

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Физико-технический факультет

Л.Л. Миньков, К.М. Моисеева, В.А. Порязов

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО «ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ»**

Учебно-методическое пособие

Scientific & Technical Translations



ИЗДАТЕЛЬСТВО

Томск – 2019

ББК 30.13; 30.124

УДК 519.6

М57

РАССМОТРЕНО И РЕКОМЕНДОВАНО К ПЕЧАТИ

Советом физико-технического факультета Томского
государственного университета

Протокол № 43 от «30» июня 2017 г.

Председатель Совета ФТФ Э.Р. Шрагер

М57 Миньков Л.Л., Моисеева К.М., Порязов В.А. **Сборник задач по «Приближенным вычислениям»** : учеб.-метод. пособие. – Томск : STT, 2019. – 106 с.

ISBN 978-5-93629-623-9

В данном пособии приводятся задачи для самостоятельного решения на ЭВМ и описаны рекомендации к их выполнению по курсу «Приближенные вычисления», читаемому для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Техническая физика», «Прикладная механика», «Баллистика и аэродинамика», «Робототехника». Даны рекомендации к решению задач и форме представления отчета.

Пособие будет полезно для обучающихся основам приближенных вычислений, а также для специалистов, занимающихся численным решением физических задач и обработкой результатов экспериментальных исследований.

ББК 30.13; 30.124

УДК 519.6

Рецензент:

Крайнов А.Ю. – профессор кафедры математической физики
Томского государственного университета.

ISBN 978-5-93629-623-9

© Л.Л. Миньков, К.М. Моисеева,
В.А. Порязов, 2019

© Томский государственный университет, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТИ.....	5
1.1. Основные понятия и задачи.....	5
1.2. Контрольные задания.....	8
2. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ.....	12
2.1. Основные понятия и методы решения.....	12
2.2. Примеры.....	16
2.3. Контрольные задания.....	21
3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.....	27
3.1. Основные понятия и методы решения.....	27
3.2. Примеры.....	32
3.3. Контрольные задания.....	37
4. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.....	42
4.1. Основные понятия и методы решения.....	42
4.2. Примеры.....	46
4.3. Некорректность операции численного дифференцирования.....	49
4.4. Контрольные задания.....	50
5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	54
5.1. Основные понятия.....	54
5.2. Примеры.....	58
5.3. Контрольные задания.....	63
6. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	65
6.1. Основные понятия и методы решения.....	65
6.2. Примеры.....	69
6.3. Контрольные задания.....	70
7. СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	73
7.1. Основные понятия и методы решения.....	73
7.2. Примеры.....	76
7.3. Контрольные задания.....	79
8. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	81
8.1. Основные понятия и методы решения.....	81
8.2. Примеры.....	84
8.3. Контрольные задания.....	88
9. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.....	92
9.1. Основные понятия и методы решения.....	92
9.2. Примеры.....	97
9.3. Контрольные задания.....	101
Литература.....	105

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий сборник задач является приложением к учебному пособию [1] и полностью соответствует курсу лекций, читаемых на физико-техническом факультете в течение двух семестров. В данном учебно-методическом пособии приведены задачи по основным разделам курса лекций «Приближенные вычисления» и кратко изложены примеры решения типичных задач. Полное изложение теории к рассматриваемым задачам читатель может найти в учебном пособии [1], в конспектах лекций по «Приближенным вычислениям», а также в книгах по вычислительной математике [2–6]. Настоящий сборник задач не претендует на максимально полное изложение методов решения поставленных задач. Основной целью задачника является изложение подходов и алгоритмов, используемых при решении.

1. ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТИ

1.1. Основные понятия и задачи

Основная задача теории погрешностей состоит в оценке погрешности результата вычислений при известных погрешностях исходных данных. Решение задачи с помощью ЭВМ всегда содержит погрешность и является приближенным. Источниками возникновения погрешности являются: 1. Погрешность математической модели. 2. Погрешность в исходных данных. 3. Погрешность использованного численного метода. 4. Погрешность округления или отбрасывания значащих цифр.

Погрешность математической модели определяется выбором математической модели. Например, решая задачу о движении снаряда, мы можем учесть сопротивление воздуха или пренебречь им, что приводит к разным результатам в вычислениях.

Погрешность в исходных данных возникает в силу погрешности измерений или погрешности вычислений, с помощью которых были получены исходные данные.

Погрешность численного метода определяется точностью выбранного численного метода и погрешностью инструмента вычислений.

Погрешность из-за округления или отбрасывания лишних цифр возникает тогда, когда мы стремимся к короткой записи числа и отбрасываем значащие цифры в записи числа.

Абсолютной погрешностью приближенного числа α_a называется величина:

$$\alpha_a = |x - a|, \quad (1.1)$$

где x – точное значение величины, a – приближенное число, которое можно принять за значение величины.

Относительной погрешностью приближенного числа α называется величина:

$$\delta_a = \frac{\alpha_a}{|a|}, \quad (1.2)$$

где α_a – абсолютная погрешность вычисления (1.1), a – приближенное число, которое можно принять за значение величины.

Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева цифры. Например, в числах $a = 0.\underline{123}$, $a = 0.00\underline{51}$ значащими цифрами являются подчеркнутые цифры. Число значащих цифр в первом случае равно 3, во втором 2.

Вещественные числа в ЭВМ представляются в экспоненциальном виде (с плавающей точкой): $a = \pm m \cdot b^{\pm n}$, где m – мантисса числа, b – основание системы счисления (для десятичной системы счисления b соответственно равно 10), n – порядок числа. Например, число $a = 0.00510$ может быть записано, как $a = 5.10 \cdot 10^{-3}$. В Pascal ABS эта запись примет вид: 5.10E-03.

Любое положительное число x можно записать в виде десятичной дроби: $x = z_1 \cdot 10^m + z_2 \cdot 10^{m-1} + z_n \cdot 10^{m-n+1} + \dots$, где $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ – цифры числа x , m – старший десятичный разряд числа x . Абсолютная погрешность числа связана с числом верных значащих цифр n записи числа соотношением: $\alpha_a \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$. Связь между относительной погрешностью и числом верных значащих цифр n может быть определена по формуле $\delta_a \leq \frac{1}{2z_1} 10^{-n+1}$.

Пример 1.1. *Определить относительную и абсолютную погрешность для числа 68.95, полагая, что все цифры верные.*

1) Представим число в виде десятичной дроби: $68.95 = 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$. Проанализируем запись. Количество значащих цифр равно $n = 4$ (число цифр, использованных при записи), старший десятичный разряд числа равен $m = 1$ (соответствует степени десятки, стоящей при первой значащей цифре), $z_1 = 6$ – первая значащая цифра числа.

2) Найдем максимальное значение величины абсолютной погрешности:

$$\alpha_a \leq \frac{1}{2} 10^{1-4+1} = \frac{1}{2} 10^{-2} = 0.005.$$

3) Найдем величину относительной погрешности числа:

$$\delta_a \leq \frac{1}{2z_1} 10^{-n+1} = \frac{1}{2 \cdot 6} 10^{-4+1} = \frac{1}{12} 10^{-3} = \frac{1}{12000} = 0.00008(3).$$

4) Оценку величины относительной погрешности можно сделать по формуле $\delta_a = \alpha_a / |a|$. В этом случае $\delta_a = 0.005 / 68.95 \approx 0.000072$

Погрешности некоторых арифметических вычислений.

1. Сумма и разность. Абсолютная погрешность суммы или разности нескольких чисел ($a, b > 0$) не превосходит суммы абсолютных погрешностей этих чисел. Относительная погрешность суммы не превосходит наибольшей относительной погрешности слагаемых. Абсолютные

и относительные погрешности суммы и разности двух чисел определяются по формулам:

$$\alpha_{a \pm b} = \alpha_a + \alpha_b,$$

$$\delta_{a+b} \leq \max(\delta_a, \delta_b), \delta_{a-b} = \frac{a}{|a-b|} \delta_a + \frac{b}{|a-b|} \delta_b. \quad (1.3)$$

Относительная погрешность разности в случае близких чисел согласно (3) может принимать весьма большие значения в силу малости $|a-b|$.

2. Произведение и частное. Относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей множителей. Относительная погрешность частного равна сумме относительных погрешностей делителя и делимого. Абсолютные и относительные погрешности произведения и частного двух чисел определяются по формулам:

$$\alpha_{a \cdot b} = |a \cdot b| \left(\frac{\alpha_a}{|a|} + \frac{\alpha_b}{|b|} \right), \alpha_{a/b} = \frac{1}{|b|} \alpha_a + \frac{|a|}{b^2} \alpha_b,$$

$$\delta_{a \cdot b} = \delta_a + \delta_b, \delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b. \quad (1.4)$$

3. Степень и логарифм. Относительная погрешность степени равна относительной погрешности основания, умноженной на показатель. Относительная погрешность вычисления логарифма равна частному относительной погрешности аргумента к абсолютному значению логарифма. Абсолютная погрешность вычисления натурального логарифма равна относительной погрешности аргумента. Абсолютные и относительные погрешности степени и логарифма определяются по формулам:

$$\alpha_{a^m} = m a^{m-1} \alpha_a, \delta_{a^m} = m \delta_a, \quad m - \text{const},$$

$$\alpha_{\ln a} = \delta_a, \delta_{\ln a} = \frac{\delta_a}{|\ln a|}. \quad (1.5)$$

Обратной задачей теории погрешности является определение погрешности аргументов таким образом, чтобы обеспечить заданную погрешность функции. Для того, чтобы это сделать, можно использовать принцип равных влияний, который основан на предположении, что все слагаемые в формуле

$$\alpha_y = \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial F}{\partial a_k} \right| \alpha_k. \quad (1.6)$$

Одинаково влияют на образование погрешности функции. Тогда для аргументов функции справедливы следующие значения абсолютной и относительной погрешности:

$$\alpha_k = \frac{\alpha_y}{N \left| \frac{\partial F}{\partial a_k} \right|}, \delta_k = \left| \frac{F}{a_k} \right| \frac{\alpha_k}{\alpha_y} \delta_y. \quad (1.7)$$

Пример 1.2. Для функции $y = \frac{x_1 + x_2^2}{x_3}$ определить точное значение, а

также относительную и абсолютную погрешность вычисления при $x_1 = -1.5$, $x_2 = 2.0$, $x_3 = 0.25$, полагая, что все цифры в числах верные.

1) Сперва определим значение функции при заданных значения x_1, x_2, x_3 .

$$y = \frac{-1.5 + 2.0^2}{0.25} = 10.$$

2) Аналогично примеру 1.1. вычисляем а погрешности записи чисел x_1, x_2, x_3 . $\alpha_{x_1} = 0.05$, $\alpha_{x_2} = 0.05$, $\alpha_{x_3} = 0.005$.

3) Из (1.6) найдем абсолютную погрешность вычисления y :

$$\alpha_y = \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial y}{\partial x_k} \right| \alpha_{x_k} = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \alpha_{x_1} + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \alpha_{x_2} + \left| \frac{\partial y}{\partial x_3} \right| \alpha_{x_3} = \left| \frac{1}{x_3} \right| \alpha_{x_1} + \left| \frac{2x_2}{x_3} \right| \alpha_{x_2} + \left| -\frac{(x_1 + x_2^2)}{x_3^2} \right| \alpha_{x_3} = \left| \frac{1}{0.25} \right| 0.05 + \left| \frac{2 \cdot 2}{0.25} \right| 0.05 + \left| -\frac{(-1.5 + 4)}{0.0625} \right| 0.005 = 1.2.$$

4) Зная абсолютную погрешность вычисления, можем найти относительную погрешность (1.2): $\delta_y = \frac{\alpha_y}{|y|} = \frac{1.2}{10} = 0.12$.

1.2. Контрольные задания

1	Найти сумму приближённых чисел $23.44 + 0.263 + 445$, все знаки которых верны, и указать её абсолютную и относительную погрешности.
2	Сторона квадрата равна $3.07 \text{ м} \pm 0.02 \text{ м}$. Вычислить площадь квадрата, округлив результат до верных знаков.

