также и двухволновая модель. В этом случае в качестве опорных характеристик выбирают $u-c$ и $u+c$, тогда для дозвукового течения:

$$q_0 = c(1-M^2); \quad q_1 = |M|; \quad q_2 = 0$$

а для сверхзвукового течения:

$$q_0 = q_2 = 0, \quad q_1 = \text{sign}(M)$$

Двухволновая модель, как и схема Роу, способна точно разрешить нефизичные стационарные скачки разряжения, если видоизменить функцию модуль от собственного значения:

$$|M| = \begin{cases} \frac{1}{2}(\varepsilon + (M/\varepsilon)^2), & M \leq \varepsilon \\ |M|, & M \geq \varepsilon \end{cases}$$

Следует отметить, что схемы, построенные на основе двухволновой модели, хуже разрешают контактные разрывы, чем схемы, построенные на основе трехволновой модели.

6.8.2. Расщепление вектора потока

Представим матрицу Якоби в виде: $A=A^++A^-$, где A^+ –имеет положительные собственные значения $A^+=(A+|A|)/2$, а A^- – отрицательные $A^-(A-|A|)/2$.

В рамках метода расщепления векторов потоков [8] аппроксимация потока на грани $i+1/2$ имеет вид:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1} - \left[(A_{i+1}^+ - A_{i+1}^-) \mathbf{U}_{i+1} - (A_i^+ - A_i^-) \mathbf{U}_i \right] \right)$$

Здесь роль матрицы численной вязкости играют матрицы, вида $A^+ - A^-$, которые, выразив через (6.7.2), получим:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1} - \left\{ (q_0)_{i+1} \mathbf{U}_{i+1} + (q_1)_{i+1} \mathbf{F}_{i+1} + (q_2)_{i+1} A_{i+1} \mathbf{F}_{i+1} - \right. \right. \quad (6.8.5) \\ \left. \left. - \left[(q_0)_i \mathbf{U}_i + (q_1)_i \mathbf{F}_i + (q_2)_i A_i \mathbf{F}_i \right] \right\} \right]$$

Коэффициенты q_i – вычисляются также по формулам (6.8.4)

7. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Для повышения порядка точности разностной схемы используют, как правило, расширенный шаблон. В этом случае, как было доказано С.К.Годуновым [9], среди линейных разностных схем второго порядка точности для линейного уравнения переноса нет схемы, удовлетворяющей условиям монотонности. Немонотонность разностных схем проявляется в том, что в разрывных решениях вблизи скачков возникают нефизичные осцилляции. Для подавления таких осцилляций прибегают к следующим процедурам: либо в уравнения добавляют специальные члены, называемые искусственной вязкостью, которая достаточно большая в окрестности скачков и мала вне их; либо принудительно сглаживают результаты с помощью какой-либо процедуры безотносительно к решаемым дифференциальным уравнениям; либо используют ограничители на значение производной функции внутри ячейки. При правильном выборе ограничителя гарантируется свойство невозрастания полной вариации (Total Variation Diminishing) разностной схемы, что в свою очередь обеспечивает схеме свойство квазimonотонности [18].

Полной вариацией сеточной функции называется величина $TV(u) = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} |u_j - u_{j-1}|$. Разностная схема является TVD-схемой, если выполняется условие $TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$.

В 1983 году Хартеном [19] был введен класс таких схем. Они являются схемами повышенного порядка аппроксимации и имеют один недостаток – снижение порядка аппроксимации до первого вблизи локальных экстремумов.

Другой вид схем повышенного порядка аппроксимации был предложен Хартемом с соавторами [20], которые являются по существу не осциллирующими (Essentially Non-Oscillatory). Схемы ENO, в отличие от схем TVD допускают осцилляцию полной вариации решения в пределах ошибки округления, но, тем не

менее, являются квазимонотонными.

В схемах ENO, при построении производных в ячейке, используется интерполяционный многочлен более высокой степени, чем в схемах TVD. Это позволяет достичь на кусочно-гладких данных высокий порядок точности. Вблизи разрывов эта схема автоматически переключается на односторонние разности и, тем самым, не использует разрывные данные, которые вносят паразитные осцилляции. Эти схемы имеют равномерную высокую точность и хорошо описывают острые и монотонные профили скачков [21].

7.1. Немонотонные разностные схемы

7.1.1. Разностная схема Лакса-Вендроффа

В 1960 году Лакс и Вендрофф предложили разностную схему [22] второго порядка точности по всем переменным, полученную с помощью разложения функции \mathbf{U}_i^{n+1} в ряд Тейлора по переменной t :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \tau \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_i^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \right)_i^n + \dots \quad (7.1.1)$$

Заменяя производные по переменной t через производные по переменной x путем использования уравнения (5.1) и перекрестного дифференцирования

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right),$$

и ограничиваясь тремя членами разложения в (7.1.1) получаем

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \tau \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right)_i^n + \frac{\tau^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) \right]_i^n \quad (7.1.2)$$

Затем в (7.1.2) производные по пространству аппроксимируют-

ся разностными соотношениями

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\tau}{2h} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{h} \left[\left(A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)_{i+1/2}^n - \left(A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)_{i-1/2}^n \right]$$

и далее

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\tau}{2h} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) + \\ \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{h^2} \left[A_{i+1/2}^n (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) - A_{i-1/2}^n (\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) \right] \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Здесь $A_{i+1/2}^n$ можно определять либо по формуле

$$A_{i+1/2}^n = A \left(\frac{1}{2} \mathbf{U}_{i+1}^n + \frac{1}{2} \mathbf{U}_i^n \right),$$

либо по формуле

$$A_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[A(\mathbf{U}_{i+1}^n) + A(\mathbf{U}_i^n) \right].$$

Существует и другая схема – так называемая двухшаговая схема Лакса-Вендроффа.

Сначала на гранях ячеек в плоскости x, t вычисляют промежуточные значения по формулам:

(этап предиктор)

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{i+1}^n + \mathbf{U}_i^n) - \frac{\tau}{2h} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) \quad (7.1.4)$$

затем по $\mathbf{U}_{i+1/2}^n$ вычисляют $\mathbf{F}_{i+1/2}^n$ и окончательные значения на верхнем временном слое

(этап корректор)

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n) \quad (7.1.5)$$

Разностная схема (7.1.3) также может быть записана в форме (7.1.5), если в качестве $\mathbf{F}_{i+1/2}^n$ выбрать

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_{i+1}^n + \mathbf{F}_i^n + \frac{\tau}{h} A_{i+1/2}^n (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) \right] \quad (7.1.6)$$

Следует отметить, что разностная схема Лакса-Вендроффа не

является монотонной, поэтому при расчете ударных волн она будет давать нефизичные осцилляции. Для устранения этого дефекта в уравнения (7.1.5) вводят диссипативный член пропорциональный $\varepsilon h^2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}$, после чего оно принимает вид:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n) + \varepsilon (\mathbf{U}_{i+1}^n - 2\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_{i-1}^n) \quad (7.1.7)$$

Значение параметра ε изменяется в пределах от 0.01 до 0.5, и его следует подбирать из пробных расчетов для каждой новой задачи.

7.1.2. Разностная схема МакКормака

Схема МакКормака [5], как и схема Лакса-Вендроффа, относится к классу схем предиктор-корректор.

На этапе предиктор вычисляются промежуточные значения консервативных переменных

$$\mathbf{U}_i^* = \mathbf{U}_i^n - \frac{\tau}{h} \left[(1 - \alpha) (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) + \alpha (\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) \right]. \quad (7.1.8)$$

Затем по ним вычисляются потоки \mathbf{F}_i^* , после чего на этапе корректор находят значения на верхнем временном слое

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_i^*) - \frac{\tau}{h} \left[(1 - \alpha) (\mathbf{F}_i^* - \mathbf{F}_{i-1}^*) + \alpha (\mathbf{F}_{i+1}^* - \mathbf{F}_i^*) \right] \right\}. \quad (7.1.9)$$

Значение параметра α лежит в пределах от 0 до 1. Для выбора значения α можно рекомендовать следующее. Если в решении присутствуют ударные волны, распространяющиеся вправо (вдоль оси x), то следует принять α равным 0, если же ударная волна движется влево, то следует принять α равным 1.

Схема МакКормака не является монотонной схемой, поэтому и здесь необходимо вводить диссипативный член, как на этапе предиктор, так и на этапе корректор, тогда уравнения (7.1.8) и (7.1.9) принимают вид.

$$\mathbf{U}_i^* = \mathbf{U}_i^n - \frac{\tau}{h} \left[(1 - \alpha)(\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) + \alpha(\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) \right] + \varepsilon(\mathbf{U}_{i+1}^n - 2\mathbf{U}_{i+1}^n + \mathbf{U}_{i-1}^n) \quad (7.1.10)$$

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_i^*) - \frac{\tau}{h} \left[(1 - \alpha)(\mathbf{F}_i^* - \mathbf{F}_{i-1}^*) + \alpha(\mathbf{F}_{i+1}^* - \mathbf{F}_i^*) \right] + \varepsilon(\mathbf{U}_{i+1}^* - 2\mathbf{U}_{i+1}^* + \mathbf{U}_{i-1}^*) \right\} \quad (7.1.11)$$

Для схемы МакКормака величина диссипативного коэффициента лежит в пределах от 0.01 до 0.05.

Рассмотренная выше схема Лакса-Вендроффа и схема МакКормака являются устойчивыми при числах Куранта не превышающих 1.

7.2. Квазимонотонные разностные TVD схемы

7.2.1. Схема Колгана

В 1972 году Колганом В.П. [24] была предложена разностная схема для модельного уравнения переноса, которая обладает вторым порядком аппроксимации по пространственной переменной на гладких решениях, а в локальных экстремумах схема автоматически понижает порядок аппроксимации до первого.

Схема строится в предположении о кусочно-линейном распределении функции в области решения, т.е. в каждой ячейке решение имеет линейный характер $\mathbf{U}_i(x) = \mathbf{U}_i + \mathbf{k}_i(x - x_i)$, где \mathbf{U}_i – значение функции в центре ячейки; x_i – координата центра ячейки; \mathbf{k}_i – производная функции в ячейке.

Расписывая интегральный закон сохранения (6.1.1) по ячейке, получим разностную схему вида (6.1.3), аппроксимирующую дифференциальное уравнение (5.1) со вторым порядком точности по пространственной переменной и с первым – по времени:

В отличие от схемы Годунова здесь значения функции на гранях ячейки, например, $\mathbf{U}_{i+1/2}$ вычисляются из решения задачи о

распаде разрыва не по значениям функции в соседних узлах U_i и U_{i+1} , а по значениям, полученных в результате экстраполяции функции из этих узлов на $i+1/2$ грань. Для разностной сетки с постоянным шагом результат экстраполяции выглядит следующим образом:

$$U_{i+1/2}^l = U_i^n + \delta^* U_i^n / 2; \quad U_{i+1/2}^r = U_{i+1}^n - \delta^* U_{i+1}^n / 2 \quad (7.2.1)$$

Для того, чтобы избежать осцилляций присущих разностным схемам второго порядка точности Колган В.П. предложил выбирать значение приращения функции $\delta^* U_i^n$ в каждой ячейке из двух приращений, полученных по значениям функции в соседних ячейках U_{i-1} , U_i , U_{i+1} на основе принципа минимального значения модуля приращения:

$$\delta^* U_i^n = \begin{cases} U_{i+1}^n - U_i^n, & |U_{i+1}^n - U_i^n| < |U_i^n - U_{i-1}^n| \\ U_i^n - U_{i-1}^n, & |U_{i+1}^n - U_i^n| > |U_i^n - U_{i-1}^n| \\ 0, & (U_{i+1}^n - U_i^n)(U_i^n - U_{i-1}^n) < 0 \end{cases} \quad (7.2.2)$$

Схема Колгана устойчива при числах Куранта не превышающих 0.5.