3	<p>Вычислить значение функции при заданных значениях переменных. Указать абсолютную и относительную погрешности результата, считая все знаки в исходных данных верными:</p> $u = \exp(x_1 + x_2^2), x_1 = 0.85, x_2 = 0.0632.$
4	<p>Определить количество верных значащих цифр в следующих числах: $x_1 = 0.85$, если $\delta_{x_1} = 0.2 \cdot 10^{-1}$; $x_2 = 0.0632$, если $\delta_{x_2} = 0.2 \cdot 10^{-4}$.</p>
5	<p>Найти допустимые абсолютные погрешности аргументов, позволяющих найти значение функции $u = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3$, если $x_1 = 3.21458$, $x_2 = 1.32487$, $x_3 = 0.026534$ с пятью верными знаками.</p>
6	<p>Определить относительную погрешность чисел $a = 27864$, $b = 5.18$, если $\alpha_a = 0.03$, $\alpha_b = 0.0004$.</p>
7	<p>Определить количество верных значащих цифр в числах x_1, x_2: $x_1 = 0.52432$, $x_2 = 0.293846$, если $\delta_{x_1} = 0.02\%$, $\delta_{x_2} = 0.34\%$.</p>
8	<p>Найти частное двух чисел $0.327/15.4236$. Указать относительную погрешность результата, полагая, что у чисел все знаки верные.</p>
9	<p>Вычислить значение функции $u = \frac{x_1^3 + x_2}{0.6x_3}$, если $x_1 = 2.68$, $x_2 = 0.498$, $x_3 = 2.653$. С какой абсолютной погрешностью следует задать x_1, x_2, x_3, чтобы получить значение функции с тремя верными значащими цифрами?</p>
10	<p>Найти допустимое число верных значащих цифр свободного члена уравнения $x^2 - 4x + e^{0.8} = 0$, чтобы получить корни с тремя верными знаками.</p>
11	<p>Определить количество верных значащих цифр в числах $a = 38441$, $b = 2.623$, если $\delta_a = 0.5\%$, $\delta_b = 0.8\%$.</p>
12	<p>Определить абсолютную погрешность чисел $a = 38.441$, $b = 0.002623$, если $\delta_a = 2.5\%$, $\delta_b = 0.9\%$.</p>

13	Найти произведение приближенных чисел 0.305, 254.8, 25.43, все знаки которых верны, и указать относительную и абсолютную погрешности результата.
14	С какой точностью должны быть измерены стороны $a=4$ м, $b=260$ м прямоугольника, чтобы его площадь можно было определить с абсолютной погрешностью 2 м ² ?
15	Определить абсолютную и относительную погрешность функции $y = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2$, если $x_1 = 0.4 \pm 0.06$, $x_2 = 0.7 \pm 0.07$, $x_3 = 0.5 \pm 0.04$.
16	Указать область неопределенности суммы двух величин $a=24.4827$ и $b=4.2$, если $\delta_a=0.04\%$, $\delta_b=0.4\%$.
17	Вычислить выражение $\frac{4.6 \cdot 293.28 \cdot 0.07625}{1.3846 + 19.423}$, полагая, что все знаки у чисел верны. Определить число значащих цифр результата.
18	Даны числа $a=3.265$ и $b=0.138$ с относительными погрешностями $\delta_a = \delta_b = 0.006$. Определить величину относительной погрешности $\sqrt{a-b}$.
19	Найти абсолютную и относительную погрешности объема шара $V = \frac{\pi}{6}d^3$, если $d=3.2 \pm 0.04$ (м), $\pi=3.14$.
20	Радиус основания цилиндра $R=4$ м, высота цилиндра $H=5$ м. С какими абсолютными погрешностями надо определить R и H , чтобы боковая поверхность цилиндра $M=2\pi RH$ была вычислена с точностью 0.1 м ² . Приближенное значение π взять равным 3.14 .
21	Вычислить абсолютную и относительную погрешности результата $X = \frac{a \cdot b}{\sqrt[3]{c}}$, если $a=3.85 \pm 0.03$, $b=2.0235 \pm 0.0005$, $c=839.7 \pm 0.04$
22	С каким числом верных значащих цифр следует взять значение аргумента $x=2.4$, чтобы получить значение функции $y=x^3 \sin(x)$ с пятью верными значащими цифрами?

23	Какое равенство точнее $2/21 \approx 0.095$ или $\sqrt{22} \approx 4.69$?
24	Вычислить абсолютную и относительную погрешности результата $Y = \frac{m^3 n}{e^x}$, если $m=1.6531 \pm 0.0003$, $n=3.78 \pm 0.002$, $x=0.158 \pm 0.0005$.
25	С какой абсолютной погрешностью следует задать значения аргументов x_1 и x_2 , чтобы получить значение функции $y=x_1 \cdot \exp(x_2)$ с четырьмя верными значащими цифрами? $x_1 = 0.476$, $x_2 = 1.234$.
26	Вычислить абсолютную и относительную погрешности результата $Y = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m \cdot (n-a)}$, где $a=10.82 \pm 0.03$, $b=2.786 \pm 0.0006$, $m=0.28 \pm 0.0006$, $n=14.7 \pm 0.06$.
27	С каким числом верных значащих цифр следует взять значение аргументов x_1 и x_2 , чтобы получить значение функции $y=(x_1 + x_2) \cdot \sin(x_1)$ с относительной погрешностью 3%. Здесь $x_1 = 0.754$, $x_2 = 1.342$
28	Вычислить абсолютную и относительную погрешность результата: $S = \frac{h^2}{18} \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$, если у чисел $a=2.234$, $b=4.518$, $h=4.48$ все знаки верные.
29	С каким числом верных значащих цифр должен быть известен свободный член уравнения $x^2 - 2x + \ln(2) = 0$, чтобы получить корни с четырьмя верными знакам?
30.	Дано $z = \frac{\exp(-x + 0.8y)}{2x + 0.65y}$. Определить абсолютные погрешности аргументов α_x и α_y , если $x=2.5$, $y=4.3$, а относительная погрешность результата $\delta_z = 2\%$.

2. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

2.1. Основные понятия и методы решения

Под аппроксимацией функции подразумевается приближение исходной функции другой, более удобной для обработки и анализа, а также восстановление непрерывной функции, обладающей определенными свойствами, по конечному числу значений другой таблично заданной функции.

Иными словами, аппроксимация некоторой функции $y=f(x)$ заключается в замене ее аппроксимирующей функцией $g(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$ так, чтобы ее отклонение от $f(x)$ в некоторой области определения функции удовлетворяло заданному условию. При этом аппроксимирующая функция $g(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$ обычно выбирается с учетом особенностей рассматриваемой функции $f(x)$. Частным случаем аппроксимации является интерполяция, когда аппроксимирующая функция проходит через каждую точку таблично заданной функции. Обычно задача аппроксимации распадается на две части:

1. Сначала устанавливают вид зависимости $y = f(x)$ и, соответственно, вид эмпирической формулы, то есть решают, является ли она *линейной*, *квадратичной*, *логарифмической* или какой-либо другой.
2. После этого определяются численные значения неизвестных параметров a_0, a_1, \dots, a_n выбранной эмпирической формулы, для которых приближение к заданной функции оказывается наилучшим.

Далее, рассмотрим некоторые методы аппроксимирования функций.

1. Аппроксимация функции с помощью интерполяционного полинома Ньютона.

Интерполяционным полиномом Ньютона называется полином вида:

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0) \times (x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \quad (2.1)$$

Погрешность интерполяционной формулы Ньютона может быть найдена из выражения:

$$R_n(x) = M_{n+1} \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!}. \quad (2.2)$$

Здесь M_{n+1} – максимум модуля производной функции $(n+1)$ -го порядка на рассматриваемом интервале, $M_{n+1} = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)|$.

Для таблиц с постоянным шагом интерполяционный полином Нью-

тона относительно произвольной внутренней точки i можно переписать в виде:

$$N_n(x_i + th) = y_i + t\Delta^1 y_i + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_i + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_i. \quad (2.3)$$

в случае интерполирования вперед. Или

$$N_n(x_i + th) = y_i + t\Delta^1 y_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{i-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!} \Delta^n y_{i-n}. \quad (2.4)$$

в случае интерполирования назад. Различие в формулах (2.3) и (2.4) заключается в выборе переменной t . В том случае, когда искомая величина x находится в левой части отрезка определения функции $y(x)$, лучше всего использовать формулу (2.3). При этом $t = \frac{x - x_i}{h}$, $x_k = x_i + (i - k)h$,

$k = 0..n$, $h > 0$. В случае, когда искомая точка x находится в правой части отрезка определения $y(x)$, желательно использовать формулу (2.4). В уравнениях (2.3) – (2.4) символ $\Delta^k y_i$ обозначает конечную разность, где k – порядок конечной разности. Вычислить конечную разность можно по формуле:

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)y_{i+k-2}}{2!} - \dots + (-1)^k y_i. \quad (2.5)$$

или последовательно по формулам:

$$\Delta^1 y_i = y_{i+1} - y_i;$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta^1 y_{i+1} - \Delta^1 y_i;$$

...

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i;$$

Погрешность интерполяционной формулы Ньютона может быть найдена из выражения:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} t(t-1)\dots(t-n). \quad (2.6)$$

для формулы (2.3). Или

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} t(t+1)\dots(t+n). \quad (2.7)$$

для формулы (2.4).

2. Аппроксимация функции с помощью интерполяционного полинома Лагранжа.

Интерполяционный полином Лагранжа представляет собой выражение вида:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \omega_i(x). \quad (2.8)$$

В этом выражении y_i – значения функции в узловых точках x_i , а $\omega_i(x)$ – вспомогательный Лагранжев полином, который может быть вычислен по формуле:

$$\omega_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \quad (2.9)$$

Погрешность интерполяционной формулы Лагранжа может быть определена из выражения:

$$R_n(x) = M_{n+1} \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!}. \quad (2.10)$$

Здесь M_{n+1} – максимум модуля производной функции $(n+1)$ -го порядка на рассматриваемом интервале, $M_{n+1} = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)|$.

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_i)\dots(x-x_n) = \prod_{i=0}^n (x-x_i).$$

3. Точечное квадратичное аппроксимирование таблично заданной нелинейной функции по методу наименьших квадратов.

В случае, когда нужно аппроксимировать таблицу значений функции $y=f(x)$, поведение точек которой не похоже на поведение многочленов 1-й, 2-й, и т.д. степени применяют метод наименьших квадратов. Суть метода заключается в подборе коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n аппроксимирующей функции таким образом, чтобы отклонение аппроксимирующей функции от исходной зависимости было минимальным.

При выполнении аппроксимации по методу наименьших квадратов, прежде всего, нужно подобрать вид аппроксимирующей функции. Желательно выбрать наиболее простые зависимости, содержащие минимальное количество коэффициентов. Выбор аппроксимирующей функции часто ложится на самого исследователя и основан на знании элементарной школьной математики. То есть важно подобрать такую аппроксимирующую функцию, которая могла бы наиболее точно описать характер зависимости $y=f(x)$ (квадратичная, экспоненциальная, логарифмическая и т.д.). В таблице 2.1 представлены простые функции, которые могут

быть использованы для аппроксимирования исходной зависимости. Отметим, что указанные формулы допускают линеаризацию (приведение исходной зависимости к линеаризованной, имеющей вид $\eta = \alpha\xi + \beta$, где $\eta = \varphi(x, y)$, $\xi = \phi(x, y)$, α, β – числовые коэффициенты). Выбор функций, поддающихся линеаризации, обусловлен возможностью упростить реализацию метода наименьших квадратов.

Таблица 2.1

Эмпирическая формула	$\eta = \varphi(x, y)$	$\xi = \phi(x, y)$	α	β
$y = ax^b$	$\eta = \lg(y)$	$\xi = \lg(x)$	b	$\lg(a)$
$y = ab^x$	$\eta = \lg(y)$	$\xi = x$	$\lg(b)$	$\lg(a)$
$y = a + b/x$	$\eta = y$	$\xi = 1/x$	b	a
$y = 1/(ax + b)$	$\eta = 1/y$	$\xi = x$	a	b
$y = x/(ax + b)$	$\eta = x/y$	$\xi = x$	a	b
$y = a \lg(x) + b$	$\eta = y$	$\xi = \lg(x)$	a	b

Схема решения по методу наименьших квадратов следующая:

1. Выбирается вид аппроксимирующей функции согласно таблице 1. Далее, работа идет не с самой аппроксимирующей функцией, а с линеаризованной функцией $\eta = \alpha\xi + \beta$. Для этого необходимо пересчитать исходную таблицу значений $y(x)$ в таблицу $\eta(\xi)$ по формулам из Таблицы 2.1.
2. Необходимо отыскать такие коэффициенты α, β , чтобы отклонение аппроксимирующей функции от исходной зависимости было минимальным. Для этого введем вспомогательную функцию, характеризующую квадратичное отклонение исходной функции от аппроксимирующей:

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^n (\alpha\xi_k + \beta - \eta_k)^2. \quad (2.14)$$

Здесь n – количество экспериментальных точек или количество узлов, на которых рассматривается заданная функция. Для нахождения оптимальной аппроксимирующей функции потребуем выполнения условий экстремума функции многих переменных:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 2 \sum_{k=1}^n \xi_k (\alpha \xi_k + \beta - \eta_k) = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 2 \sum_{k=1}^n (\alpha \xi_k + \beta - \eta_k) = 0.$$

Решение (2.15) позволяет найти значения коэффициентов α , β .

- Зная значения коэффициентов α , β , по выражениям из Таблицы 2.1 можно найти значения a , b . Далее, используя выбранную аппроксимирующую функцию из Таблицы 2.1, можно построить график аппроксимирующей и исходной функций. При удачном выборе аппроксимирующей функции различие между графиками на заданном интервале будет минимально.