Замечание

Принцип выбора минимального значения модуля приращения функции или ее производной в схеме Колгана является, по сути, ограничителем, накладываемым на поведение функции внутри рассматриваемой ячейки.

Если переписать (7.2.1) в виде

$$U_{i+1/2}^l = U_i^n + \Phi(r_i) \delta^- U_i^n / 2; \quad U_{i+1/2}^r = U_{i+1}^n - \Phi(1/r_i) \delta^+ U_{i+1}^n / 2,$$

где

$$r_i = \delta^+ U_i^n / \delta^- U_i^n; \quad \delta^+ U_i^n = U_{i+1}^n - U_i^n; \quad \delta^- U_i^n = U_i^n - U_{i-1}^n,$$

то ограничитель Колгана $\Phi(r)$ принимает вид: $\max[0, \min(r, 1)]$.

Ограничитель Колгана не единственен. В литературе известны другие ограничители (Ван Лира, Ван Альбда, Роу, Шу и др.) [22], которые дают целый класс подобных разностных схем:

$\Phi(r) = (r + |r|)/(1 + |r|)$ – ограничитель Ван Лира;

$\Phi(r) = (r + r^2)/(1 + r^2)$ – ограничитель Ван Альбда;

$\Phi(r) = \max[0, \min(br, 1), \min(r, b)]$, $b \in [1, 2]$ – ограничитель

Роу;

$\Phi(r) = 0.5 \cdot (\max[0, \min(br, 1)] + \max[0, \min(r, b)])$ – ограничитель Шу;

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0 \\ 2r - r^2, & 0 \leq r \leq 1 \\ 1 + (1 - r)^2, & 1 \leq r \leq 2 \\ 2, & r \geq 2 \end{cases} \text{ – ограничитель Брюнё.}$$

7.2.2. Схема ван Лира

Как уже отмечалось, схема Колгана обладает первым порядком точности по времени. Для устранения этого недостатка Ван Лиром [25] предложено рассчитывать задачу о распаде разрыва по значениям \mathbf{U} не с нижнего временного слоя, а с верхнего, т.е. по значениям $\mathbf{U}_{i+1/2}^{l, n+1}$, $\mathbf{U}_{i+1/2}^{r, n+1}$, разложив которые в ряд Тейлора, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i+1/2}^{l, n+1} &= \mathbf{U}_i^n + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)_i^n \frac{h}{2} + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_i^n \tau + \dots = \\ &= \mathbf{U}_i^n + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)_i^n \frac{h}{2} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right)_i^n \tau + \dots = \\ &= \mathbf{U}_i^n + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)_i^n \frac{h}{2} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)_i^n \tau + \dots = \\ &= \mathbf{U}_i^n + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)_i^n \frac{h}{2} - \left(A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)_i^n \tau + \dots \end{aligned}$$

Записывая производные через разностные выражения, и

переходя к лимитированным разностям, получаем выражение для для величины консервативной переменной слева от $i+1/2$ границы:

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{l,n+1} = \mathbf{U}_i^n + \delta^+ \mathbf{U}_i^n / 2 - (\tau/h) A_i^n \delta^+ \mathbf{U}_i^n \quad (7.2.3)$$

Аналогично получается выражение для консервативной переменной справа от $i+1/2$ границы:

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{r,n+1} = \mathbf{U}_i^n - \delta^+ \mathbf{U}_{i+1}^n / 2 - (\tau/h) A_i^n \delta^+ \mathbf{U}_{i+1}^n \quad (7.2.4)$$

Выражения (7.2.3) и (7.2.4), записанные через функции ограничители, имеют вид:

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{l,n+1} = \mathbf{U}_i^n + [E/2 - (\tau/h) A_i^n] \Phi(r_i) \delta^- \mathbf{U}_i^n$$

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{r,n+1} = \mathbf{U}_{i+1}^n - [E/2 + (\tau/h) A_{i+1}^n] \Phi(1/r_i) \delta^+ \mathbf{U}_{i+1}^n$$

Полученная схема будет иметь второй порядок точности, как по пространству, так и по времени.

7.2.3. Схема Чакраварти-Ошера

В работе [26] была предложена TVD-схема, построенная на квадратичном законе распределения функции внутри i -ой ячейки:

$$\mathbf{U}_i(x) = \mathbf{U}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)_i (x - x_i) + 3\phi \left[(x - x_i)^2 - \frac{h^2}{12} \right] \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} \right)_i,$$

где ϕ - некоторый параметр.

Запишем производные через разностные соотношения:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)_i = \frac{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2h} (\delta^+ \mathbf{U}_i + \delta^- \mathbf{U}_i);$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\mathbf{U}_{i+1} - 2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}}{2h^2} = \frac{1}{2h^2} (\delta^+ \mathbf{U}_i - \delta^- \mathbf{U}_i);$$

Тогда для границ $x=x_{i+1/2}$ и $x=x_{i-1/2}$ в i -ой ячейке имеем:

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^l = \mathbf{U}_i + \frac{1+\phi}{4} \delta^+ \mathbf{U}_i + \frac{1-\phi}{4} \delta^- \mathbf{U}_i; \quad (7.2.5)$$

$$\mathbf{U}_{i-1/2}^r = \mathbf{U}_i - \frac{1-\phi}{4} \delta^+ \mathbf{U}_i - \frac{1+\phi}{4} \delta^- \mathbf{U}_i. \quad (7.2.6)$$

Если для определения параметров на новом временном слое

использовать формулу (6.1.3), в которой $\mathbf{F}_{i+1/2}$ вычисляется на основе решения задачи о распаде разрыва по значениям $\mathbf{U}_{i+1/2}^l$ и $\mathbf{U}_{i+1/2}^r$, то такая схема, естественно, будет давать осциллирующее решение. Чакраварти и Ошер предложили вместо $\delta^+ \mathbf{U}_i$ и $\delta^- \mathbf{U}_i$ использовать лимитированные разности $\delta^* \mathbf{U}_i$ и $\delta^{**} \mathbf{U}_i$ такие, чтобы выполнялось условие TVD:

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^l = \mathbf{U}_i + \frac{1+\phi}{4} \delta^* \mathbf{U}_i + \frac{1-\phi}{4} \delta^{**} \mathbf{U}_i, \quad (7.2.7)$$

$$\mathbf{U}_{i-1/2}^r = \mathbf{U}_i - \frac{1-\phi}{4} \delta^* \mathbf{U}_i - \frac{1+\phi}{4} \delta^{**} \mathbf{U}_i \quad (7.2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \delta^* \mathbf{U}_i &= \min \text{mod}(\delta^+ \mathbf{U}_i, b \delta^- \mathbf{U}_i) \\ \delta^{**} \mathbf{U}_i &= \min \text{mod}(\delta^- \mathbf{U}_i, b \delta^+ \mathbf{U}_i) \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

$$1 < b < b_{\max} = \frac{3-\phi}{1-\phi};$$

$$\min \text{mod}(x, y) = \begin{cases} \text{sgn}(x) \min(|x|, |y|), & xy > 0 \\ 0, & xy \leq 0 \end{cases}$$

При $b=1$ схема не зависит от ϕ , и совпадает со схемой Колгана т.к.

$$\delta^* \mathbf{U}_i = \delta^{**} \mathbf{U}_i.$$

При $\phi=1/3$ схема имеет третий порядок аппроксимации.

Рассмотренный класс схем устойчив, если число Куранта не превышает значения: $4/[5 - \phi(1 + \phi)b]$.

Замечание 1.

Соотношения (7.2.7) и (7.2.8) получены в предположении параболического распределения консервативных переменных внутри ячейки. Их можно использовать для скачков газодинамических переменных небольшой интенсивности. Если же скачки достаточно интенсивны, то следует предполагать, что

по такому закону распределены Римановы переменные (5.4). В этом случае формулы для входных параметров в задачу о распаде разрыва принимают вид:

$$\mathbf{U}'_{i+1/2} = \mathbf{U}_i + R_i \left[\frac{1+\phi}{4} \delta^* \mathbf{W}_i + \frac{1-\phi}{4} \delta^{**} \mathbf{W}_i \right], \quad (7.2.10)$$

$$\mathbf{U}''_{i-1/2} = \mathbf{U}_i - R_i \left[\frac{1-\phi}{4} \delta^* \mathbf{W}_i - \frac{1+\phi}{4} \delta^{**} \mathbf{W}_i \right], \quad (7.2.11)$$

$$\delta^* \mathbf{W}_i = \min \text{mod}(\delta^+ \mathbf{W}_i, b \delta^- \mathbf{W}_i)$$

$$\delta^{**} \mathbf{W}_i = \min \text{mod}(\delta^- \mathbf{W}_i, b \delta^+ \mathbf{W}_i)$$

$$\delta^+ \mathbf{W}_i = R_i^{-1} \delta^+ \mathbf{U}_i^+; \quad \delta^- \mathbf{W}_i = R_i^{-1} \delta^+ \mathbf{U}_i^-$$

Замечание 2.

В оригинальной работе [18] рассмотренная схема была использована совместно с методом Рои для нахождения потоков на гранях ячеек и было использовано предположение о параболическом распределении по пространству произведения Римановых переменных на соответствующие собственные числа. В этом случае поток через $i+1/2$ грань представляется следующим образом

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}_{i+1/2}^{Roe} - \mathbf{H}_{i+1/2}, \quad (7.2.12)$$

где $\mathbf{F}_{i+1/2}^{Roe}$ – поток, вычисленный по методу Рои, $\mathbf{H}_{i+1/2}$ – антидиссипативный член, вычисляемый по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{i+1/2} = & R_{i+3/2} (\Lambda^- \delta \mathbf{W})_{i+3/2}^* \frac{1-\phi}{4} + R_{i+1/2} (\Lambda^- \delta \mathbf{W})_{i+1/2}^* \frac{1+\phi}{4} - \\ & - R_{i+1/2} (\Lambda^+ \delta \mathbf{W})_{i+1/2}^* \frac{1+\phi}{4} - R_{i-1/2} (\Lambda^+ \delta \mathbf{W})_{i-1/2}^* \frac{1-\phi}{4}, \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

где $\delta \mathbf{W}_{i+1/2} = R_{i+1/2}^{-1} \delta^+ \mathbf{U}_i$.

$$(\Lambda^- \delta \mathbf{W})_{i+3/2}^* = \min \text{mod} \left[(\Lambda^- \delta \mathbf{W})_{i+3/2}, b (\Lambda^- \delta \mathbf{W})_{i+1/2} \right],$$

$$(\Lambda^- \delta \mathbf{W})_{i+1/2}^* = \min \text{mod} \left[(\Lambda^- \delta \mathbf{W})_{i+1/2}, b (\Lambda^- \delta \mathbf{W})_{i+3/2} \right],$$

$$\begin{aligned} (\Lambda^+ \delta \mathbf{W})_{i+1/2}^* &= \min \operatorname{mod} \left[(\Lambda^+ \delta \mathbf{W})_{i+1/2}, b(\Lambda^+ \delta \mathbf{W})_{i-1/2} \right], \\ (\Lambda^+ \delta \mathbf{W})_{i-1/2}^* &= \min \operatorname{mod} \left[(\Lambda^+ \delta \mathbf{W})_{i-1/2}, b(\Lambda^+ \delta \mathbf{W})_{i+1/2} \right]. \end{aligned}$$

Замечание 3.

К описанному выше классу схем относятся так называемые монотонные противопоточные схемы для законов сохранения (MUSCL TVD), у которых потоки через грани определяются либо по методу Ван Лира, либо по методу Стегера-Уорминга:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}^+ (\mathbf{U}_{i+1/2}^l) + \mathbf{F}^- (\mathbf{U}_{i+1/2}^r),$$

где $\mathbf{U}_{i+1/2}^l$ и $\mathbf{U}_{i+1/2}^r$ вычисляются по формулам (7.2.7) и (7.2.8) или по формулам (7.2.10) и (7.2.11). Для $\varphi = 1/3$ они дают третий порядок точности.

7.3. Квазимонотонные разностные ENO-схемы

7.3.1. Одномерная ENO реконструкция и аппроксимация

Для восстановления функции $u(x)$ на отрезке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ по узловым значениям сеточной функции u_i , учитывая, что функция $u(x)$ может иметь конечное число точек разрыва, вводят первообразную функцию $V(x) = \int_{-\infty}^x u(x) dx$. Очевидно, что если будет известна функция $V(x)$, то функция $u(x)$ будет найдена, как $u(x) = V'(x)$. Если $x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = h$, то узловые значения сеточной функции u_i могут быть получены как средние значения функции $u(x)$ на отрезке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ по формуле:

$$u_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx.$$

Аппроксимируем функцию $V(x)$ с помощью полинома Ньютона $P(x)$, используя значения функции $V(x)$ в граничных точках ячеек $x_{i+1/2}$. Полином первой степени имеет вид:

$$P_1(x) = V(x_{i-1/2}) + V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}](x - x_{i-1/2}),$$

где $V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] = \frac{V(x_{i+1/2}) - V(x_{i-1/2})}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}$ – разделенная разность первого порядка.

Для построения полинома второй степени возьмем в качестве дополнительной точки $x_{i+1/2}$. При этом разделенную разность второго порядка можно построить двояко, либо как

$$V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}] = \frac{V[x_{i+1/2}, x_{i+3/2}] - V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]}{x_{i+3/2} - x_{i-1/2}},$$

либо как

$$V[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] = \frac{V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] - V[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}]}{x_{i+1/2} - x_{i-3/2}}.$$

В качестве разделенной разности выберем ту, абсолютное значение которой является наименьшим. Тогда мы получим полином второй степени либо в виде

$$P_2(x) = P_1(x) + V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}](x - x_{i-1/2})(x - x_{i+1/2}), \quad (7.3.1)$$

либо в виде

$$P_2(x) = P_1(x) + V[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}](x - x_{i-1/2})(x - x_{i+1/2}). \quad (7.3.2)$$

Далее для построения полинома третьей степени выберем точку $x_{i+3/2}$, если $P_2(x)$ принял вид (7.3.1), либо точку $x_{i-3/2}$, если $P_2(x)$ принял вид (7.3.2).

Разделенная разность третьего порядка для случая (7.3.1) можно построить либо как

$$V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}, x_{i+5/2}] = \frac{V[x_{i+1/2}, x_{i+3/2}, x_{i+5/2}] - V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}]}{x_{i+5/2} - x_{i-1/2}},$$

либо как

$$V[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}] = \frac{V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}] - V[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]}{x_{i+3/2} - x_{i-3/2}}.$$

В качестве разделенной разности выберем ту, абсолютное значение которой является наименьшим. В этом случае получим, либо

$$P_3(x) = P_2(x) + V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}, x_{i+5/2}] (x - x_{i-1/2}) \times (x - x_{i+1/2}) (x - x_{i+3/2}), \quad (7.3.3)$$

либо

$$P_3(x) = P_2(x) + V[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}] (x - x_{i-1/2}) \times (x - x_{i+1/2}) (x - x_{i+3/2}). \quad (7.3.4)$$

Разделенная разность третьего порядка для случая (7.3.2) можно построить либо как

$$V[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}] = \frac{V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}] - V[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]}{x_{i+3/2} - x_{i-3/2}},$$

либо как

$$V[x_{i-5/2}, x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] = \frac{V[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] - V[x_{i-5/2}, x_{i-3/2}, x_{i-1/2}]}{x_{i+1/2} - x_{i-5/2}}.$$

В качестве разделенной разности выберем ту, абсолютное значение которой является наименьшим. В этом случае получим, либо

$$P_3(x) = P_2(x) + V[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}](x - x_{i-1/2}) \times \\ \times (x - x_{i+1/2})(x - x_{i-3/2}), \quad (7.3.5)$$

либо

$$P_3(x) = P_2(x) + V[x_{i-5/2}, x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}](x - x_{i-1/2}) \times \\ \times (x - x_{i+1/2})(x - x_{i-3/2}). \quad (7.3.6)$$

Для построения полинома четвертой степени выбираем точку $x_{i+5/2}$ в случае (7.3.3), точку $x_{i-3/2}$ в случае (7.3.4), точку $x_{i+3/2}$ в случае (7.3.5), точку $x_{i-5/2}$ в случае (7.3.6).

Этот процесс продолжаем дальше, увеличивая количество узлов в разностном шаблоне.

Полученный полином $P(x)$ обладает следующими свойствами:

1. Свойство точности $P(x) = V(x) + O(\Delta x^{k+1})$ выполняется для ячеек, не содержащих разрывов.
2. Полином $P(x)$ является монотонным в ячейке, содержащей разрыв.
3. Ограниченность полной вариации $TV(P(x) + O(\Delta x^{k+1})) \leq TV(V(x)) + O(\Delta x^{k+1})$.

Поскольку $V(x_{i+1/2}) - V(x_{i-1/2}) = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx$ то сеточную функцию

в узловых точках можно представить как разделенную разность первого порядка от первообразной функции, и на равноотстоящих узлах имеем:

$$u_i = \frac{V(x_{i+1/2}) - V(x_{i-1/2})}{h}.$$

Учитывая этот

факт все разделенные разности функции $V(x)$ можно выразить через значения сеточной функции u_i .

Разделенные разности второго порядка:

$$V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}] = \frac{u_{i+1} - u_i}{2h}; \quad V[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] = \frac{u_i - u_{i-1}}{2h}.$$

Разделенные разности третьего порядка:

$$\begin{aligned}
V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}, x_{i+5/2}] &= \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{6h^2}; \\
V[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}] &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{6h^2}, \\
V[x_{i-5/2}, x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] &= \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{6h^2}.
\end{aligned}$$

Разделенные разности четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
V[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}, x_{i+5/2}, x_{i+7/2}] &= \frac{u_{i+3} - 3u_{i+2} + 3u_{i+1} - u_i}{24h^3}; \\
V[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}, x_{i+5/2}] &= \frac{u_{i+2} - 3u_{i+1} + 3u_i - u_{i-1}}{24h^3}; \\
V[x_{i-5/2}, x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}] &= \frac{u_{i+1} - 3u_i + 3u_{i-1} - u_{i-2}}{24h^3}; \\
V[x_{i-7/2}, x_{i-5/2}, x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] &= \frac{u_i - 3u_{i-1} + 3u_{i-2} - u_{i-3}}{24h^3}.
\end{aligned}$$

Построив полином $P(x)$ требуемой степени, можно определить полином $p(x)$, аппроксимирующий функцию $u(x)$ внутри ячейки $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, как $p(x) = dP(x)/dx$. Тогда значения функции $u(x)$ на гранях ячейки можно приближенно найти через значения полинома $p(x_{i-1/2})$ и $p(x_{i+1/2})$, которые в свою очередь будут выражены через значения сеточной функции:

$$u_{i+1/2}^- = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} u_{i-r+j}; \quad u_{i-1/2}^+ = \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{c}_{rj} u_{i-r+j}. \quad (7.3.7)$$

Знаки $-$ и $+$ в формулах (7.3.7) показывают, что вычисления проводятся, соответственно, слева и справа от граней ячейки. Коэффициенты c_{rj} получаются путем подстановки в (7.3.1) - (7.3.6) значения $x = x_{i+1/2}$. Следует отметить, что $\tilde{c}_{rj} = c_{r-1j}$.

В таблице приведены значения коэффициентов c_{rj} , полученные для $1 \leq k \leq 4$.

k	r	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
1	-1	1			
	0	1			
2	-1	3/2	-1/2		
	0	1/2	1/2		
	1	-1/2	3/2		
3	-1	11/6	-7/6	1/3	
	0	1/3	5/6	-1/6	
	1	-1/6	5/6	1/3	
	2	1/3	-7/6	11/6	
4	-1	25/12	-23/12	13/12	-1/4
	0	1/4	13/12	-5/12	1/12
	1	-1/12	7/12	7/12	-1/12
	2	1/12	-5/12	13/12	1/4
	3	-1/4	13/12	-23/12	25/12

7.3.2. Примеры ENO схем второго порядка аппроксимации

Как уже говорилось, в TVD схемах производная внутри i -ой ячейки выбирается из двух значений $\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right)_i$ и $\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right)_{i-1}$ с помощью ограничителя $\min\text{mod}$. Эти производные вычисляются на основе интерполяционного многочлена первой степени:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right)_i = \frac{\delta^+ \mathbf{U}_i}{h} ; \quad \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right)_{i-1} = \frac{\delta^- \mathbf{U}_i}{h}.$$

Для ENO схемы возьмем интерполяционный многочлен второй степени, тогда

$$\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right)_i = \frac{\delta^+ \mathbf{U}_i}{h} - \beta h \overline{\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)}_i; \quad \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right)_{i-1} = \frac{\delta^- \mathbf{U}_i}{h} + \alpha h \overline{\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)}_{i-1}. \quad (7.3.8)$$

Производные второго порядка будем выбирать из двух возможных также с помощью ограничителя minmod:

$$\overline{\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)}_i = \min \text{mod} \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)_i, \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)_{i+1} \right];$$

$$\overline{\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)}_{i-1} = \min \text{mod} \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)_{i-1}, \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)_i \right]$$