4. Интегральное квадратичное аппроксимирование непрерывной функции с помощью обобщенного полинома, построенного на полиномах Лежандра.

Обобщенный полином, построенный на полиномах Лежандра, представляет собой выражение вида:

$$G_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i P_i(x). \quad (2.16)$$

В выражении (2.11) $P_i(x)$ – полиномы Лежандра, которые определяются по формуле:

$$P_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i} (x^2 - 1)^i, \quad (2.17)$$

коэффициенты полинома Лежандра c_i в (2.11) находятся по формуле:

$$c_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_i(x) dx. \quad (2.18)$$

В (2.13) $f(x)$ – аппроксимируемая функция.

2.2. Примеры

Пример 2.1. Рассмотрим в качестве примера задачу об аппроксимации функции, заданной таблично. Пусть дана функция $y(x)$, определенная таблицей значений:

x	1	2	3
y	2	7	11

Аппроксимируем данную функцию, используя описанные выше методы.

1. Аппроксимация функции с помощью интерполяционного полинома Ньютона.

Построим полином Ньютона по формуле (2.3) (имеем право применить данную формулу, так как x в задании изменяется с постоянным шагом, равным 1). Полином Ньютона в нашем случае будет иметь вид:

$N_2(x_0 + th) = y_0 + t\Delta^1 y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0$, шаг $h = 1$ (расстояние между точками x), $t = (x - x_0)/h = (x - 1)$. Найдем разделенные разности, используя формулу (2.5). Для удобства представим результаты в виде таблицы.

x_i	y_i	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$
1	2	5	-1
2	7	4	
3	11		

Используя полученные результаты, запишем интерполяционный полином Ньютона:

$$N_2(x) = 2 + 5(x-1) - \frac{(x-1)(x-2)}{2} = -0.5x^2 + 6.5x - 4. \quad (2.19)$$

Функция (2.19) аппроксимирует исходную таблично заданную функцию. Результат можно представить в виде графика. На рис. 2.1 интерполяционному полиному Ньютона соответствует кривая, изображенная сплошной линией. Исходной таблично заданной функции соответствуют символы в виде «квадратиков». Как видно из рисунка 2.1 аппроксимирующая функция проходит точно через точки таблично заданной функции.

2. Аппроксимация функции с помощью интерполяционного полинома Лагранжа.

Повторим работу по аппроксимированию исходной функции. Теперь построим аппроксимирующую функцию с помощью интерполяционного полинома Лагранжа. Запишем формулу (2.8) для нашего случая:

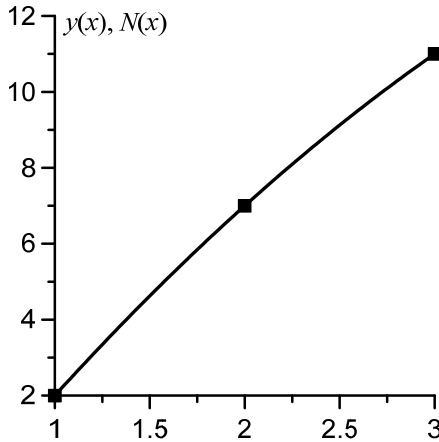


Рис. 2.1. Сравнение табличной функции и функции, полученной с помощью интерполяционного полинома Ньютона

$$L_2(x) = \sum_{i=0}^2 y_i \omega_i(x) = y_0 \omega_0(x) + y_1 \omega_1(x) + y_2 \omega_2(x) =$$

$$= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Подставив значения y_i, x_i из таблицы 2.1, получим:

$$L_2(x) = 2 \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 7 \frac{(x-1)(x-3)}{2} + 11 \frac{(x-1)(x-2)}{2} = -0.5x^2 + 6.5x - 4,$$

что соответствует функции (2.19) и рисунку 2.1.

3. Аппроксимация нелинейной функции по методу наименьших квадратов.

Проведем вычисления, используя метод наименьших квадратов. В качестве аппроксимирующей функции выберем первую строку таблицы 2.1.

$y = ax^b$	$\eta = \lg(y)$	$\xi = \lg(x)$	b	$\lg(a)$
------------	-----------------	----------------	-----	----------

Пересчитаем функцию $y(x)$ на линеаризованную функцию $\eta(\xi)$ (ограничимся тремя знаками в записи чисел).

x_i	y_i	$\xi = \lg(x)$	$\eta = \lg(y)$
1	2	0	0.301
2	7	0.301	0.845
3	11	0.477	1.041

Запишем систему для нахождения коэффициентов α, β .

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 2 \sum_{k=1}^3 \xi_k (\alpha \xi_k + \beta - \eta_k) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 2 \sum_{k=1}^3 (\alpha \xi_k + \beta - \eta_k) = 0.$$

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \alpha \sum_{k=1}^3 \xi_k^2 + \beta \sum_{k=1}^3 \xi_k - \sum_{k=1}^3 \xi_k \eta_k = 0, \\ \alpha \sum_{k=1}^3 \xi_k + \sum_{k=1}^3 \beta - \sum_{k=1}^3 \eta_k = 0. \end{cases}$$

Приведя подобные, получим систему для нахождения α, β :

$$\begin{cases} \beta = \left(\sum_{k=1}^3 \eta_k \sum_{k=1}^3 \xi_k^2 - \sum_{k=1}^3 \xi_k \sum_{k=1}^3 \xi_k \eta_k \right) / \left(3 \sum_{k=1}^3 \xi_k^2 - \left(\sum_{k=1}^3 \xi_k \right)^2 \right), \\ \alpha = \left(3 \sum_{k=1}^3 \xi_k \eta_k - \sum_{k=1}^3 \xi_k \sum_{k=1}^3 \eta_k \right) / \left(3 \sum_{k=1}^3 \xi_k^2 - \left(\sum_{k=1}^3 \xi_k \right)^2 \right). \end{cases}$$

Подставив суммы, получим значения коэффициентов α, β : $\beta = 0.32, \alpha = 1.58$. Зная α, β можно найти значения коэффициентов a, b : $a = 10^\beta = 2.088, b = \alpha = 1.58$. Таким образом, аппроксимирующая функция будет иметь вид: $y = 2.088 \cdot x^{1.58}$. На рисунке 2.2 представлено сравнение аппроксимирующей функции с исходной табличной функцией. Видно, что аппроксимирующая функция (представлена пунктирной линией) недостаточно хорошо приближает исходную табличную функцию.

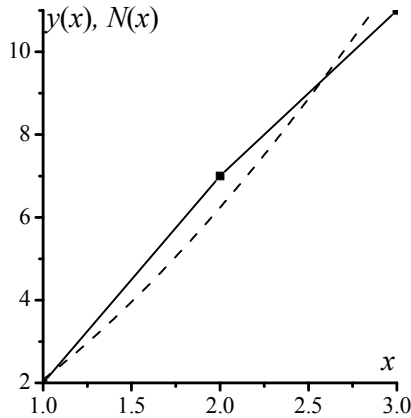


Рис. 2.2. Сравнение аппроксимирующей функции с исходной табличной функцией

Второй раз воспользуемся методом наименьших квадратов, но выберем в качестве аппроксимирующей функции квадратный трехчлен, $P(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c$. Необходимо определить значения a , b , c . Квадратичное отклонение в этом случае будет иметь вид:

$$S = \sum_{k=1}^3 (ax_k^2 + bx_k + c - y_k)^2.$$

Система уравнений для нахождения коэффициентов a , b , c имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{k=1}^3 x_k^2 (ax_k^2 + bx_k + c - y_k) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{k=1}^3 x_k (ax_k^2 + bx_k + c - y_k) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 2 \sum_{k=1}^3 (ax_k^2 + bx_k + c - y_k) = 0.$$

После преобразований:

$$\begin{aligned}
 a \sum_{k=1}^3 x_k^4 + b \sum_{k=1}^3 x_k^3 + c \sum_{k=1}^3 x_k^2 - \sum_{k=1}^3 y_k x_k^2 &= 0, \\
 a \sum_{k=1}^3 x_k^3 + b \sum_{k=1}^3 x_k^2 + c \sum_{k=1}^3 x_k - \sum_{k=1}^3 y_k x_k &= 0, \\
 a \sum_{k=0}^2 x_k^2 + b \sum_{k=0}^2 x_k + 3c - \sum_{k=0}^2 y_k &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Подстановка сумм в уравнение (2.20) дает систему:

$$\begin{aligned}
 98a + 36b + 14c - 129 &= 0, \\
 36a + 14b + 6c - 49 &= 0, \\
 14a + 6b + 3c - 20 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Разрешив систему (2.21), получаем набор коэффициентов: $a = -0.5$, $a = 6.5$, $c = -4$. Таким образом, аппроксимирующая функция будет аналогична функции (2.19).

2.3. Контрольные задания

1	Функция $f(x)$ задана таблично, вычислить значение функции в точке $x_{pr} = 1$. Вычисление провести с помощью интерполяционного полинома Ньютона. Построить график функции.						
	x	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	
	$f(x)$	1	2	3	5	7	
2	Функция $f(x)$ задана таблично, вычислить значение функции в точке $x_{pr} = 1.1$. Вычисление провести с помощью интерполяционного полинома Лагранжа. Построить график функции.						
	x	0.5	0.7	1.1	1.3	1.5	
	$f(x)$	1	2	3	5	7	
3	Функция $f(x)$ задана таблично, вычислить значение функции в точке $x_{pr} = 10$. Вычисление провести с помощью интерполяционного полинома Ньютона. Построить график функции.						
	x	1	2	4	6	7	11
	$f(x)$	10	20	30	45	47	67

4	Функция $f(x)$ задана таблично, вычислить значение функции в точке $x_{пр} = 5$. Вычисление провести с помощью интерполяционного полинома Лагранжа. Построить график функции.						
	x	0.1	1.2	2.4	3.6	4.7	10.1
	$f(x)$	10	20	30	45	47	67
5	Функция $f(x)$ задана таблично, аппроксимировать функцию по методу наименьших квадратов. Подобрать аппроксимирующую функцию самостоятельно. Оценить погрешность вычислений. Построить графики аппроксимирующей и исходной функций.						
	x	1	2	4	6	7	
	$f(x)$	10	22	35	47	61	
6	Функция $f(x)$ задана таблично, аппроксимировать функцию по методу наименьших квадратов. Подобрать аппроксимирующую функцию самостоятельно. Оценить погрешность вычислений. Построить графики аппроксимирующей и исходной функций.						
	x	0.1	0.2	1.4	2.6		
	$f(x)$	1	2.2	3.5	6.7		
7	Функция $f(x)$ задана таблично, постройте линейный интерполяционный многочлен для аппроксимации функции. Оцените погрешность вычислений. Построить графики аппроксимирующей и исходной функций.						
	x	1	2	4	6	7	
	$f(x)$	10	22	35	47	61	
8	Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. В качестве аппроксимирующей функции взять $F(x) = a \lg(x) + b$. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.						
	x	1	2	4	6	7	
	$f(x)$	1.234	1.407	1.581	1.682	1.721	

9	Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. В качестве аппроксимирующей функции взять $F(x) = a + b/x$. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.						
	x	9	11	13	17	18	
	$f(x)$	1.22	1.182	1.154	1.117	1.11	
10	Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. В качестве аппроксимирующей функции взять $F(x) = ax^b$. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.						
	x	1.1	1.2	2.3	3.4	5	
	$f(x)$	1.21	1.44	5.29	11.56	25	
11	Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. В качестве аппроксимирующей функции взять $F(x) = \frac{x}{ax+b}$. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.						
	x	2	3	4	6	9	11
	$f(x)$	0.588	0.667	0.714	0.769	0.811	0.827
12	Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. Подобрать аппроксимирующую функцию самостоятельно. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.						
	x	2	3	4	6		
	$f(x)$	0.321	0.335	0.345	0.359		
13	Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. Подобрать аппроксимирующую функцию самостоятельно. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.						
	x	1.2	2.3	2.4	4.6		
	$f(x)$	0.366	0.749	0.785	1.607		

14	Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. Подобрать аппроксимирующую функцию самостоятельно. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.					
	x	0.2	1.3	1.4	3.6	3.8
	$f(x)$	5.8	1.146	1.085	0.605	0.589
15	Аппроксимировать функцию $y = \sqrt[3]{x+2}$ на отрезке $x \in [-1, 1]$ обобщенным полиномом третьей степени, построенном на полиномах Лежандра. Построить графики исходной и аппроксимирующей функций.					
16	Аппроксимировать функцию $y = \ln(x+5)$ на отрезке $x \in [-1, 1]$ обобщенным полиномом второй степени, построенном на полиномах Лежандра. Построить графики исходной и аппроксимирующей функций.					
17	Аппроксимировать функцию $y = \sin(x+2) + x^2$ на отрезке $x \in [-1, 1]$ обобщенным полиномом второй степени, построенном на полиномах Лежандра. Построить графики исходной и аппроксимирующей функций.					
18	Используя интерполяционный полином Ньютона, вычислить значение функции $y = \sin(x+2) + x^2$ в точке 1.2, если известны значения функции в узловых точках: 0.2, 0.4, 0.8, 1, 1.5. Оценить погрешность.					
19	Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. В качестве аппроксимирующей функции взять $F(x) = a + b/x$. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.					
	x	1	2	3	4	5
	$f(x)$	10.6	5.55	3.87	3.025	2.52