или в разностном виде:

$$\overline{\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)}_i = \frac{1}{2h^2} \min \text{mod} \left[\delta^+ \mathbf{U}_i - \delta^- \mathbf{U}_i, \delta^+ \mathbf{U}_{i+1} - \delta^- \mathbf{U}_{i+1} \right]$$

$$\overline{\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)}_{i-1} = \frac{1}{2h^2} \min \text{mod} \left[\delta^+ \mathbf{U}_{i-1} - \delta^- \mathbf{U}_{i-1}, \delta^+ \mathbf{U}_i - \delta^- \mathbf{U}_i \right] \quad (7.3.9)$$

Из (7.3.8) и (7.3.9) получим для ENO схемы Колгана производную в i -ой ячейке:

$$\delta^* \mathbf{U}_i = \min \text{mod} \left[\delta^+ \mathbf{U}_i - \frac{\beta}{2} \min \text{mod}(\delta^+ \mathbf{U}_i - \delta^- \mathbf{U}_i, \delta^+ \mathbf{U}_{i+1} - \delta^- \mathbf{U}_{i+1}), \right. \\ \left. \delta^- \mathbf{U}_i + \frac{\alpha}{2} \min \text{mod}(\delta^+ \mathbf{U}_{i-1} - \delta^- \mathbf{U}_{i-1}, \delta^+ \mathbf{U}_i - \delta^- \mathbf{U}_i) \right]$$

Для ENO схемы Чакраварти-Ошера вместо (7.3.9) следует записать

$$\delta^* \mathbf{U}_i = \min \text{mod} \left[\delta^+ \mathbf{U}_i - \frac{\beta}{2} \min \text{mod}(\delta^+ \mathbf{U}_i - \delta^- \mathbf{U}_i, \delta^+ \mathbf{U}_{i+1} - \delta^- \mathbf{U}_{i+1}), \right. \\ \left. b \left(\delta^- \mathbf{U}_i + \frac{\alpha}{2} \min \text{mod}(\delta^+ \mathbf{U}_{i-1} - \delta^- \mathbf{U}_{i-1}, \delta^+ \mathbf{U}_i - \delta^- \mathbf{U}_i) \right) \right]$$

$$\delta^{**} \mathbf{U}_i = \min \text{mod} \left[\delta^- \mathbf{U}_i + \frac{\alpha}{2} \min \text{mod}(\delta^+ \mathbf{U}_{i-1} - \delta^- \mathbf{U}_{i-1}, \delta^+ \mathbf{U}_i - \delta^- \mathbf{U}_i), \right. \\ \left. b \left(\delta^+ \mathbf{U}_i - \frac{\beta}{2} \min \text{mod}(\delta^+ \mathbf{U}_i - \delta^- \mathbf{U}_i, \delta^+ \mathbf{U}_{i+1} - \delta^- \mathbf{U}_{i+1}) \right) \right]$$

При $\alpha=2$, $\beta=2$ схема имеет второй порядок точности по пространству. При $\alpha=4/3$, $\beta=2/3$ ENO аналог схемы Колгана будет иметь третий порядок точности по пространству.

8. ПРОГРАММА РАСЧЕТА УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

8.1. Описание программы расчета уравнений газовой динамики

В данном разделе приводится описание программы на языке ФОРТРАН для решения газодинамических уравнений при заданных начальных условиях (задача Коши). Программа состоит из головной программы `CONS_LAW` и трех подпрограмм `INIT_VAL`, `FLUXES`, `OUTPUT`. Блок схема программы показана на рис. 26.

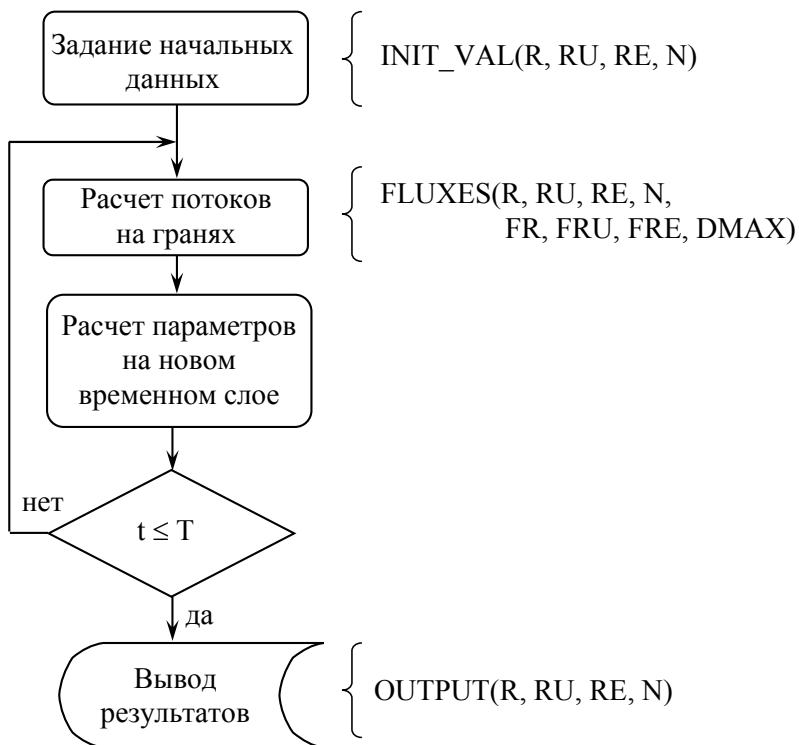


Рис. 26. Блок схема программы

В процедуре INIT_VAL происходит присвоение начальных данных консервативным переменным ρ , m , ε .

В процедуре FLUXES происходит вычисление потоков на границах ячеек.

Процедура OUTPUT выводит значения пространственной координаты, плотности, скорости и давления в файл 'NAME.DAT'

8.2.Описание переменных

G – показатель адиабаты, γ ;

XI – выражение $\gamma - 1$;

HX – длина разностной ячейки, h ;

X – пространственная координата, x ;

TIME – время процесса, t ;

COURANT – число Куранта, C ;

TIME_END – время окончания процесса, T ;

TAU – шаг по времени, τ ;

N – число ячеек;

R(1:N) массив плотности, ρ ;

RU(1:N) массив импульса, m ;

RE(1:N) массив энергии, ε ;

FR(1:N1) массив потока плотности, m ;

FRU(1:N1) массив потока импульса, $m^2/\rho+p$;

FRE(1:N1) массив потока энергии, $(\varepsilon+p)m/\rho$;

DMAX – скорость самой быстрой волны.

```
PARAMETER (N=200, N1=N+1)
```

```
COMMON G, XI, HX
```

```
DIMENSION R(N), RU(N), RE(N), FR(N1), FRU(N1), FRE(N1)
```

```
!*****
```

```
!* Задаем исходные данные *
```

```
!*****
```

```
G=1.4
```

```
COURANT=0.9
```

```
TIME_END=0.4
```

```

      XI=G-1.
      HX=2./N
!*****
!*   Присвоение начальных данных           *
!*****
      TIME=0.
      CALL INIT_VAL(R, RU, RE, N)

      DO WHILE (TIME.LT.TIME_END)
!*****
!*   Расчет потоков на гранях ячеек       *
!*****
          CALL FLUXES(R, RU, RE, N, FR, FRU, FRE, DMAX)
!*****
!*   Задание потоков на границах области   *
!*****
          FR(1)=FR(2)
          FRU(1)=FRU(2)
          FRE(1)=FRE(2)
          FR(N1)=FR(N)
          FRU(N1)=FRU(N)
          FRE(N1)=FRE(N)
!*****
!*   Расчет параметров в центрах ячеек     *
!*   на новом временном слое               *
!*****
          TAU=COURANT*HX/DMAX
          TH=TAU/HX
          DO I=1, N
              II=I+1
              R(I) = R(I)-TH*( FR(II) - FR(I) )
              RU(I) = RU(I)-TH*( FRU(II) - FRU(I) )
              RE(I) = RE(I)-TH*( FRE(II) - FRE(I) )
          ENDDO
          TIME=TIME+TAU

      ENDDO

```

```

!*****
!* Вывод результатов в файл *
!*****
CALL OUTPUT(R, RU, RE, N)
STOP
END

```

```

!*****
!* Процедура вывода результатов *
!*****
SUBROUTINE OUTPUT(R, RU, RE, N)
COMMON G, XI, HX
DIMENSION R(N), RU(N), RE(N)
OPEN (1, FILE='NAME3.DAT')
X=-1-HX/2.
DO I=1,N
X=X+HX
WRITE(1,1)X, R(I), RU(I)/R(I), (RE(I)-
RU(I)**2/2/R(I))*XI
ENDDO
CLOSE(1)
1 FORMAT(1X,4F10.6)
RETURN
END

```

```

!*****
!* Процедура присвоения начальных данных *
!*****
SUBROUTINE INIT_VAL(R, RU, RE, N)
COMMON G, XI, HX
DIMENSION R(N), RU(N), RE(N)
DO I=1,N
IF (I.LE.N/2) THEN
R(I)=1.
RU(I)=0.
P=1.0
ELSE

```

```

      R(I)=0.125
      RU(I)=0.
      P=0.1
ENDIF
RE(I)=1.0/XI*P+RU(I)**2*0.5/R(I)
ENDDO
RETURN
END
!*****
!*      Процедура вычисления потоков на гранях ячеек      *
!*****
SUBROUTINE FLUXES(R,RU,RE,N,FR,FU,FE,DMAX)
COMMON G,XI,HX
DIMENSION R(1),RU(1),RE(1),FR(1),FU(1),FE(1)
DIMENSION F_PL(3,N),F_MI(3,N)
DMAX=0.
DO I=1,N
    P=(RE(I)-RU(I)**2*0.5/R(I))*XI
    C=SQRT(G*P/R(I))
    U=RU(I)/R(I)
    xMAX=U/C
    IF (ABS(xMAX).LE.1) THEN
        F_PL(1,I)=R(I)*C*0.25*ABS(xMAX+1.0)**2
        XX=XI*U+2*C
        F_PL(2,I)=F_PL(1,I)*XX/G
        F_PL(3,I)=F_PL(1,I)*0.5*XX**2/(G**2-1)
        F_MI(1,I)=-R(I)*C*0.25*ABS(xMAX-1.0)**2
        XX=XI*U-2*C
        F_MI(2,I)=F_MI(1,I)*XX/G
        F_MI(3,I)=F_MI(1,I)*0.5*XX**2/(G**2-1)
    ELSE IF (xMAX.GE.1.0) THEN
        F_PL(1,I)=RU(I)
        F_PL(2,I)=R(I)*U**2+P
        F_PL(3,I)=(RE(I)+P)*U
        F_MI(1,I)=0.
        F_MI(2,I)=0.
        F_MI(3,I)=0.
    ELSE

```

```

F_PL(1,I)=0.
F_PL(2,I)=0.
F_PL(3,I)=0.
F_MI(1,I)=RU(I)
F_MI(2,I)=R(I)*U**2+P
F_MI(3,I)=(RE(I)+P)*U
ENDIF
IF (ABS(U-C).GT.DMAX) DMAX=ABS(U-C)
IF (ABS(U+C).GT.DMAX) DMAX=ABS(U+C)
ENDDO
DO I=2,N
  I1=I-1
  FR(I)=F_PL(1,I1)+F_MI(1,I)
  FU(I)=F_PL(2,I1)+F_MI(2,I)
  FE(I)=F_PL(3,I1)+F_MI(3,I)
ENDDO
END

```

8.3. Программа для точного расчета задачи Сода

Задача Сода – это задача о нахождении параметров газа в ударной трубе после распада произвольного разрыва. В начальный момент времени газ покоится, а давление и плотность слева и справа от разрыва задаются равными $\rho_l=1$, $P_l=1$; $\rho_r=0.125$, $P_r=0.1$.