20	Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. В качестве аппроксимирующей функции взять $F(x) = a \lg(x) + b$. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.					
	x	0.1	0.2	3.1	4.2	5
	$f(x)$	1.9	2.26	3.69	3.85	3.94
21	Функция $f(x)$ задана таблично, вычислить значение функции в точке $x_{pr} = 0.5$. Вычисление провести с помощью интерполяционного полинома Ньютона. Построить график функции.					
	x	0.1	0.2	3.1	4.2	5
	$f(x)$	2.9	3.2	2.7	3.4	4.2
22	Функция $f(x)$ задана таблично, вычислить значение функции в точке $x_{pr} = 0.5$. Вычисление провести с помощью интерполяционного полинома Лагранжа. Построить график функции.					
	x	1.1	1.2	2.3	3.4	5
	$f(x)$	3.60	3.55	2.87	2.77	4.22
23	Аппроксимировать функцию $y = \lg(x+3) + \frac{x^2}{2}$ на отрезке $x \in [-1, 1]$ обобщенным полиномом третьей степени, построенном на полиномах Лежандра. Построить графики исходной и аппроксимирующей функций.					
24	Аппроксимировать функцию $y = \exp(x) + \frac{x^2}{2}$ на отрезке $x \in [-1, 1]$ обобщенным полиномом четвертой степени, построенном на полиномах Лежандра. Построить графики исходной и аппроксимирующей функций.					
25	Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. Подобрать аппроксимирующую функцию самостоятельно. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.					
	x	1	12	13	24	
	$f(x)$	1.7	0.6	0.5	0.3	

26	Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. Подобрать аппроксимирующую функцию самостоятельно. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.					
	x	0.1	1.2	4.3	6.4	
	$f(x)$	0.7	20.5	23.5	69.7	
27	Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. Подобрать аппроксимирующую функцию самостоятельно. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.					
	x	1	2	3	4	5
	$f(x)$	2.7	4.5	6.5	8.7	11.1
28	Методом наименьших квадратов провести аппроксимацию табличной функции. Подобрать аппроксимирующую функцию самостоятельно. Построить на графике аппроксимирующую функцию и функцию, заданную таблично.					
	x	0.3	1.2	3.3	5.4	8.5
	$f(x)$	0.1	0.2	0.4	0.9	3.1

3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

3.1. Основные понятия и методы решения

Формулы численного интегрирования нужны в тех случаях, когда вычисление интеграла с помощью известной со школьных времен формулы Ньютона-Лейбница затруднено. Например, подынтегральная функция не имеет первообразной или нахождение первообразной представляет сложную процедуру. Для нахождения значений интегралов от сложных функций привлекают численные методы, среди которых выделяются две крупные группы: методы, основанные на формулах Ньютона-Котеса, и вариации метода Гаусса.

Формулы Ньютона-Котеса получаются заменой подынтегральной функции интерполяционным многочленом Лагранжа с разбиением каждого частичного отрезка интегрирования на n равных частей. В получившихся формулах используются значения подынтегральной функции в узлах интерполяции, и эти формулы являются точными для всех многочленов степени n . Точность вычисления интегралов растет с увеличением степени интерполяционного многочлена.

На рис. 3.1 представлена схема разбиения области интегрирования узловыми точками: x_1, x_2, x_3 . Здесь под узловой точкой подразумевается точка x_i , которой соответствует значение функции y_i . При этом расстояние между узловыми точками определяется, как $h_i = x_i - x_{i-1}$. На рис. 3.1 расстояние одинаково для всех точек и равно 1. Формулы Ньютона-Котеса, как правило, применяются для одинаковых расстояний между узловыми точками $h_i = x_i - x_{i-1} = const$. Для равномерно расположенных узлов (с равными расстояниями между точками) количество промежутков между узловыми точками, пределы интегрирования и расстояние между точками связаны соотношением $h = \frac{b-a}{n}$.

Метод Гаусса не предполагает разбиения отрезка интегрирования на равные промежутки. Формулы численного интегрирования интерполяционного типа ищутся таким образом, чтобы они обладали наивысшим порядком точности при заданном числе узлов. Узлы и коэффициенты формул численного интегрирования определяются так, чтобы эти формулы были точны для многочленов максимально высокой степени.

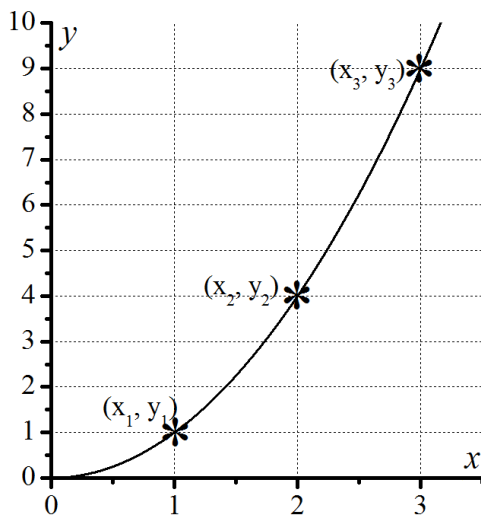


Рис. 3.1. Пример узлов сетки

Рассмотрим численные методы нахождения значений интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (3.1)$$

где a, b – пределы интегрирования, $f(x)$ – исходная функция.

1. Формула центральных прямоугольников.

Формула центральных прямоугольников является разновидностью формул Ньютона-Котеса. Значение интеграла по формуле центральных прямоугольников ищется в виде суммы:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2}) h_i. \quad (3.2)$$

В уравнении (3.2) точку $x_{i-1/2}$ можно определить через значения узловых

точек: $x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i) / 2$.

Погрешность формулы (3.2) может быть определена по формуле (3.3).

$$R = \max_{x \in [a, b]} [f''(x)] \frac{b-a}{24} h^2. \quad (3.3)$$

Разновидностями формулы прямоугольников являются формулы «правых» (3.4) и «левых» (3.5) прямоугольников.

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (3.4)$$

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}). \quad (3.5)$$

Недостатком формул (3.4) – (3.5) является более низкий порядок точности по сравнению с (3.2). Формулы (3.4) – (3.5) имеют первый порядок точности, тогда как формула (3.2) имеет второй порядок точности.

2. Формула трапеций.

По формуле трапеций интеграл (3.1) может быть вычислен следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)). \quad (3.6)$$

Погрешность формулы трапеции имеет вид:

$$R = -\max_{x \in [a,b]} [f''(x)] \frac{b-a}{12} h^2. \quad (3.7)$$

Порядок точности вычисления интеграла по формуле (3.6) второй, как и порядок для (3.2). Но погрешность формулы (3.6) в два раза превышает погрешность формулы (3.2).

3. Формула Симпсона.

По формуле Симпсона интеграл (3.1) может быть вычислен следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{6} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2}) \right]. \quad (3.8)$$

Погрешность формулы (3.8) может быть найдена по формуле:

$$R = -\max_{x \in [a,b]} [f^{(4)}(x)] \frac{b-a}{2880} h^4. \quad (3.9)$$

Видно, что формула Симпсона существенно точнее формул (3.2), (3.4) – (3.6) и имеет четвертый порядок точности.

Разновидностью формулы (3.8) может быть формула с расчетом значения интеграла через четные и нечетные точки. Если ввести обозначения $h_1 = h/2$, то можно формулу (3.8) переписать в виде:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h_1}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) \right]. \quad (3.10)$$

Соответствующая погрешность интегрирования запишется в виде:

$$R = \max_{x \in [a, b]} [f^{(4)}(x)] \frac{b-a}{180} h_1^4. \quad (3.11)$$

Основным свойством квадратурных формул Ньютона-Котеса является повышение точности численного интегрирования за счет повышения количества узлов разностной сетки.

Другим способом повышения точности численного интегрирования является перераспределение узлов на отрезке интегрирования, не изменяя их количества. В этом случае узлы не будут располагаться на одинаковом расстоянии друг от друга. Но за счет отказа от равномерного расположения узлов можно получить квадратурные формулы с высоким порядком точности. Такие формулы будут называться формулами Гаусса. Не вдаваясь в подробности построения квадратурных формул, рассмотрим их частные случаи. Для начала рассмотрим квадратурные формулы для расчета интегралов с конечными пределами. Квадратурные формулы в этом случае строятся для интегралов с пределами интегрирования $[-1, 1]$. Переход от произвольных пределов интегрирования $[a, b]$ к пределам интегрирования $[-1, 1]$ может быть осуществлен с помощью замены переменных: $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$. Эта замена переводит отрезок $x \in [a, b]$ в от-

резок $t \in [-1, 1]$. В этом случае $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt$.

1. Формула Гаусса-Чебышева.

Квадратурная формула Гаусса-Чебышева имеет вид:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) + R_{2n}, \quad (3.12)$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция, x_i – корни полинома Чебышева, C_i – коэффициенты квадратурной формулы, n – количество точек разностной сетки. Величины x_i и C_i определяются из уравнений:

$$x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, i = 1, 2, \dots, n., \quad (3.13)$$

$$C_i = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2} (x-x_i) T_n'(x_i)}, \quad (3.14)$$

В уравнении (3.14) $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$ – полиномы Чебышева. Формула (3.14) после подстановки полиномов Чебышева и вычисления интегралов приводится к виду:

$$C_i = \frac{\pi}{n}. \quad (3.15)$$

Погрешность квадратурной формулы (3.12) определяется выражением:

$$R_{2n} = \frac{2\pi}{2^{2n} (2n)!} f^{(2n)}(\xi). \quad (3.16)$$

Здесь $f^{(2n)}(\xi)$ – производная $(2n)$ -го порядка от функции во внутренней точке области интегрирования.

2. Формула Гаусса-Лежандра.

Квадратурная формула Гаусса-Лежандра имеет вид:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) + R_{2n}, \quad (3.17)$$

где коэффициенты C_i определяются по формуле:

$$C_i = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x) dx}{(x-x_i) P_n'(x_i)} = \frac{2}{(1-x_i^2) [P_n'(x_i)]^2}. \quad (3.18)$$

Значения x_i ищутся, как корни полиномов Лежандра, общий вид которых определяется, как $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$.

Погрешность квадратурной формулы Гаусса-Лежандра может быть вычислена из выражения:

$$R_{2n} = \frac{2^{2n} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi). \quad (3.19)$$

Рассмотрим теперь метод нахождения интегралов с бесконечными пределами интегрирования.

3. Формула Гаусса-Лагерра.

Квадратурная формула Гаусса-Лагерра имеет вид:

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx = \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) + R_{2n}, \quad (3.20)$$

где s – любое вещественное число, x_i – корни полинома Лагерра n -й степени, $L_n^s(x) = (-1)^n x^{-s} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{s+n} e^{-x})$, коэффициенты C_i определяются по формуле:

$$C_i = \frac{n! \Gamma(s+n+1)}{x_i [L_n^s(x_i)]^2}. \quad (3.21)$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Для целого положительного аргумента k гамма-функция вычисляется в виде $\Gamma(k) = (k-1)!$.

Погрешность квадратурной формулы Гаусса-Лагерра имеет вид:

$$R_{2n} = \frac{n! \Gamma(s+n+1)}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi). \quad (3.22)$$

Ниже представлены примеры вычисления интегралов с помощью формул Ньютона-Котеса (пример 3.1) и квадратурных формул с конечными (пример 3.2) и бесконечными (пример 3.3) пределами интегрирования.

3.2. Примеры

Пример 3.1. С помощью формул Ньютона-Котеса найти значение интеграла $\int_0^1 e^x dx$ с разбиением области на 10 узлов.

Будем рассматривать нахождение интеграла для функции, первообразная которой известна, и на малом количестве разбиений сетки. Найдем интеграл, используя перечисленные выше методы. Для начала найдем шаг сетки $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$. Далее составим таблицу значений функции в узловых точках x_i и средних точках x_{i-1} . Значения функций запишем до второго знака после запятой.