Программа рассчитывает точное решение для класса задач Сода в ударных трубах, а именно для ударных труб, которые создают ударные волны, контактные разрывы и волны разрежения. Решение находится в точке пространства x в момент времени t . (благодаря автомодельности, точное решение будет одним и тем же для одинаковых значений x/t)

Замечание: Т.к. течение за ударной волной неадиабатично, в то время как течение внутри волны разрежения адиабатично, то задача не будет симметричной относительно начальной точки разрыва. В частности, начальное условие с высокой плотностью должно быть введено слева от точки разрыва.


```

!*****
!* Написано Робертом Фишером (Robert Fisher), 12/5/96. *
!*****

PROGRAM EXACT_SOD
IMPLICIT NONE
REAL*8 GAMMA, MU2, X, T, XMAX
INTEGER NUMCELLS
!*****
!* xmax определяет размер расчетной области (-xmax, +xmax). *
!* numcells определяет число ячеек в таблице вывода результатов *
!*****

PARAMETER (GAMMA = 1.4D0)
PARAMETER (MU2 = (GAMMA - 1.D0)/(GAMMA + 1.D0))
PARAMETER (XMAX = 1.D0)
PARAMETER (NUMCELLS = 200)
REAL*8 PL, PR, RHOL, RHOR, CL, CR, PM, PRESSURE,
& RHOML, VS, VT, RHOMR, VM, DENSITY, VELOCITY
INTEGER I
COMMON/BLOCK1/ PL, PR, RHOL, RHOR, CL, CR
REAL*8 RTBIS
EXTERNAL RTBIS

!*****
!* Определяем время решения задачи *
!*****

T = 4.00D-1

!*****
!* Определяем начальные условия в задаче Сода *
!* для левого и правого состояний от разрыва *
!*****

PL = 1D0
PR = 0.1D0

RHOL = 1D0
RHOR = 1.25D-1

```

!*****

!* *Определяем скорость звука слева и справа*

!* *от разрыва в трубе*

!*****

$$CL = DSQRT (GAMMA * PL / RHOL)$$

$$CR = DSQRT (GAMMA * PR / RHOR)$$

!*****

!* *Определяем давление за ударной волной рm. **

!*****

$$PM = RTBIS (PR, PL, 1.D-16)$$

!*****

!* *Определяем плотность слева от контактного разрыва rhoml*

!*****

$$RHOML = RHOL * (PM / PL) ** (1.D0 / GAMMA)$$

!*****

!* *Определяем скорость газа за ударной волной vm. **

!*****

$$VM = 2.D0*CL/(GAMMA - 1.D0)*(1.D0 - (PM/PL)**$$
$$\& ((GAMMA-1.D0)/(2.D0*GAMMA)))$$

!*****

* *Определяем плотность за ударной волной rhomr. **

!*****

$$RHOMR = RHOR * ((PM + MU2 * PR) / (PR + MU2 * PM))$$

!*****

!* *Определяем скорость ударной волны vs. **

!*****

$$VS = VM / (1.D0 - RHOR / RHOMR)$$

!*****

!* *Определяем скорость задней характеристики волны разрежения, vt.*

!*****

$$VT = CL - VM / (1.D0 - MU2)$$

```

!*****
!* Выводим таблицу значений плотности, *
!* скорости и давления в момент времени t. *
!*****
      OPEN (UNIT = 6, FILE = 'EXACT_SOD1.DAT')

      DO I = 0, NUMCELLS

          X = - XMAX + 2.D0 * XMAX * I / NUMCELLS

          IF (X .LE. - CL * T) THEN
              DENSITY = RHOL
          ELSE IF (X .LE. -VT * T) THEN
              DENSITY = RHOL*(-MU2*(X/(CL*T))+(1-MU2))**
& (2.D0 / (GAMMA - 1.D0))
          ELSE IF (X .LE. VM * T) THEN
              DENSITY = RHOML
          ELSE IF (X .LE. VS * T) THEN
              DENSITY = RHOMR
          ELSE
              DENSITY = RHOR
          END IF

          IF (X .LE. - CL * T) THEN
              PRESSURE = PL
          ELSE IF (X .LE. -VT * T) THEN
              PRESSURE=PL*(-MU2*(X/(CL*T) )+(1-MU2))**
& (2.D0 * GAMMA / (GAMMA - 1.D0))
          ELSE IF (X .LE. VS * T) THEN
              PRESSURE = PM
          ELSE
              PRESSURE = PR
          END IF

          IF (X .LE. -CL * T) THEN
              VELOCITY = 0.0

```

```

ELSE IF (X .LE. -VT * T) THEN
    VELOCITY = (1 - MU2) * (X / T + CL)
ELSE IF (X .LE. VS * T) THEN
    VELOCITY = VM
ELSE
    VELOCITY = 0.0
END IF

WRITE (6, 10) X, DENSITY, VELOCITY, PRESSURE

END DO

CLOSE (6)
10 FORMAT (E22.6, ' ', E22.6, ' ', E22.6, ' ', E22.6)
END

```

```

FUNCTION FUNC (PM)

```

```

!*****
!* func получается в результате приравнивания давления за
!* ударной волной и за волной разрежения (имеет место т.к.
!* нет скачка давления при переходе через контактный
!* разрыв). Используется для того, чтобы численно
!* найти рт слева и справа от разрыва.
!*****

```

```

IMPLICIT NONE

```

```

REAL*8 FUNC, PM
REAL*8 GAMMA, MU2

```

```

PARAMETER (GAMMA = 1.4D0)
PARAMETER (MU2 = (GAMMA - 1.D0) / (GAMMA + 1.D0))
REAL*8 PL, PR, RHOL, RHOR, CL, CR
COMMON/BLOCK1/ PL, PR, RHOL, RHOR, CL, CR
FUNC=-2*CL*(1 - (PM/PL)**((-1 + GAMMA)/(2*GAMMA)))/
& (CR*(-1 + GAMMA)) +

```

```

& (-1 + PM/PR)*((1-MU2)/(GAMMA*(MU2+ PM/PR)))*0.5
RETURN
END

```

```

FUNCTION RTBIS(X1,X2,XACC)

```

```

!*****

```

```

!* rtbis - заимствована из Numerical Recipes. Это алгоритм бисекций,

```

```

!* который применяется для нахождения рт, используя вызов

```

```

!* функции func.

```

```

!* Заметьте, что аргументы в rtbis были переделаны и значение

```

```

!* JMAX увеличено. Другими словами это идентично NR версии.

```

```

!*****

```

```

INTEGER JMAX

```

```

REAL*8 RTBIS, X1, X2, XACC, FUNC

```

```

EXTERNAL FUNC

```

```

PARAMETER (JMAX=100)

```

```

INTEGER J

```

```

REAL*8 DX, F, FMID, XMID

```

```

FMID=FUNC(X2)

```

```

F=FUNC(X1)

```

```

IF(F*FMID.GE.0.) PAUSE 'ROOT MUST BE BRACKETED IN RTBIS'

```

```

IF(F.LT.0.)THEN

```

```

    RTBIS=X1

```

```

    DX=X2-X1

```

```

ELSE

```

```

    RTBIS=X2

```

```

    DX=X1-X2

```

```

ENDIF

```

```

DO 11 J=1, JMAX

```

```

    DX=DX*5.D-1

```

```

    XMID=RTBIS+DX

```

```

    FMID=FUNC(XMID)

```

```

    IF(FMID.LE.0.)RTBIS=XMID

```

```

    IF(DABS(DX).LT.XACC .OR. FMID.EQ.0.) RETURN

```

```

11 CONTINUE

```

```

PAUSE 'TOO MANY BISECTIONS IN RTBIS'

```

```

END

```

ЛИТЕРАТУРА

1. Рихтмайер Р.Д., Мортон К.У. Разностные методы решения краевых задач. М.: Наука, 1972. 418 с.
2. Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979. 219 с.
3. Lax P.D. Weak Solution of Nonlinear Hyperbolic Equation and their Numerical Computation // Comms. Pure and Appl. Math. 1954. V.7. P.159–193.
4. Lax P.D., Wendroff. Systems of Conservation Laws // Comms. Pure and Appl. Math. 1960. V.13. P.217–237.
5. MacCormack R.W. The effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering // AIAA Paper. 1969. V. 69. P. 354–361.
6. Beam R.M., Warming R.F. An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law Form // J. Comp. Phys. 1976. V. 22. P.87–110.
7. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К.Годунова. М.: Наука, 1976. 400 с.
8. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. М.: Наука, 1969. 351 с.
9. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидромеханики // Математический сборник. 1959. Т.47. Вып. 3. С. 271–306.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Гидродинамика. М.:Наука. 1986. 736 с.
11. Roe P.L. Approximate Riemann Solvers. Parameter Vectors and Difference Schemes // J. Comp. Phys. 1981. V. 43. P. 357–372.
12. Einfeldt. On Godunov-type Methods for Gas Dynamics // J. Comp. Phys. 1988. V. 25. P. 294–318.
13. Steger J.L., Warming R.F. Flux-Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equation with Application to Finite Difference Methods // J. Comp. Phys. 1981. V. 40. №2. P. 263–293.
14. Van Leer B. Flux-Vector Splitting for the Euler Equation // Lecture Notes in Physics. 1982. V. 170. P. 507–512.
15. Harten A., Lax P.D., Van Leer B. On Upstream Differencing and

Godunov-type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // SIAM Review. 1983. V. 25. № 1. P. 35–61.

16. Дедеш В.В. Об одном методе построения схем типа Годунова // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 1. С. 36–39.

17. Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Finite Difference Scheme III. Upstream centered Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // J. Comp. Phys. 1977. V. 7. № 23. P. 263–275.

18. Ершов С.В. Квазимонотонная ENO-схема повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса // Математическое моделирование. 1994. Т. 6. № 11. С. 63–75.

19. Harten A. A High Resolution Scheme for the Computation of Weak Solution of Hyperbolic Conservation Laws // J. Comp. Phys. 1983. V. 49. P. 357–383.

20. Harten A., Osher S., Engquist B., Chacravarty S.R. Some Results on Uniformly High-Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes // Applied Numerical Mathematics. 1986. №2. P. 347–376.

21. Пинчуков В.И., Шу Ч.В. Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 232 с.

22. Lax P.D., Wendroff B. Systems of conservation laws // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 217–237.

23. M. S. Liou and C. J. Steffen. A New Flux Splitting Scheme // J. Comput. Phys. 1993. V.107. P. 23–39.

24. Колган В.П. Конечно-разностная схема для расчета двумерных разрывных решений нестационарной газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1975. Т. 4. № 1. С. 9–14.

25. Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. №. 1. P. 101–136.

26. Osher S., Chacravarty S.R. Very High Order Accurate TVD Schemes Approximating Hyperbolic Conservation Laws // ICASE Report №84-44. September, 1984.

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В методе конечных разностей решение уравнения в частных производных сводится к решению

- а) системы алгебраических уравнений;
- б) интегрального уравнения;
- в) обыкновенного дифференциального уравнения.

2. Основой метода конечных разностей является

- а) замена непрерывной области изменения независимых переменных совокупностью изолированных точек;
- б) представление решения в виде разности двух и более функций;
- в) поиск решения на конечных отрезках интегрирования.

3. Конечно-разностная аппроксимация производных заключается

- а) в замене производных соответствующими конечно разностными аналогами;
- б) в увеличении числа точек разбиения области изменения независимых переменных;
- в) в переходе от конечных разностей к производным искомой функции.

4. Порядок аппроксимации производной в формуле

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(t, x) - u(t, x - \Delta x)}{\Delta x} \text{ равен}$$

- а) один; б) два; в) три.

5. Порядок аппроксимации производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ в формуле

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x - \Delta x)}{2\Delta x} \text{ равен}$$

- а) один; б) два; в) три.

6. Для производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ можно построить следующее количество

конечно-разностных аппроксимаций

а) бесконечное множество; б) единственное; в) не более трех.

7. В правой части выражения

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(t,x)} = \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{(t,x)} + \dots$$

первое слагаемое называется

- а) конечно-разностным аналогом производной;
- б) погрешностью аппроксимации производной;
- в) остаточным членом ряда Тейлора.

8. В правой части выражения

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(t,x)} = \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{(t,x)} + \dots$$

второе и последующие слагаемые называются

- а) погрешностью аппроксимации производной;
- б) конечно-разностным аналогом производной;
- в) порядком аппроксимации производной.

9. Порядком аппроксимации производной называется

- а) степень приращения Δx в первом слагаемом погрешности;
- б) порядок производной в первом слагаемом погрешности;
- в) степень приращения Δx в знаменателе конечно-разностной формулы.

10. Значение разности $[u(t, x + \Delta x) - u(t, x)]/\Delta x$ будет близко к значению производной $\partial u/\partial x$, если

- а) функция $u(t, x)$ непрерывна, а Δx — достаточно мало;
- б) функция $u(t, x)$ разрывная, а Δx — достаточно мало;

- в) функция $u(t,x)$ непрерывна, а Δx — достаточно велико;
г) функция $u(t,x)$ разрывная, а Δx — достаточно велико.

11. Конечно-разностная формула $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x}$ **есть**

формула

- а) правых разностей; б) левых разностей; в) центральных разностей.

12. Конечно-разностная формула $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(t, x) - u(t, x - \Delta x)}{\Delta x}$ **есть**

формула

- а) правых разностей;
б) левых разностей;
в) центральных разностей.

13. Конечно-разностная формула $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x - \Delta x)}{2\Delta x}$

есть формула

- а) правых разностей;
б) левых разностей;
в) центральных разностей.

14. Сеточной функцией называется

- а) множество значений решения конечно-разностного аналога в узлах разностной сетки;
б) множество значений решения исходного дифференциального уравнения в узлах разностной сетки;
в) множество значений решения конечно-разностного уравнения во всей области изменения непрерывных аргументов.

15. Погрешностью аппроксимации конечно-разностного аналога является

- а) разность между исходным уравнением в частных производных и его конечно-разностным аналогом;
- б) разность между конечно-разностным аналогом и исходным уравнением в частных производных;
- в) погрешность аппроксимации старшей производной конечно-разностного аналога.

16. Система конечно-разностных уравнений называется явной схемой, если для нахождения решения на $n+1$ -ом временном слое аппроксимация производной по переменной x выполнена

- а) на n -ом временном слое;
- б) на $n+1$ -ом временном слое;
- в) на $n-1$ -ом временном слое.

17. Система конечно-разностных уравнений называется неявной схемой, если для нахождения решения на $n+1$ -ом временном слое аппроксимация производной по переменной x выполнена

- а) на n -ом временном слое;
- б) на $n+1$ -ом временном слое;
- в) на $n-1$ -ом временном слое.

18. Шаблоном разностной схемы называется

- а) совокупность узловых точек разностной сетки, используемых в разностном уравнении;
- б) совокупность всех узловых точек разностной сетки;
- в) совокупность тех узловых точек разностной сетки, опираясь на которые получается решение новом временном слое.

19. Порядком погрешности аппроксимации дифференциального уравнения в частных производных является

- а) минимальные степени приращений Δx и Δt в погрешности аппроксимации;
- б) максимальные степени приращений Δx и Δt в погрешности ап-

проксимации;

в) минимальные порядки производных в погрешности аппроксимации;

г) максимальные порядки производных в погрешности аппроксимации.

20. Разностная схема называется согласованной, если

а) схема аппроксимирует уравнение в частных производных;

б) схема устойчива к отклонениям в начальных данных;

в) решение, полученное по схеме, сходится к точному решению задачи.

21. Условием согласованности разностной схемы является

а) стремление к нулю погрешности аппроксимации при измельчении сетки;

б) стремление сеточной функции к точному решению;

в) стремление к нулю погрешности аппроксимации при укрупнении сетки.

22. Разностная схема называется устойчивой, если

а) на каждом шаге по временной координате любая ошибка не возрастает при переходе от одного шага к другому;

б) решение, полученное по схеме, сходится к точному решению задачи;

в) погрешность аппроксимации при измельчении сетки стремится к нулю.

23. Неустойчивая разностная схема

а) неправильно описывает физические процессы;

б) правильно описывает физические процессы;

в) правильно описывает любые неустойчивые процессы.

24. Под сходимостью разностной схемы понимается

а) стремление решения конечно-разностного аналога уравнения в частных производных к решению исходного уравнения при из-

мельчении сетки;

б) стремление погрешности аппроксимации к нулю при измельчении сетки.

в) сходимость конечно-разностных аналогов к точным выражениям для производных при измельчении сетки.

25. Теорема Лакса об эквивалентности гласит:

а) необходимым и достаточным условием сходимости разностной схемы для решения корректно поставленной задачи с начальными данными для линейного уравнения в частных производных является выполнение условий согласованности и устойчивости;

б) необходимым и достаточным условием согласованности разностной схемы для решения корректно поставленной задачи с начальными данными для линейного уравнения в частных производных является выполнение условий сходимости и устойчивости;

в) необходимым и достаточным условием устойчивости разностной схемы для решения корректно поставленной задачи с начальными данными для линейного уравнения в частных производных является выполнение условий сходимости и согласованности.

26. Возникающая в процессе вычисления ошибка, связанная с конечным числом знаков, используемых в арифметических операциях, называется

а) погрешностью округления; б) погрешностью аппроксимации;
в) погрешностью сходимости.

27. Выбрать правильный ответ

а) измельчение сетки, снижая погрешность аппроксимации, может увеличивать погрешность округления;

б) измельчение сетки, снижая погрешность округления, может увеличивать погрешность аппроксимации;

в) измельчение сетки, снижая погрешность округления, тем самым снижает погрешность аппроксимации.

28. Погрешность полученного на ЭВМ решения уравнения в частных производных равна

- а) сумме погрешностей аппроксимации и округления;
- б) погрешности округления;
- в) погрешности аппроксимации.

29. Теория устойчивости разностных схем изучает способ, которым разностный оператор

- а) преобразует начальные значения величин в их значения на следующем шаге по времени;
- б) аппроксимирует начальные значения величин на текущем шаге по времени;
- в) не позволяет увеличивать ошибку на текущем временном слое.

30. Для устойчивых разностных схем

- а) рост любого возмущения, вводимого на n -ом шаге по времени, ограничен;
- б) любое возмущение, вводимое на n -ом шаге по времени, линейно возрастает;
- в) рост любого возмущения, вводимого на n -ом шаге по времени, неограничен.

31. Для исследования устойчивости разностной схемы методом фон Неймана решение разностного уравнения для погрешности в узловой точке (j, n) ищут в виде:

- а) $\varepsilon_j^n = z^n e^{ik_m j \Delta x}$; б) $\varepsilon_j^n = e^n z^{ik_m j \Delta x}$; в) $\varepsilon_j^n = e^{nik_m j \Delta x}$.

32. Условие устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви для явной разностной схемы «правый уголок» уравнения переноса имеет вид:

- а) $0 < a\Delta t/\Delta x \leq 1$; б) $-1 < a\Delta t/\Delta x \leq 1$; в) $a\Delta t/\Delta x > 1$.

33. Коэффициент перехода для конечно-разностных схем

- а) зависит от шагов сетки и волнового числа;
- б) не зависит от шагов сетки и волнового числа;
- в) не зависит от шагов сетки, но зависит от волнового числа.

34. Коэффициент перехода позволяет определить ошибку

- а) по фазе; б) по длине волны; в) по частоте.

35. Коэффициент перехода позволяет определить ошибку

- а) по амплитуде; б) по длине волны; в) по частоте.

36. Разностные схемы

- а) искажают высокочастотные гармоники;
- б) искажают низкочастотные гармоники;
- в) не искажают высокочастотные гармоники.

37. Смысл условия Куранта-Фридрихса-Леви состоит в том, что

- а) область зависимости решения дифференциального уравнения должна лежать внутри области зависимости решения разностного уравнения;
- б) область зависимости решения разностного уравнения должна лежать внутри области зависимости решения дифференциального уравнения;
- в) области зависимостей решения разностного уравнения и решения дифференциального уравнения не должны совпадать друг с другом.

38. Если область зависимости решения дифференциального уравнения лежит внутри области зависимости решения разностного уравнения, то

- а) разностная схема «чувствует» изменения в начальных данных дифференциальной задачи;
- б) разностная схема может «не чувствовать» изменения в начальных данных дифференциальной задачи;

в) разностная схема неустойчива.

39. Если область зависимости решения разностного уравнения лежит внутри области зависимости решения дифференциального уравнения, то

а) разностная схема «чувствует» изменения в начальных данных дифференциальной задачи;

б) разностная схема может «не чувствовать» изменения в начальных данных дифференциальной задачи;

в) разностная схема устойчива.

40. Устойчивость конечно-разностных схем для решения систем линейных дифференциальных уравнений обеспечивается при условии:

а) абсолютное значение максимального собственного числа матрицы перехода не должно быть больше единицы;

б) все собственные числа матрицы перехода должны быть отрицательны;

в) абсолютное значение минимального собственного числа матрицы перехода не должно быть больше единицы.