Таблица 3.1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	1	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72
$x_{i-1/2}$		0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
$y_{i-1/2}$		1.05	1.16	1.28	1.42	1.57	1.73	1.92	2.12	2.34	2.59

Теперь посчитаем интеграл по формулам (3.2), (3.4) – (3.6), (3.8). Соответственно получим:

1) Формула центральных прямоугольников (3.2):

$$\int_0^1 x dx = h \sum_{i=1}^{10} e^{x_i} = 17.18 \cdot 0.1 = 1.718.$$

2) Формула «правых» прямоугольников (3.4):

$$\int_0^1 e^x dx = h \sum_{i=1}^{10} e^{x_i} = 18.06 \cdot 0.1 = 1.806.$$

3) Формула «левых» прямоугольников (3.5):

$$\int_0^1 e^x dx = h \sum_{i=1}^{10} e^{x_{i-1}} = 16.34 \cdot 0.1 = 1.634.$$

4) Формула трапеции (3.6):

$$\int_0^1 e^x dx = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{10} (e^{x_{i-1}} + e^{x_i}) = \frac{h}{2} \left(\sum_{i=1}^{10} e^{x_{i-1}} + \sum_{i=1}^{10} e^{x_i} \right) = 0.05 \cdot (16.34 + 18.06) = 1.72.$$

5) Формула Симпсона (3.8):

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x dx &= \frac{h}{6} \left[e^0 + e^1 + 2 \sum_{i=1}^9 e^{x_i} + 4 \sum_{i=1}^{10} e^{x_{i-1/2}} \right] = \\ &= \frac{0.1(1 + 2.72 + 30.68 + 68.72)}{6} = 1.719. \end{aligned}$$

Сравним получившиеся значения с точным значением интеграла:

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1 \approx 1.72.$$

Наиболее близкий результат дала формула трапеции. Оценим теперь остаточные члены формул (3.2), (3.6), (3.8):

1) Формула центральных прямоугольников:

$$R = \max_{x \in [a,b]} [e^x] \frac{1}{24} \cdot 0.01 = e^1 \frac{0.01}{24} = 0.0011 .$$

2) Формула трапеции:

$$R = -\max_{x \in [a,b]} [e^x] \frac{1}{12} \cdot 0.01 = -\frac{0.0272}{12} = -0.0023 .$$

3) Формула Симпсона:

$$R = -\max_{x \in [a,b]} [f^{(4)}(x)] \frac{1}{2880} 10^{-4} \approx -10^{-7} .$$

Суммируя значения интегралов с их остаточными членами, получаем, что наибольшую точность с учетом остаточного члена дает формула Симпсона.

Пример 3.2. С помощью квадратурных формул Гаусса найти значение интеграла $\int_0^1 e^x dx$ с разбиением области на 3 узла.

Найдем интеграл из примера 3.1 с использованием квадратурных формул Гаусса. Во-первых, перейдем к новым пределам интегрирования:

$$\int_0^1 e^x dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{0.5+0.5t} dt = \frac{\sqrt{e}}{2} \int_{-1}^1 e^{0.5t} dt .$$

1) Воспользуемся методом Гаусса-Чебышева для нахождения значения интеграла. Для того, чтобы мы могли воспользоваться указанным методом, нужно привести интеграл к виду, аналогичному (3.12):

$\frac{\sqrt{e}}{2} \int_{-1}^1 e^{0.5t} dt = \frac{\sqrt{e}}{2} \int_{-1}^1 \frac{e^{0.5t} \sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$, таким образом, аргументом функции является t (далее под x из (3.12) – (3.14) подразумевается t), а функция из (3.12) принимает вид:

$$f(t) = e^{0.5t} \sqrt{1-t^2} .$$

Найдем коэффициенты квадратурной формулы (3.12) из выражения (3.15):

$$C_i = \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{3} .$$

Корни полинома Чебышева (3.13) имеют вид:

$$t_1 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, t_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0, t_3 = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Наконец, отыщем значение интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x dx &= \frac{\sqrt{e}}{2} \int_{-1}^1 e^{0.5t} dt = \frac{\sqrt{e}}{2} \int_{-1}^1 \frac{e^{0.5t} \sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt + R_{2n} = \\ &= \frac{\sqrt{e}}{2} \frac{\pi}{3} \left[f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right] + R_{2n} = \\ &= \frac{\sqrt{e}}{2} \frac{\pi}{3} \left[e^{\sqrt{3}/4} \sqrt{1-3/4} + e^0 \sqrt{1-0} + e^{-\sqrt{3}/4} \sqrt{1-3/4} \right] + R_{2n} \approx \\ &= \frac{\sqrt{e}}{2} \frac{\pi}{3} [0.77 + 1 + 0.32] + 10^{-3} \approx 1.8. \end{aligned}$$

2) Воспользуемся методом Гаусса-Лежандра (3.17) – (3.19). Впервые, запишем полином Лежандра для случая $n = 3$:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^3 = \frac{1}{48} \frac{d^3}{dx^3} (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) = \frac{(120x^3 - 72x)}{48} = \\ &= \frac{5x^3 - 3x}{2}. \end{aligned}$$

Найдем корни полинома Лежандра:

$$\frac{5x^3 - 3x}{2} = 0, \Rightarrow 5x^3 - 3x = 0, \Rightarrow x_1 = -\sqrt{0.6} \approx -0.77, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{0.6} \approx 0.77.$$

Найдем коэффициенты квадратурной формулы (3.18):

$$C_1 = \frac{2}{(1-x_1^2)(7.5x_1^2 - 1.5)^2} = \frac{2}{(1-0.6)(7.5 \cdot 0.6 - 1.5)^2} = \frac{2}{0.4 \cdot 9} = \frac{5}{9} \approx 0.556,$$

$$C_2 = \frac{2}{(1-x_2^2)(7.5x_2^2 - 1.5)^2} = \frac{2}{(1-0)(7.5 \cdot 0 - 1.5)^2} = \frac{2}{1 \cdot 2.25} \approx 0.889,$$

$$C_3 = \frac{2}{(1-x_3^2)(7.5x_3^2 - 1.5)^2} = \frac{2}{(1-0.6)(7.5 \cdot 0.6 - 1.5)^2} = \frac{2}{0.4 \cdot 9} = \frac{5}{9} \approx 0.556.$$

Наконец, найдем значение интеграла:

$$\int_0^1 e^x dx = \frac{\sqrt{e}}{2} \int_{-1}^1 e^{0.5t} dt + R_{2n} = \frac{\sqrt{e}}{2} \left[\frac{5}{9} e^{-0.5\sqrt{0.6}} + \frac{8}{9} e^{0.5 \cdot 0} + \frac{5}{9} e^{0.5\sqrt{0.6}} \right] + R_{2n} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{e}}{2} [0.38 + 0.89 + 0.82] + R_{2n} \approx 1.72.$$

Из примера 3.1 нам известно точное значение интеграла, $\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1 \approx 1.72$. Сравнивая точное значение и численные, можем отметить, что формула Гаусса-Лежандра дает достаточно точное решение интеграла даже при трех узловых точках. Формула Гаусса-Чебышева сходится хуже в силу свойств выбранных полиномов.

Наконец, решим еще один пример на нахождение значения интеграла с бесконечными пределами интегрирования.

Пример 3.3. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx$, используя формулу

Гаусса-Лагерра для $s = 0, n = 2$.

Используем формулы (3.20) – (3.22) для решения. Согласно (3.22) интеграл может быть найден из выражения

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx = C_1 \sin(x_1) + C_2 \sin(x_2) + R_4.$$

Необходимо найти коэффициенты C_i и корни полинома Лагерра 2-ой степени. Запишем полином Лагерра для $n = 2$.

$$L_2^{(0)} = (-1)^2 x^0 e^x \frac{d^2}{dx^2} (x^2 e^{-x}) = e^x (x^2 e^{-x} - 4x e^{-x} + 2e^{-x}) = x^2 - 4x + 2.$$

Найдем корни полинома:

$$x^2 - 4x + 2 = 0, \Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{2}, x_2 = 2 + \sqrt{2}.$$

Найдем коэффициенты C_i :

$$C_1 = \frac{2! \Gamma(3)}{x_1 (2x_1 - 4)^2} \approx \frac{4}{(2 - \sqrt{2})(-2\sqrt{2})^2} \approx \frac{1}{2(2 - \sqrt{2})} = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2}),$$

$$C_2 = \frac{2! \Gamma(3)}{x_2 (2x_2 - 4)^2} \approx \frac{4}{(2 + \sqrt{2})(2\sqrt{2})^2} \approx \frac{1}{2(2 + \sqrt{2})} = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2}).$$

Вычислим значение интеграла, используя найденные корни полинома и коэффициенты квадратурной формулы:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2}) \sin(2 - \sqrt{2}) + \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2}) \sin(2 + \sqrt{2}) + R_4 \approx \\ \approx 0.47 - 0.04 + \frac{1}{6}(\sin \xi) \approx 0.43.$$

Точное значение интеграла: $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx = 0.5$.

3.3. Контрольные задания

1	Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-6}$ методами Симпсона и Гаусса-Чебышева. Сравнить количество узловых точек, требуемых в методах для получения заданной точности.
2	Вычислить интеграл $\int_{1.5}^4 \frac{dx}{(1+x)^{0.75} \sqrt{x}}$ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-4}$ методами Гаусса-Чебышева и Гаусса-Лагерра. Сравнить количество узловых точек, требуемых в методах для получения заданной точности.
3	Вычислить интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{(3 + \exp(0.5x))\sqrt{x}}$ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-4}$ методами трапеций и центральных прямоугольников. Сравнить количество узловых точек, требуемых в методах для получения заданной точности.
4	Вычислить интеграл $\int_{1.2}^2 \frac{dx}{(x^2 - 1)^{0.5} x}$ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-4}$ методами центральных прямоугольников и Гаусса. Сравнить количество узловых точек, требуемых в методах для получения заданной точности.

5	<p>Вычислить определенный интеграл при $n=5$ по квадратурной формуле Гаусса-Чебышева. Оценить погрешность, сравнить с абсолютной погрешностью решения. $\int_0^1 \sqrt{\exp(x)+1} dx$.</p>
6	<p>Вычислить определенный интеграл при $n=5$ по квадратурной формуле Гаусса-Лежандра. Оценить погрешность, сравнить с абсолютной погрешностью решения. $\int_0^1 \frac{2+x}{2-x} dx$</p>
7	<p>Вычислить определенный интеграл при $n=4$ по квадратурной формуле Гаусса-Чебышева. Оценить погрешность, сравнить с абсолютной погрешностью решения. $\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$.</p>
8	<p>Вычислить определенный интеграл при $n=4$ по квадратурной формуле Гаусса-Лежандра. Оценить погрешность, сравнить с абсолютной погрешностью решения. $\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x+x^2} dx$.</p>
9	<p>Вычислить определенный интеграл при $n=4, s=0$ по квадратурной формуле Гаусса-Лагерра. Оценить погрешность, сравнить с абсолютной погрешностью решения.</p> <p>$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+\exp(x)}$, (точное решение $\ln 2$).</p>
10	<p>Вычислить определенный интеграл при $n=3, s=1$ по квадратурной формуле Гаусса-Лагерра. Оценить погрешность, сравнить с абсолютной погрешностью решения.</p> <p>$\int_0^{\infty} \exp(-x^5) dx$, (точное значение $\frac{1}{5} \Gamma\left(\frac{1}{5}\right)$). $\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) \approx 4.590843712$</p>

11	Вычислить определенный интеграл с погрешностью $\varepsilon = 10^{-4}$ методами прямоугольников и Симпсона. $\int_0^{\pi/2} \ln(1 + 2 \cos x)^2 dx$.
12	Вычислить определенный интеграл с погрешностью $\varepsilon = 10^{-4}$ методами прямоугольников и Симпсона. $\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.
13	Вычислить интеграл $\int_1^2 x^4 (1 + x^3)^{-1} dx$ с точностью 10^{-5} методами центральных прямоугольников и Симпсона.
14	Вычислить интеграл $\int_0^1 x \sin 3x dx$ с точностью 10^{-5} методами трапеций и Симпсона.
15	Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx$ методами Симпсона и трапеции для $n=10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$. Построить график зависимости погрешности решения от шага интегрирования, $h = \frac{b-a}{n}$.
16	Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x} dx$ методами Симпсона и трапеции для $n=10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$. Построить график зависимости погрешности решения от шага интегрирования, $h = (b-a)/n$.
17	Вычислить интеграл $\int_0^{0.5} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ при $n=3$ по квадратурным формулам Гаусса-Чебышева и Гаусса-Лежандра. Оценить погрешность.

18	<p>Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+4}} \ln \frac{2+x}{2-x} dx$ при $n=2$ по квадратурным формулам Гаусса-Чебышева и Гаусса-Лежандра. Оценить погрешность.</p>
19	<p>Вычислить интеграл $\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x^2+\pi}} dx$ по квадратурной формуле Гаусса-Чебышева и методом Симпсона с точностью 10^{-5}. Оценить погрешность.</p>
20	<p>Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2+\pi^2}} dx$ по квадратурной формуле Гаусса-Лежандра и методом Симпсона с точностью 10^{-5}. Оценить погрешность.</p>
21	<p>Вычислить интеграл $\int_{0.1}^{1.8} \frac{1}{\sqrt{0.4+2x^2}} dx$ методами прямоугольников и трапеции для $n=2^k$, $k=1\dots 10$. Построить график зависимости погрешности решения от шага интегрирования, $h = \frac{b-a}{n}$.</p>
22	<p>Вычислить интеграл $\int_{0.1}^{1.7} \frac{x \exp(-1)}{\sqrt{20-2x}} dx$ методами Симпсона и трапеции для $n=2^k$, $k=1\dots 10$. Построить график зависимости погрешности решения от шага интегрирования, $h = \frac{b-a}{n}$.</p>
23	<p>Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{8}{(3x+4)^2} dx$ по квадратурной формуле Гаусса-Чебышева для $n=1, 2, 3, 4, 5$. Оценить погрешность.</p>

24	Вычислить интеграл $\int_1^3 \frac{1}{x^2+1} dx$ по квадратурной формуле Гаусса-Лежандра для $n=1, 2, 3, 4, 5$. Оценить погрешность.
25	3.5 Вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx$ по формулам трапеции и прямоугольников с точностью 10^{-5} .
26	Вычислить интеграл $\int_0^{3.5} \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$ по формулам Симпсона и прямоугольников с точностью 10^{-6} .
27	Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$ по квадратурным формулам Гаусса-Лежандра и Гаусса-Чебышева с точностью 10^{-5} .
28	Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}$ по квадратурным формулам Гаусса-Лежандра и Гаусса-Чебышева для $n=1, 2, 3$.
29	Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ по квадратурным формулам Гаусса-Лежандра и Гаусса-Чебышева для $n=1, 2, 3$.

4. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

4.1. Основные понятия и методы решения

Методы численного дифференцирования нужны для нахождения дифференциалов функций, заданных таблично. Если, например, из экспериментальных данных известно положение фронта горения в различные моменты времени, то, пользуясь формулами численного дифференцирования, мы можем отыскать скорость распространения пламени (нам известно, что скорость – это первая производная расстояния по времени). Также методы численного дифференцирования находят применение для вычисления производной аналитической функции, непосредственное вычисление производной которой затруднено.

Основная идея численного дифференцирования заключается в замене искомой функции аппроксимирующей: $f(x) = F(x) + R(x)$. Далее, аппроксимирующая функция дифференцируется заданное количество раз. Рассмотрим методы получения формул численного дифференцирования.

1. Получение формул численного дифференцирования с помощью рядов Тейлора.

Этот метод основан на разложении функции в ряд Тейлора в окрестностях точки x :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots \quad (4.1)$$

Если положить $x = x_1$, $\Delta x = x_0 - x_1 = -h$ и ограничиться первыми двумя слагаемыми (4.1), то мы получим формулу левых разностей, имеющую первый порядок аппроксимации:

$$f(x_0) = f(x_1) - f'(x_1)h \Rightarrow f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}.$$

Или, обозначив $y_i = f(x_i)$, можем записать:

$$y'_1 = \frac{y_1 - y_0}{h}. \quad (4.2)$$

Если положить $x = x_1$, $\Delta x = x_2 - x_1 = h$, то мы получим формулу левых разностей, также имеющую первый порядок аппроксимации:

$$y'_1 = \frac{y_2 - y_1}{h}. \quad (4.3)$$

Если в (4.1) ограничиться четырьмя слагаемыми, то формулы для $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ и $\Delta x = x_0 - x_1 = -h$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 y_2 &= y_1 + y_1' h + \frac{y_1''}{2} h^2 + \frac{y_1'''}{6} h^3 + \frac{y_1''''}{24} h^4 + o(h^5), \\
 y_0 &= y_1 - y_1' h + \frac{y_1''}{2} h^2 - \frac{y_1'''}{6} h^3 + \frac{y_1''''}{24} h^4 + o(h^5).
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

После вычитания второго равенства из первого:

$$y_2 - y_0 = 2y_1' h + \frac{y_1''''}{3} h^3.$$

Из последнего равенства получается формула центральных разностей, имеющая второй порядок аппроксимации:

$$y_1' = \frac{y_2 - y_0}{2h} + o(h^2). \tag{4.5}$$

Сложение равенств (4.4) дает формулу численного дифференцирования для второй производной со вторым порядком аппроксимации:

$$y_1'' = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + o(h^2). \tag{4.6}$$

2. Получение формул численного дифференцирования с помощью интерполяционного полинома Лагранжа (2.8).

Формула численного дифференцирования, построенная с использованием интерполяционного полинома Лагранжа, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 f'(x) = L'_n(x) &= \sum_{j=0}^n \frac{y_j}{\omega'(x_j)} \frac{d}{dx} \left(\frac{\omega(x)}{x - x_j} \right) + \\
 &+ \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{d}{dx} (y^{(n+1)}(\xi)) \omega(x) + y^{(n+1)}(\xi) \frac{d}{dx} (\omega(x)) \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Для узловой точки $x = x_i$ формулу (4.7) можно переписать в виде:

$$f'(x_i) = L'_n(x_i) = \sum_{j=0}^n C_j y_j + \frac{1}{(n+1)!} \left[y^{(n+1)}(\xi) \frac{d}{dx} (\omega(x)) \right]_{x=x_i},$$

где

$$C_j = \frac{1}{\omega'(x_j)} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\omega(x)}{x - x_j} \right) \right]_{x=x_i}.$$

В качестве погрешности формулы численного дифференцирования используют главный член погрешности – третье слагаемое правой части формулы (4.7):

$$R(x) = \frac{1}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi) \frac{d}{dx}(\omega(x)). \quad (4.8)$$

Второе слагаемое правой части формулы (4.7) не включено в погрешность, т.к. оно обращается в ноль в узловой точке, в силу $\omega(x_i) = 0$.

Соответственно, для получения формулы дифференцирования k -го порядка, нужно продифференцировать интерполяционный полином Лагранжа (2.8) k – раз.

3. Получение формул численного дифференцирования с помощью интерполяционного полинома Ньютона (2.3).

Формула численного дифференцирования первого порядка, записанная с помощью интерполяционного полинома Ньютона, имеет вид:

$$f'(x) = N'_n(x_0 + th) = \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \right), \quad (4.9)$$

где $t = (x - x_0)/h$.

Аппроксимация второй производной имеет вид:

$$f''(x) = N''_n(x_0 + th) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 + \frac{6t-6}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \right). \quad (4.10)$$

Формулы численного дифференцирования более высоких порядков можно получить, продифференцировав интерполяционный полином Ньютона соответствующее количество раз. Соответственно, аппроксимации высоких порядков потребуют использования большего количества узловых точек.

Погрешность формул численного дифференцирования может быть определена, как производная соответствующего порядка от погрешности интерполяционного полинома Ньютона (2.6). Например, для производной первого порядка (4.9) погрешность определяется из уравнения:

$$R'_n(x_i) = (-1)^{n-i} h^n \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi). \quad (4.11)$$

4. Получение формул численного дифференцирования с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Формула численного дифференцирования k -го порядка в некоторой узловой точке $x = x_i$, полученная с помощью метода неопределенных коэффициентов, имеет вид:

$$y_i^{(k)} = \sum_{j=0}^n C_j y_j. \quad (4.12)$$

В (4.12) коэффициенты C_j называются неопределенными коэффициентами и могут быть получены из решения системы линейных уравнений. Метод получения коэффициентов следующий:

1) Запишем систему полиномов вида:

$$\begin{aligned} y &= 1, \\ y &= x - x_i, \\ &\dots \\ y &= (x - x_i)^n. \end{aligned}$$

2) Подставим поочередно указанные полиномы в (4.12):

$$1^{(k)} = C_0 \cdot 1 + C_1 \cdot 1 + \dots + C_n \cdot 1,$$

$$(x - x_i)_{x=x_i}^{(k)} = C_0 \cdot (x_0 - x_i) + C_1 \cdot (x_1 - x_i) + \dots + C_n \cdot (x_n - x_i),$$

...

$$\left((x - x_i)^n \right)_{x=x_i}^{(k)} = C_0 \cdot (x_0 - x_i)^n + C_1 \cdot (x_1 - x_i)^n + \dots + C_n \cdot (x_n - x_i)^n.$$

Получили систему из $n+1$ линейных уравнений.

3) Заменяем разности соответствующими шагами таблицы:

$$\begin{aligned} x_0 - x_i &= -ih, \\ x_1 - x_i &= -(i-1)h, \\ &\dots \\ x_i - x_i &= 0, \\ x_{i+1} - x_i &= h, \\ &\dots \\ x_n - x_i &= (n-i)h. \end{aligned}$$

Разрешив систему линейных уравнений, получим значения коэффициентов C_j , выраженные через шаг таблицы.

Погрешность формулы (4.12) может быть найдена из выражения:

$$R_y = R_{(x-x_i)^m} \frac{y^{(m)}(\xi)}{m!}. \quad (4.13)$$

Здесь $R_{(x-x_i)^m}$ – погрешность формулы (4.12) для первого полинома порядка $m > n$, который не обращает в ноль выражение:

$$R_{(x-x_i)^m} = \left[(x-x_i)^m \right]^{(k)} \Big|_{x=x_i} - \sum_{j=0}^n C_j (x_j - x_i)^m .$$

4.2. Примеры

Пример 4.1. Построить формулу численного дифференцирования для производной 1-го порядка при $n=2$ в узловой точке $x = x_0$.

Решать задачу будем, используя построение формул численного дифференцирования с помощью интерполяционных полиномов Ньютона и Лагранжа, а также с помощью метода неопределенных коэффициентов.

1) Формула численного дифференцирования, определенная с помощью интерполяционного полинома Лагранжа.

Формула имеет вид: $f'(x) = L'_2(x) + R_2(x)$. Для ее построения запишем интерполяционный полином Лагранжа для $n=2$:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= y_0 \omega_0(x) + y_1 \omega_1(x) + y_2 \omega_2(x) = \\ &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \end{aligned}$$

Заменим разности шагами сетки:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(2h)(h)} = \\ &= \frac{1}{2h^2} (y_0(x-x_1)(x-x_2) - 2y_1(x-x_0)(x-x_2) + y_2(x-x_0)(x-x_1)) \end{aligned}$$

Найдем первую производную для полинома Лагранжа, $L'_2(x)$:

$$L'_2(x) = \frac{1}{2h^2} (y_0(x-x_2+x-x_1) - 2y_1(x-x_2+x-x_0) + y_2(x-x_1+x-x_0)).$$

Подставим в получившееся выражение узловую точку $x = x_0$:

$$\begin{aligned} L'_2(x_0) &= \frac{1}{2h^2} (y_0(x_0-x_2+x_0-x_1) - 2y_1(x_0-x_2) + y_2(x_0-x_1)) = \\ &= \frac{1}{2h^2} (y_0(-2h-h) - 2y_1(-2h) + y_2(-h)) = \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Таким образом, формула численного дифференцирования имеет вид:

$$y'_0 = \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2) + R_2.$$

Здесь $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$.

То есть, если нам для известной функции $y(x)$ необходимо построить первую производную в заданной точке x_0 , то мы находим значения функции $y(x)$ в узлах x_0, x_1, x_2 , равноотстоящих друг от друга с шагом h . Далее вычисляем значение производной функции по вышеприведенной формуле.

Найдем погрешность формулы для производной:

$$R_2(x) = \frac{1}{3!} y^{(3)}(\xi) \frac{d}{dx} ((x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)) = \\ = \frac{1}{6} y^{(3)}(\xi) ((x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1)).$$

Для узловой точки $x = x_0$

$$R_2 = \frac{1}{6} y^{(3)}(\xi) ((x_0-x_1)(x_0-x_2)) = \frac{h^2}{3} y^{(3)}(\xi).$$

2) Формула численного дифференцирования, определенная с помощью интерполяционного полинома Ньютона.

Формула имеет вид: $f'(x) = N'_2(x) + R_2(x)$. Запишем интерполяционный полином Ньютона для $n=2, i=0$ (соответствует номеру узловой точки):

$$N_2(x) = y_0 + t\Delta^1 y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0.$$

Продифференцируем указанное выражение:

$$N'_2(x) = \frac{1}{h} \left(\Delta^1 y_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 y_0 \right).$$

Распишем разделенные разности. Для удобства представим их в виде таблицы:

i	x	y	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$
0	x_0	y_0	$y_1 - y_0$	$\Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$
1	$x_0 + h$	y_1	$y_2 - y_1$	
2	$x_0 + 2h$	y_2		

Для узловой точки $x = x_0$ значение $t = (x - x_0)/h = (x_0 - x_0)/h = 0$. Отсюда формула численного дифференцирования может быть переписана в виде:

$$y'_0 = N'_2(x_0) = y_1 - y_0 - \frac{1}{2!}(y_2 - 2y_1 + y_0) + R_2 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + R_2,$$

эта формула соответствует формуле, полученной с помощью интерполяционного полинома Лагранжа.

Погрешность формулы численного дифференцирования определяется выражением: $R'_2(x_0) = (-1)^2 h^2 \frac{0!2!}{3!} y'''(\xi) = \frac{h^2}{3} y'''(\xi)$. Погрешность соответствует погрешности, полученной для случая построения формулы численного дифференцирования с помощью интерполяционного полинома Лагранжа.