41. Устойчивость конечно-разностных схем для решения систем линейных дифференциальных уравнений

$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0$ обеспечивается при условии:

а) число Куранта, построенное по максимальному значению модуля собственного числа матрицы A , не превосходит единицы;

б) все собственные числа матрицы A должны быть меньше единицы;

в) число Куранта, построенное по минимальному значению модуля собственного числа матрицы A , не превосходит единицы.

42. Дифференциальным приближением разностной схемы называется дифференциальное уравнение в частных производ-

ных, которое получается

- а) из разностной схемы, если вместо сеточных функций подставить их разложение в ряд Тейлора;
- б) путем дифференцирования сеточной функции в узлах шаблона разностной схемы;
- в) путем замены искомой функции непрерывного аргумента в исходном дифференциальном уравнении в частных производных сеточной функцией.

43. Дифференциальное приближение разностной схемы используют для

- а) анализа устойчивости и исследования свойств разностных схем;
- б) получения решения исходного дифференциального уравнения в частных производных;
- в) решения конечно-разностной схемы.

44. При использовании метода конечных разностей на самом деле получается решение

- а) модифицированного уравнения, а не исходного уравнения в частных производных;
- б) исходного уравнения в частных производных, а не модифицированного уравнения;
- в) приближенное решение модифицированного уравнения.

45. Выбрать правильное утверждение:

- а) модифицированное уравнение следует из разностного уравнения;
- б) модифицированное уравнение следует из исходного дифференциального уравнения в частных производных;
- в) модифицированное уравнение является приближением разностного уравнения.

46. Правая часть модифицированного уравнения является погрешностью аппроксимации:

- а) исходного дифференциального уравнения;
- б) разностной схемы;
- в) дифференциального приближения.

47. Порядок точности разностной схемы определяется по

- а) члену наименьшего порядка в правой части модифицированного уравнения;
- б) члену наивысшего порядка в правой части модифицированного уравнения;
- в) членам средних порядков в правой части модифицированного уравнения.

48. Для схемы «правый уголок» в случае равенства числа Куранта единице

- а) правая часть модифицированного уравнения равна нулю;
- б) правая часть модифицированного уравнения больше нуля;
- в) правая часть модифицированного уравнения меньше нуля.

49. Схема с разностями против потока при числе Куранта не равным единице

- а) неявно вводит в уравнение искусственную вязкость;
- б) явно вводит в уравнение искусственную вязкость;
- в) не вводит в уравнение искусственную вязкость.

50. Искусственная вязкость изменяет градиенты всех параметров независимо от причины возникновения этих градиентов следующим образом:

- а) уменьшает градиенты;
- б) увеличивает градиенты;
- в) не влияет на изменение этих градиенты.

51. Свойство разностной схемы, обусловленное наличием в выражении для погрешности аппроксимации производных четного порядка, называют

- а) диссипацией; б) диффузией; в) дисперсией.

52. Свойство разностной схемы, обусловленное наличием в выражении для погрешности аппроксимации производных нечетного порядка, называют

а) диссипацией; б) диффузией; в) дисперсией.

53. Свойство разностной схемы, обусловленное наличием в выражении для погрешности аппроксимации производных четного и нечетного порядка, называют

а) диссипацией; б) диффузией; в) дисперсией.

54. К искажению соотношения фаз волн различной длины приводит

а) дисперсия; б) диссипацией; в) диффузией.

55. Если главный член в выражении для погрешности аппроксимации содержит производную четного порядка, то схема

а) обладает в основном диссипативными свойствами;

б) обладает в основном дисперсионными свойствами;

в) не обладает диффузионными свойствами.

56. Если главный член в выражении для погрешности аппроксимации содержит производную нечетного порядка, то схема

а) обладает в основном диссипативными свойствами;

б) обладает в основном дисперсионными свойствами;

в) не обладает диффузионными свойствами.

57. На основе анализа членов модифицированного уравнения с производными четного порядка можно

а) судить об устойчивости разностных схем;

б) определять погрешность, связанную с изменением фазы;

в) определять ошибку аппроксимации.

58. На основе анализа членов модифицированного уравнения с производными нечетного порядка можно

- а) судить об устойчивости разностных схем;
- б) определять погрешность, связанную с изменением фазы;
- в) определять ошибку аппроксимации.

59. Между коэффициентом перехода разностной схемы и видом модифицированного уравнения

- а) существует связь; б) нет никакой связи; в) связь возможна.

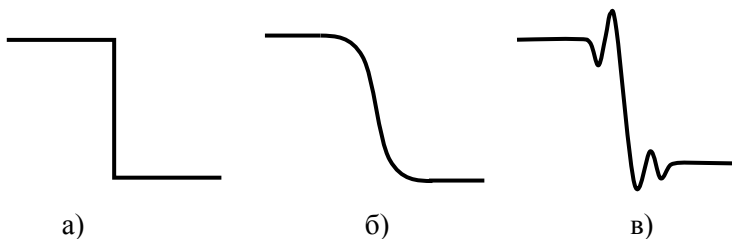
60. В разностных схемах первого порядка аппроксимации ошибка является в основном

- а) диссипативной; б) дисперсионной; в) диффузионной.

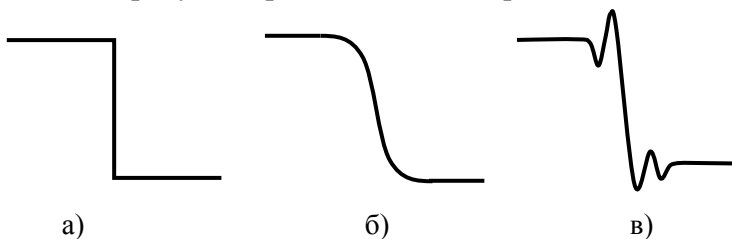
61. В разностных схемах второго порядка аппроксимации ошибка является в основном

- а) диссипативной; б) дисперсионной; в) диффузионной.

62. На каком рисунке проявляется диссипация



63. На каком рисунке проявляется дисперсия



64. Фазовый угол разностной схемы определяется через коэффициент перехода G по формуле:

а) $\Phi = \arctg \frac{\operatorname{Im}(G)}{\operatorname{Re}(G)}$; б) $\Phi = \arctg \frac{\operatorname{Re}(G)}{\operatorname{Im}(G)}$; в) $\Phi = \operatorname{arccctg} \frac{\operatorname{Im}(G)}{\operatorname{Re}(G)}$.

65. Модуль коэффициента перехода G для разностной схемы определяется по формуле:

а) $|G| = \sqrt{\operatorname{Im}(G)^2 + \operatorname{Re}(G)^2}$; б) $|G| = \sqrt{\operatorname{Im}(G^2) + \operatorname{Re}(G^2)}$;

в) $|G| = \sqrt[3]{\operatorname{Im}(G)^3 + \operatorname{Re}(G)^3}$.

66. Фазовый угол точного решения уравнения переноса определяется через коэффициент перехода

- а) точного решения уравнения переноса;
- б) модифицированного уравнения;
- в) разностной схемы.

67. Если u_0 – начальное значение амплитуды волны, то суммарная ошибка в определении амплитуды после n шагов решения уравнения по схеме с разностями против потока равна

а) $(1 - |G|^n)u_0$; б) $(|G|^n - 1)u_0$; в) $|G|^n$.

68. Если Φ_e – фазовый угол точного решения уравнения переноса, а Φ – фазовый угол решения, полученного по разностной схеме, то дисперсионная ошибка после n шагов решения уравнения по схеме равна

а) $n(\Phi_e - \Phi)$; б) $(\Phi_e - \Phi)/n$; в) $\sqrt{n(\Phi_e^2 - \Phi^2)}$.

69. Какие из указанных схем являются схемами второго порядка точности?

а) $u_j^{n+1} = u_j^n - r(u_j^n - u_{j-1}^n)$;

$$\text{б) } u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - r \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2};$$

$$\text{в) } u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{r}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}r^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

70. Какие из указанных схем являются схемами первого порядка точности?

$$\text{а) } u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - r \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2};$$

$$\text{б) } u_j^{n+1} = u_j^n - r(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}r(r-1)(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n);$$

$$\text{в) } u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{r}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}r^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

71. Какие схемы являются схемами предиктор-корректор

а) схема МакКормака; б) схема Лакса; в) схема правый уголок.

72. Какие схемы не являются схемами предиктор-корректор

а) схема МакКормака; б) схема Лакса; в) схема Лакса-Вендроффа.

73. Какие из указанных схем являются схемами второго порядка точности?

а) схема МакКормака; б) схема Лакса; в) схема правый уголок.

74. Какие из из указанных схем являются схемами первого порядка точности?

а) схема МакКормака; б) схема Лакса; в) схема Лакса-Вендроффа.

75. Обобщенные решения, полученные по разностным схемам, могут описывать

а) разрывные и непрерывные решения;

б) только разрывные;

в) только непрерывные.

76. Для введения понятия обобщенного решения используют следующий прием: записывают физические законы в

- а) интегральной форме; б) дифференциальной форме;
- в) алгебраической форме.

77. Для введения понятия обобщенного решения используют следующий прием:

- а) искусственно вводят в дифференциальные уравнения слагаемые, при которых эти уравнения имеют гладкие решения;
- б) искусственно вводят в дифференциальные уравнения слагаемые, при которых эти уравнения имеют разрывные решения;
- в) интегрируют дифференциальные уравнения с искусственно введенными слагаемыми, при которых эти уравнения имеют разрывные решения.

78. В случае гладкого решения характеристики модельного уравнения газовой динамики

- а) пересекаются; б) не пересекаются; в) не существуют.

79. В случае разрывного решения характеристики модельного уравнения газовой динамики

- а) пересекаются; б) не пересекаются; в) не существуют.

80. Для уравнения $u_t + u \cdot u_x = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$ при монотонно возрастающей функции $\varphi(x)$ характеристики уравнения

- а) не пересекаются; б) пересекаются; в) параллельны друг другу.

81. Для уравнения $u_t + u \cdot u_x = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$ при монотонно убывающей функции $\varphi(x)$ характеристики уравнения

- а) не пересекаются; б) пересекаются; в) параллельны друг другу.

82. Обобщенным решением уравнения дифференциального уравнения называется всякая кусочно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая при произвольном выборе контура Γ в полуплоскости $t > 0$

а) интегральному уравнению; б) дифференциальному уравнению; в) алгебраическому уравнению.

83. Понятие обобщенного решения

а) зависит от того, какой интегральный закон сохранения ставится в соответствие дифференциальному уравнению;

б) не зависит от того, какой интегральный закон сохранения ставится в соответствие дифференциальному уравнению;

в) совпадает с понятием решения дифференциального уравнения.

84. Выбор обобщенного решения для соответствующего дифференциального уравнения определяется

а) физическим смыслом задачи; б) геометрией области решения;

в) видом дифференциального уравнения.