3) Формула численного дифференцирования, построенная с помощью метода неопределенных коэффициентов:

Формула имеет вид: $y'_0 = C_0 y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + R$. Найдем неопределенные коэффициенты. Для этого воспользуемся системой полиномов: $y = 1$, $y = x - x_0$, $y = (x - x_0)^2$. Подставим по очереди полиномы в формулу:

$$0 = C_0 \cdot 1 + C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1,$$

$$(x - x_0)'_{x=x_0} = C_0(x_0 - x_0) + C_1(x_1 - x_0) + C_2(x_2 - x_0),$$

$$\left((x - x_0)^2\right)'_{x=x_0} = C_0(x_0 - x_0)^2 + C_1(x_1 - x_0)^2 + C_2(x_2 - x_0)^2.$$

Заменяя разности шагами сетки, получаем:

$$0 = C_0 + C_1 + C_2,$$

$$1 = C_1 h + C_2 (2h),$$

$$2(x - x_0)'_{x=x_0} = C_1 h^2 + C_2 (4h^2).$$

В окончательном виде система принимает вид:

$$C_0 + C_1 + C_2 = 0,$$

$$C_1 h + 2C_2 h = 1,$$

$$C_1 h^2 + 4C_2 h^2 = 0.$$

Решение данной системы дает значения коэффициентов:

$$C_0 = -3/(2h), C_1 = 4/(2h), C_2 = -1/(2h).$$

Отсюда, имеем выражение:

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + R.$$

Получили такую же формулу, как и при построении формулы численного дифференцирования через интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона.

Найдем погрешность формулы численного дифференцирования из уравнения: $R_y = R_{(x-x_0)^m} \frac{y^{(m)}(\xi)}{m!}$. Для этого нам нужно воспользоваться полиномом степени $m > 2$, т.е. полиномом $y = (x - x_0)^3$. Подстановка этого полинома в найденную формулу дает выражение:

$$0 = \frac{1}{2h} \left(-3(x_0 - x_0)^3 + 4(x_1 - x_0)^3 - (x_2 - x_0)^3 \right) + R_{(x-x_0)^3}.$$

Отсюда $R_{(x-x_0)^3} = -\frac{1}{2h} (4h^3 - (2h)^3) = -\frac{1}{2h} (-4h^3) = 2h^2$. Тогда погрешность формулы вычисляется, как $R_y = 2h^2 \frac{y^{(m)}(\xi)}{3!} = \frac{h^2}{3} y^{(m)}(\xi)$.

Нам повезло, и полином $y = (x - x_0)^3$ не обратил погрешность $R_{(x-x_0)^3}$ в нуль. Вполне могло оказаться и так, что $y = (x - x_0)^3$ дал бы $R_{(x-x_0)^3} = 0$. Тогда пришлось бы брать полином $y = (x - x_0)^4$ и искать уже $R_{(x-x_0)^4}$.

4.3. Некорректность операции численного дифференцирования

Некорректность операции численного дифференцирования рассмотрим на примере формулы для производной первого порядка, построенной на $n+1$ точке: $y'_k \approx \sum_{j=0}^n C_j y_j$. Известно, что погрешность аппроксимации

этой формулы можно оценить как $R_{анп} = \frac{M_{n+1} h^n}{(n+1)!}$, где

$M_{n+1} = \max_{x_0 \leq \xi \leq x_n} [y^{(n+1)}(\xi)]$. Как видно с уменьшением шага h погрешность аппроксимации уменьшается.

Оценим вычислительную погрешность формулы численного дифференцирования $R_{\text{выч}}$, полагая, что коэффициенты C_j вычислены точно, а при вычислении каждого значения y_j вычислительная ошибка равна ε .

Тогда $R_{\text{выч}} = \varepsilon \sum_{j=0}^n |C_j|$. Поскольку коэффициенты C_j обратно пропорцио-

нальны h , то можно записать $R_{\text{выч}} = \frac{\varepsilon}{h} \sum_{j=0}^n |a_j|$. Т.е. вычислительная погрешность формулы численного дифференцирования возрастает при уменьшении шага h .

Суммарная погрешность формулы численного дифференцирования, представляющая собой функцию шага h , будет вид:

$$R_{\Sigma}(h) = \frac{M_{n+1}h^n}{(n+1)!} + \frac{\varepsilon}{h} \sum_{j=0}^n |a_j|.$$

Анализ этой формулы показывает, что с уменьшением шага h суммарная погрешность сначала уменьшается, достигая минимального значения при $h = h_{\text{опт}}$, а затем увеличивается. Здесь $h_{\text{опт}} = \sqrt[n+1]{\frac{(n+1)!}{nM_{n+1}} \varepsilon \sum_{j=0}^n |a_j|}$.

4.4. Контрольные задания

1	Получить формулу численного дифференцирования $y'_1 - ?$ с помощью интерполяционного полинома Ньютона для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
2	Получить формулу численного дифференцирования $y'_1 - ?$ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
3	Получить формулу численного дифференцирования $y'_1 - ?$ методом неопределенных коэффициентов для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .

4	Получить формулу численного дифференцирования y'_0 –? с помощью интерполяционного полинома Ньютона для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
5	Получить формулу численного дифференцирования y'_0 –? с помощью интерполяционного полинома Лагранжа для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
6	Получить формулу численного дифференцирования y'_0 –? методом неопределенных коэффициентов для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
7	Получить формулу численного дифференцирования y'_2 –? с помощью интерполяционного полинома Ньютона для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
8	Получить формулу численного дифференцирования y'_2 –? с помощью интерполяционного полинома Лагранжа для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
9	Получить формулу численного дифференцирования методом неопределенных коэффициентов для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
10	Получить формулу численного дифференцирования y''_1 –? с помощью интерполяционного полинома Ньютона для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
11	Получить формулу численного дифференцирования y''_1 –? с помощью интерполяционного полинома Лагранжа для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
12	Получить формулу численного дифференцирования y''_1 –? методом неопределенных коэффициентов для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
13	Получить формулу численного дифференцирования y''_0 –? с помощью интерполяционного полинома Ньютона для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .

14	Получить формулу численного дифференцирования y_0'' –? с помощью интерполяционного полинома Лагранжа для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
15	Получить формулу численного дифференцирования y_0'' –? методом неопределенных коэффициентов для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
16	Получить формулу численного дифференцирования y_2'' –? с помощью интерполяционного полинома Ньютона для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
17	Получить формулу численного дифференцирования y_2'' –? с помощью интерполяционного полинома Лагранжа для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
18	Получить формулу численного дифференцирования y_2'' –? с помощью методом неопределенных коэффициентов для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
19	Получить формулу численного дифференцирования y_2' –? методом неопределенных коэффициентов для $n = 4$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
20	Получить формулу численного дифференцирования y_1'' –? с помощью интерполяционного полинома Ньютона для $n = 4$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
21	Получить формулу численного дифференцирования y_1'' –? с помощью интерполяционного полинома Лагранжа для $n = 4$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
22	Получить формулу численного дифференцирования y_0''' –? методом неопределенных коэффициентов для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
23	Получить формулу численного дифференцирования y_1''' –? с помощью интерполяционного полинома Ньютона для $n = 4$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .

24	Получить формулу численного дифференцирования y_2''' -? с помощью интерполяционного полинома Лагранжа для $n = 4$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
25	Получить формулу численного дифференцирования y_3' -? с помощью интерполяционного полинома Ньютона для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
26	Получить формулу численного дифференцирования y_3'' -? с помощью интерполяционного полинома Лагранжа для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .
27	Получить формулу численного дифференцирования y_3''' -? методом неопределенных коэффициентов для $n = 3$. Оценить погрешность в зависимости от шага h .

5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Основные понятия

Решение систем алгебраических линейных уравнений (СЛАУ) аналитическими методами было изложено в курсе линейной алгебры. Аналитические методы позволяют получить точное решение, но не всегда удобны для использования. Особенно, если требуется решить громоздкую систему, состоящую из большого количества уравнений. Кроме того, в настоящем разделе будет показана схема решения систем линейных уравнений, пригодная для написания программы численного счета.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений вида:

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad (5.1)$$

где $A = \{a_{i,j}\}$ – матрица вещественных коэффициентов, $\vec{b} = (b_j)^T$ – вектор свободных членов, $\vec{x} = \{x_i\}^T$ – неизвестный вектор. Индексы i, j меняются в диапазоне от 1 до n .

1. Решение СЛАУ с помощью метода Гаусса.

Первым из рассматриваемых методов выберем метод Гаусса, который был изложен в курсе линейной алгебры. Алгоритм решения СЛАУ следующий:

- 1) Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (5.1). Для нахождения значений вектора $x = \{x_i\}^T$ нужно привести исходную матрицу коэффициентов $A = \{a_{i,j}\}$ к треугольному виду. Для этого сначала с помощью первого уравнения исключается неизвестная x_1 из всех последующих уравнений системы. Затем с помощью второго уравнения исключается x_2 из третьего и всех последующих уравнений и т.д. Это прямой ход метода Гаусса. Коэффициенты, получаемые в этом методе, вычисляются по формулам:

$$a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} a_{k,j}^{(k-1)}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)}, \quad (5.2)$$

$$i, j = k+1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Здесь k – номер шага. Например, для приведения к треугольному виду матрицы, состоящей из 3-х строк, потребуется 2 шага: получение нуля во второй строке и получение нуля в третьей строке. По умолчанию подра-

зумеается, что до процесса приведения матрицы к треугольному виду $k = 0$, $a_{i,j}^{(0)} = a_{i,j}$, $b_i^{(0)} = b_i$.

2) После того, как будут выполнены преобразования (5.2), можно найти $x = \{x_i\}^T$ – неизвестный вектор. Для этого используется обратный ход метода Гаусса. Он состоит в последовательном вычислении искомого неизвестных:

а) решая последнее уравнение, находим неизвестное x_n :

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}; \quad (5.3)$$

б) используя это значение, по формуле

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \left[b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)} x_j \right], \quad k = n-1, \dots, 1. \quad (5.4)$$

находим x_{n-1} и так далее, до тех пор, пока не найдем x_1 – значение x из первой строки.

2. Решение СЛАУ методом простой итерации.

Метод простой итерации относится к итерационным методам, то есть к тем методам, в которых решение ищется путем последовательных приближений. Идея всех итерационных методов заключается в том, что на первом шаге задается произвольный вектор значений $\vec{x}^{(0)} = \{x_i^{(0)}\}^T$, который используется для нахождения вектора x на следующем приближении, $\vec{x}^{(1)} = \{x_i^{(1)}\}^T$. В свою очередь, первое приближение вектора x используется для нахождения второго и так далее. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока на одном из k -ых приближений значение нормы разности между соседними приближениями $\|\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}^{(k)}\|$ не станет меньше некоторой малой величины.

В методе простых итераций исходная система уравнений (5.1) переписывается в виде: $\vec{x} = C\vec{x} + \vec{d}$, а итерационные индексы расставляются следующим образом: $\vec{x}^{(k+1)} = C\vec{x}^{(k)} + \vec{d}$. При этом, для обеспечения сходимости итерационного процесса, на матрицу коэффициентов C накладывается ограничение $\|C\| < 1$. Т.е. коэффициенты матрицы C , стоящие при неизвестных x , должны быть существенно меньше единицы. Добиться этого можно, например, приведя исходную матрицу коэффициентов A

к диагональному доминированию. Под диагональным доминированием подразумевается случай, когда элементы главной диагонали матрицы больше сумм абсолютных значений прочих элементов строки. То есть, например, для матрицы вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|, \\ |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|, \\ |a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|. \end{cases}$$

Отсюда следует, что на первом этапе решения задачи необходимо преобразовать исходную матрицу к матрице с диагональным доминированием. Далее, в примере будет показано, как это сделать.

После того, как система алгебраических уравнений будет подготовлена для решения с помощью метода простой итерации, начинается сам процесс решения. Задается начальный вектор $\vec{x}^{(0)} = \{x_i^{(0)}\}^T$, для простоты можно взять единичный начальный вектор $\vec{x}^{(0)} = \{x_i^{(0)} = 1\}^T$. Далее, система уравнений приводится к виду

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j^{(k)} + d_1, j \neq 1 \\ x_2^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n c_{2j} x_j^{(k)} + d_2, j \neq 2 \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n c_{nj} x_j^{(k)} + d_n, j \neq n. \end{cases}, \quad (5.5)$$

Здесь $c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ ($i \neq j$), $d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$. Каждое новое $(k+1)$ -ое приближение ищется по формуле (5.5) через предыдущее k -ое приближение. Как уже сказано выше, процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится ус-

ловие $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k+1)}\| < \varepsilon \frac{1-q}{q}$, где $q = \|C\|$, ε – заданная точность вычислений.

3. Решение СЛАУ методом Зейделя.