85. Уравнение линии разрыва в обобщенном решении, соответствующего дифференциальному уравнению $u_t + u \cdot u_x = 0$

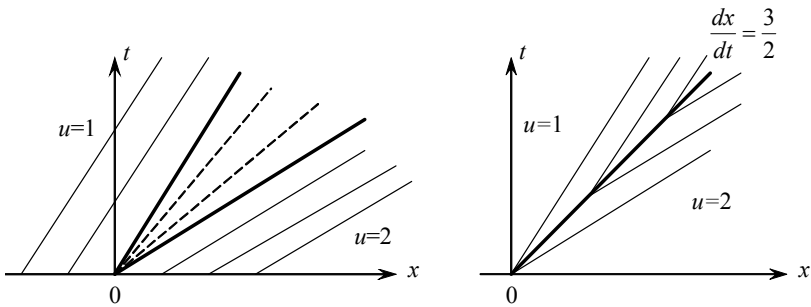
имеет вид

а)
$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_{\text{прав}} + u_{\text{лев}}}{2};$$

б)
$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3} \frac{u_{\text{прав}}^2 + u_{\text{прав}} u_{\text{лев}} + u_{\text{лев}}^2}{u_{\text{прав}} + u_{\text{лев}}};$$

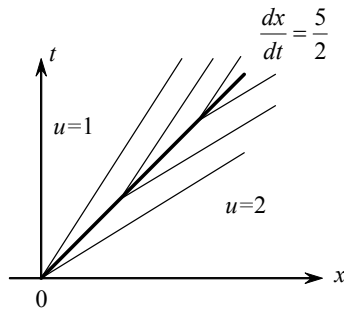
в)
$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_{\text{прав}} - u_{\text{лев}}}{2}.$$

86. Какое из показанных решений уравнения $u_t + u \cdot u_x = 0$ является правильным в случае распада разрыва для следующих начальных значений $u(x,0) = 1$ при $x < 0$ и $u(x,0) = 2$ при $x > 0$.



а)

б)



в)

87. Можно ли решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $\mu \rightarrow 0$ принимать за обобщенное решение задачи $u_t + u \cdot u_x = 0$, $u(x, 0) = \phi(x)$.

а) да;

б) нет;

в) только в случае непрерывной функции $\phi(x)$ начальных значений.

88. При построении разностной схемы для получения реше-

ний уравнения $u_t + u \cdot u_x = 0$ надо опираться на

- а) интегральный закон, соответствующий искомому обобщенному решению;
- б) дифференциальное уравнение $u_t + u \cdot u_x = 0$;
- в) корректную разностную схему получить невозможно.

**89. При построении разностной схемы для получения реше-
ний уравнения $u_t + u \cdot u_x = 0$ надо опираться на**

- а) уравнение с искусственной вязкостью $u_t + u \cdot u_x = \mu \cdot u_{xx}$;
- б) дифференциальное уравнение $u_t + u \cdot u_x = 0$;
- в) корректную разностную схему получить невозможно.

90. Правильное решение уравнения $u_t + u \cdot u_x = 0$ с помощью

разностной схемы $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$ возможно получить

- а) при любых начальных данных;
- б) только в случае разрывных решений;
- в) только в случае непрерывных решений.

91. Правильное решение уравнения $u_t + u \cdot u_x = 0$ с помощью

разностной схемы $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x}$ при

$\mu \rightarrow 0$ возможно получить

- а) при любых начальных данных;
- б) только в случае разрывных решений;
- в) только в случае непрерывных решений.

**92. Решение уравнения $u_t + u \cdot u_x = 0$ с помощью метода харак-
теристик возможно получить**

- а) при любых начальных данных;
- б) только в случае разрывных решений;

в) только в случае непрерывных решений.

93. Укажите достоинства метода характеристик

- а) позволяет точно выделять и рассчитывать разрывы;
- б) простота логики расчета множественных разрывов;
- в) простота реализации.

94. Укажите недостатки метода характеристик

- а) размывает разрывы;
- б) сложность логики расчета множественных разрывов;
- в) сложность реализации.

95. Свойство дивергентности разностной схемы состоит

- а) в обнулении всех величин, определенных на сторонах сеточных прямоугольников, не принадлежащих границе области, при суммировании разностных уравнений по всем сеточным прямоугольникам;
- б) в обнулении всех величин, определенных только на сторонах сеточных прямоугольников, принадлежащих границе области, при суммировании разностных уравнений по всем сеточным прямоугольникам;
- в) в сохранении всех величин, определенных на сторонах сеточных прямоугольников, при суммировании разностных уравнений по всем сеточным прямоугольникам.

96. Разностные схемы, при суммировании которых по точкам сеточной области остаются только алгебраические суммы значений неизвестных или функций от них вдоль границы области, называют

- а) дивергентными или консервативными;
- б) сходящимися;
- в) корректными.

97. Какие из указанных разностных схем дивергентная:

а) $\Delta x \left[u_j^{n+1} - u_j^n \right] + \frac{\Delta t}{2} \left[\left(U_{j+0.5}^{n+0.5} \right)^2 - \left(U_{j-0.5}^{n+0.5} \right)^2 \right] = 0 ;$

$$\text{б) } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0;$$

$$\text{в) } \Delta x \left[u_j^{n+1} - u_j^n \right] + u_j^n \frac{\Delta t}{2} \left[\left(U_{j+0.5}^{n+0.5} \right) - \left(U_{j-0.5}^{n+0.5} \right) \right] = 0.$$

98. В схеме С.К.Годунова

$$\Delta x \left[u_j^{n+1} - u_j^n \right] + \frac{\Delta t}{2} \left[\left(U_{j+0.5}^{n+0.5} \right)^2 - \left(U_{j-0.5}^{n+0.5} \right)^2 \right] = 0 \text{ для вычисления величин } U_{j+0.5}^{n+0.5} \text{ используется}$$

- а) решение задачи о «распаде разрыва»;
- б) линейная интерполяция по значениям функции из двух ближайших ячеек u_j^n и u_{j+1}^n ;
- в) среднегармоническое из u_j^n и u_{j+1}^n .

99. Для системы уравнений газовой динамики собственными числами матрицы Якоби являются:

- а) $u, u+c, u-c$; б) $u, u+c, c-u$; в) $-u, u+c, u-c$,
- здесь u – скорость течения газа, c – скорость звука в газе.

100. Для системы уравнений газовой динамики собственные числа матрицы Якоби по физическому смыслу соответствуют скоростям распространения

- а) слабых возмущений в газе;
- б) сильных возмущений в газе;
- в) ударных волн.

101. Матрица левых собственных векторов матрицы Якоби имеет следующий физический смысл:

- а) преобразует дифференциалы консервативных газодинамических переменных в дифференциалы Римановых переменных;
- б) преобразует дифференциалы Римановых переменных в дифференциалы консервативных газодинамических переменных;

в) определяет скорости распространения слабых возмущений в газе.

102. Указать дифференциалы консервативных переменных

а) dp , $d\rho u$, $d\rho E$;

б) $dp - c^2 d\rho$, $dp + \rho c du$, $dp - \rho c du$;

в) $dp + \rho c du$, $d\rho u$, $dp - \rho c du$.

103. Указать дифференциалы Римановых переменных

а) dp , $d\rho u$, $d\rho E$;

б) $dp - c^2 d\rho$, $dp + \rho c du$, $dp - \rho c du$;

в) $dp + \rho c du$, $d\rho u$, $dp - \rho c du$.

104. Для одномерных уравнений газовой динамики при сверхзвуковом течении на входной границе области задаются

а) три условия; б) два условия; в) одно условие; г) не задаются.

105. Для одномерных уравнений газовой динамики при сверхзвуковом течении на выходной границе области задаются

а) три условия; б) два условия; в) одно условие; г) не задаются.

106. Для одномерных уравнений газовой динамики при дозвуковом течении на входной границе области задаются

а) три условия; б) два условия; в) одно условие; г) не задаются.

107. Для одномерных уравнений газовой динамики при дозвуковом течении на выходной границе области задаются

а) три условия; б) два условия; в) одно условие; г) не задаются.

108. Для одномерных уравнений газовой динамики при звуковом истечении на выходной границе области задаются

а) три условия; б) два условия; в) одно условие; г) не задаются.

109. Для одномерных уравнений газовой динамики при звуковом втекании на входной границе области задаются

а) три условия; б) два условия; в) одно условие; г) не задаются.

110. При решении системы уравнений газовой динамики методом характеристик система уравнений записывается в

а) консервативных переменных;

б) Римановых переменных;

в) Лагранжевых переменных.

111. Разностные схемы типа схемы С.К.Годунова для решения уравнений газовой динамики являются схемами

а) консервативными; б) недивергентными; в) центральными.

112. Плотность, рассчитанная по формуле

$$\rho_{i+1/2} = \frac{\rho_i \sqrt{\rho_i} + \rho_{i+1} \sqrt{\rho_{i+1}}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_{i+1}}}$$
, для определения потока на границе

ячейки используется в методе:

а) Годунова С.К.

б) Роу;

в) Стегера-Уорминга;

г) Ван Лира.

113. Поток на границе ячейки, рассчитанный по формуле

$$\left[\frac{\rho c}{4} (M+1)^2 \right]_i - \left[\frac{\rho c}{4} (M-1)^2 \right]_{i+1}$$
 используется в методе

а) Годунова С.К.; б) Роу; в) Стегера-Уорминга; г) Ван Лира.

114. В методе полиномиального представления матрицы численной вязкости матрица численной вязкости представляется в виде полинома по степеням

а) матрицы Якоби; б) диагональной матрицы собственных значений матрицы Якоби; в) матрицы преобразования подобия.

115. Какие схемы являются немонотонными

- а) схема Годунова; б) схема МакКормака; в) схема Колгана;
- г) схема Лакса-Вендроффа; д) схема Чакраварти-Ошера;
- е) схема Роу

116. Какие схемы являются монотонными

- а) схема Годунова; б) схема МакКормака; в) схема Колгана;
- г) схема Лакса-Вендроффа; д) схема Чакраварти-Ошера;
- е) схема Роу.

117. Какие схемы являются квазимонотонными

- а) схема Годунова; б) схема МакКормака; в) схема Колгана;
- г) схема Лакса-Вендроффа; д) схема Чакраварти-Ошера;
- е) схема Роу.

118. К каким схемам относятся ENO схемы?

- а) монотонные; б) квазимонотонные; в) немонотонные.

119. В TVD схемах потоки на границах ячеек рассчитываются с учетом выбора

- а) минимального значения модуля производных внутри ячейки;
- б) максимального значения модуля производных внутри ячейки;
- в) среднего значения модуля производных внутри ячейки.

Учебное издание

**Леонид Леонидович Миньков
Эрнст Рафаилович Шрагер**

**ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ
ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ**

Учебное пособие

Опубликовано в авторской редакции

Издательство "СТТ"
Россия, 634028, г. Томск, проспект Ленина, 15^Б-1
Тел.: (3822) 421-455
E-mail: stt@sttonline.com

Усл. печ. л. 7,14. Уч.-изд. л. 3,14.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Подписано к печати 30.05.2016 г. Формат 60x84/16
Тираж 100 экз. Заказ № 561.