Начальный этап решения с помощью метода Зейделя такой же, как и для метода простой итерации. Преобразовываем систему, например, к системе с диагональным доминированием, а далее, последовательно вычисляем $x^{(k+1)} = \{x_i^{(k+1)}\}^T$. Метод Зейделя практически схож с методом простой итерации, отличие заключается лишь в том, что при вычислении $(k+1)$ -го приближения ранее полученные приближения сразу же используются в вычислениях. В координатной форме итерационный процесс Зейделя будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j^{(k)} + d_1, j \neq 1 \\ x_2^{(k+1)} = c_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=3}^n c_{2j} x_j^{(k)} + d_2, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} x_j^{(k+1)} + d_n. \end{cases} \quad (5.6)$$

В методе Зейделя можно гарантировать сходимость решения не только приведением исходной матрицы коэффициентов к матрице с диагональным доминированием, но и путем приведения системы к нормальному виду. Для этого нужно домножить левую и правую часть (5.1) на транспонированную матрицу коэффициентов A^T . То есть прежде чем применять уравнение (5.6) нужно от уравнения (5.1) перейти к уравнению $C\vec{x} = \vec{d}$, для чего требуется выполнить следующие действия:

$$C = A^T A, \quad \vec{d} = A^T \vec{b}.$$

После того, как будет найдена новая система $Cx = D$, можно переходить к решению задачи с помощью (5.6). Итерационный процесс для метода Зейделя останавливается при выполнении неравенства $\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\| < \varepsilon$.

5.2. Примеры

Пример 5.1. Перечисленными тремя методами найти решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1, \\ 3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7, \\ 4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 = 0.8. \end{cases} \quad (5.7)$$

1) Метод Гаусса.

Приведем систему к треугольному виду по формулам (5.2). При $k = 0$ имеем начальную систему коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} 2.7 & 3.3 & 1.3 \\ 3.5 & -1.7 & 2.8 \\ 4.1 & 5.8 & -1.7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1.7 \\ 0.8 \end{pmatrix}.$$

Выполним первый ход, согласно (6.2). Для $k = 1$ должны получить:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.222 & 0.481 \\ 0 & -5.978 & 1.115 \\ 0 & 0.789 & -3.674 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.778 \\ -1.022 \\ -2.389 \end{pmatrix}.$$

Выполним второй ход по формуле (6.2). Для $k = 2$ должны получить:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.222 & 0.481 \\ 0 & 1 & -0.186 \\ 0 & 0 & -3.530 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.778 \\ 0.171 \\ -2.524 \end{pmatrix}.$$

Выполним третий ход по формуле (6.2). Для $k = 3$ должны получить:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.222 & 0.481 \\ 0 & 1 & -0.186 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.778 \\ 0.171 \\ 0.716 \end{pmatrix}.$$

Теперь выполним обратный ход метода Гаусса по уравнениям (5.3) – (5.4):

$$x_3 = 0.716;$$

$$x_2 = 0.171 - (-0.186 \cdot 0.716) = 0.304,$$

$$x_1 = 0.778 - 1.221 \cdot 0.304 - 0.481 \cdot 0.716 = 0.062.$$

Выполним проверку получившегося решения. Для этого подставим найденные значения x в правую часть исходной системы линейных алгебраических уравнений (5.7).

$$\begin{cases} 2.7 \cdot 0.062 + 3.3 \cdot 0.304 + 1.3 \cdot 0.716 = 2.101, \\ 3.5 \cdot 0.062 - 1.7 \cdot 0.304 + 2.8 \cdot 0.716 = 1.705, \\ 4.1 \cdot 0.062 + 5.8 \cdot 0.304 - 1.7 \cdot 0.716 = 0.800. \end{cases}$$

Получили правые части уравнений, отличающиеся от исходных значений в третьем знаке после запятой. Это объясняется тем, что при нахождении решения x , мы ограничились только тремя знаками после запятой.

2) Метод простых итераций.

Решим задачу (5.7) с помощью метода простой итерации. Для начала приведем систему (5.7) к системе с диагональным доминированием. Для этого последовательно выполним следующие действия:

1) сложим вторую и третью строки (5.7), получим уравнение:

$$7.6x_1 + 4.1x_2 + 1.1x_3 = 2.5;$$

2) вычтем из первой строки (6.7) вторую, получим строку:

$$-0.8x_1 + 5.0x_2 - 1.5x_3 = 0.4;$$

3) домножим первую строку на два и вычтем из нее третью строку:

$$1.3x_1 + 0.8x_2 + 4.3x_3 = 3.4.$$

В результате мы получили систему линейных алгебраических уравнений с диагональным доминированием:

$$\begin{cases} 7.6x_1 + 4.1x_2 + 1.1x_3 = 2.5, \\ -0.8x_1 + 5.0x_2 - 1.5x_3 = 0.4, \\ 1.3x_1 + 0.8x_2 + 4.3x_3 = 3.4. \end{cases}$$

Приведем систему к виду (6.5):

$$\begin{cases} x_1 = (2.5 - 4.1x_2 - 1.1x_3) / 7.6, \\ x_2 = (0.4 + 0.8x_1 + 1.5x_3) / 5.0, \\ x_3 = (3.4 - 1.3x_1 - 0.8x_2) / 4.3. \end{cases} \quad (5.8)$$

Расставим итерационные индексы:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (2.5 - 4.1x_2^{(k)} - 1.1x_3^{(k)}) / 7.6, \\ x_2^{(k+1)} = (0.4 + 0.8x_1^{(k)} + 1.5x_3^{(k)}) / 5.0, \\ x_3^{(k+1)} = (3.4 - 1.3x_1^{(k)} - 0.8x_2^{(k)}) / 4.3. \end{cases}$$

Решать будем с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, в качестве начального приближения возьмем единичный вектор. В таблице 5.1 представлены значения корней в зависимости от номера итерации.

Таблица 5.1. Метод простой итерации

k	x_1	x_2	x_3
0	1	1	1
1	-0.355263158	0.54	0.302325581
2	-0.006126071	0.113855569	0.797637699
3	0.152077723	0.318311138	0.771367311
4	0.045581617	0.335742629	0.685500011
5	0.048605948	0.292943062	0.714453441
6	0.067504561	0.302112984	0.721501818
7	0.061537469	0.307251275	0.714082252
8	0.059839381	0.304070671	0.714930295
9	0.06143249	0.30405339	0.716035411

На 9-й итерации норма разности вектора $\vec{x}^{(k)}$ и $\vec{x}^{(k-1)}$ стала меньше 10^{-3} . Подстановка значений $\vec{x}^{(9)}$ в (5.7) дает правую часть системы уравнений с точностью до второго знака после запятой.

3) Метод Зейделя.

Воспользуемся методом Зейделя для решения приведенной системы (5.8). Расставим итерационные индексы:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (2.5 - 4.1x_2^{(k)} - 1.1x_3^{(k)}) / 7.6, \\ x_2^{(k+1)} = (0.4 + 0.8x_1^{(k+1)} + 1.5x_3^{(k)}) / 5.0, \\ x_3^{(k+1)} = (3.4 - 1.3x_1^{(k+1)} - 0.8x_2^{(k+1)}) / 4.3. \end{cases}$$

Решать будем с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, в качестве начального приближения возьмем единичный вектор. В таблице 5.2 представлены значения корней в зависимости от номера итерации.

Таблица 5.2. Метод Зейделя для системы с диагональным доминированием

k	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	-0.355263158	0.323157895	0.837980416
2	0.033325549	0.336726213	0.717975771
3	0.043374892	0.302332714	0.721336388
4	0.061442874	0.306231776	0.715148568
5	0.060235038	0.304182177	0.715895049
6	0.0612327	0.304565747	0.715522068

Видим, что решение сошлось за 6 итераций. Подстановка найденных значений корней в (5.7) дает правую часть с точностью до второго знака после запятой.

Решим (5.7), используя метод Зейделя, но при этом в качестве начальных значений коэффициентов возьмем нормальную систему. Для этого выполним следующие арифметические операции:

1. Получим нормальную систему для коэффициентов уравнения (5.7): по условию было дано:

$$A = \begin{pmatrix} 2.7 & 3.3 & 1.3 \\ 3.5 & -1.7 & 2.8 \\ 4.1 & 5.8 & -1.7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1.7 \\ 0.8 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 2.7 & 3.5 & 4.1 \\ 3.3 & -1.7 & 5.8 \\ 1.3 & 2.8 & -1.7 \end{pmatrix}.$$

Получим коэффициенты для уравнения $Cx = D$:

$$C = A^T A = \begin{pmatrix} 2.7 & 3.5 & 4.1 \\ 3.3 & -1.7 & 5.8 \\ 1.3 & 2.8 & -1.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.7 & 3.3 & 1.3 \\ 3.5 & -1.7 & 2.8 \\ 4.1 & 5.8 & -1.7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2.7^2 + 3.5^2 + 4.1^2 & 2.7 \cdot 3.3 - 3.5 \cdot 1.7 + 4.1 \cdot 5.8 & 2.7 \cdot 1.3 + 3.5 \cdot 2.8 - 4.1 \cdot 1.7 \\ 3.3 \cdot 2.7 - 1.7 \cdot 3.5 + 5.8 \cdot 4.1 & 3.3^2 + 1.7^2 + 5.8^2 & 3.3 \cdot 1.3 - 1.7 \cdot 2.8 - 5.8 \cdot 1.7 \\ 1.3 \cdot 2.7 + 2.8 \cdot 3.5 - 1.7 \cdot 4.1 & 1.3 \cdot 3.3 - 2.8 \cdot 1.7 - 1.7 \cdot 5.8 & 1.3^2 + 2.8^2 + 1.7^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36.35 & 26.74 & 6.34 \\ 26.74 & 47.42 & -10.33 \\ 6.34 & -10.33 & 12.42 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{d} = A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 2.7 & 3.5 & 4.1 \\ 3.3 & -1.7 & 5.8 \\ 1.3 & 2.8 & -1.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1.7 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.7 \cdot 2.1 + 3.5 \cdot 1.7 + 4.1 \cdot 0.8 \\ 3.3 \cdot 2.1 - 1.7 \cdot 1.7 + 5.8 \cdot 0.8 \\ 1.3 \cdot 2.1 + 2.8 \cdot 1.7 - 1.7 \cdot 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.9 \\ 8.68 \\ 6.13 \end{pmatrix},$$

Таким образом, система (5.7) перешла к виду:

$$36.35x_1 + 26.74x_2 + 6.34x_3 = 14.9,$$

$$26.74x_1 + 47.42x_2 - 10.33x_3 = 8.68,$$

$$6.34x_1 - 10.33x_2 + 12.42x_3 = 6.13.$$

Приведенная система будет иметь вид:

$$x_1 = (14.9 - 26.74x_2 - 6.34x_3) / 36.35,$$

$$x_2 = (8.68 - 26.74x_1 + 10.33x_3) / 47.42,$$

$$x_3 = (6.13 - 6.34x_1 + 10.33x_2) / 12.42.$$

Расставим итерационные индексы:

$$x_1^{(k+1)} = (14.9 - 26.74x_2^{(k)} - 6.34x_3^{(k)}) / 36.35,$$

$$x_2^{(k+1)} = (8.68 - 26.74x_1^{(k+1)} + 10.33x_3^{(k)}) / 47.42,$$

$$x_3^{(k+1)} = (6.13 - 6.34x_1^{(k+1)} + 10.33x_2^{(k+1)}) / 12.42.$$

Решать будем с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, в качестве начального приближения возьмем единичный вектор. В таблице 5.3 представлены значения корней в зависимости от номера итерации.

Таблица 5.3. Метод Зейделя для нормальной системы

k	x_1	x_2	x_3
0	1	1	1
1	-0.500137552	0.682911812	1.316855966
2	-0.322143843	0.651565763	1.199924822
3	-0.278690285	0.601590081	1.13617729
4	-0.23080833	0.560702787	1.077728229
5	-0.190536162	0.525260851	1.027692743
6	-0.155737198	0.494738058	0.98454251
7	-0.125757777	0.468432878	0.947360381
8	-0.09992187	0.445764309	0.915318033
9	-0.077657605	0.426229432	0.887705253
10	-0.05847115	0.409395062	0.863909668
11	-0.041937036	0.394887879	0.84340359
12	-0.027688601	0.382386172	0.825732277
13	-0.015409873	0.371612704	0.810503851
14	-0.004828559	0.362328563	0.797380605
15	0.004289992	0.354327863	0.78607152
16	0.012147992	0.347433182	0.776325806
17	0.0189197	0.341491624	0.767927341
18	0.024755286	0.336371427	0.760689882
19	0.029784159	0.331959048	0.754452931
20	0.03411784	0.328156637	0.749078177
21	0.037852431	0.324879873	0.744446431
22	0.041070752	0.322056089	0.740454978
23	0.043844171	0.319622665	0.737015305
24	0.046234193	0.317525639	0.734051133
25	0.048293817	0.315718506	0.731496728
26	0.050068718	0.314161191	0.729295445
27	0.051598257	0.31281916	0.727398468
28	0.052916351	0.311662652	0.72576373
29	0.054052232	0.310666019	0.724354978
30	0.055031089	0.309807162	0.723140972
31	0.055874628	0.309067033	0.722094791

Видим, что решение сошлось за 31 итерацию. Таким образом, можем сделать вывод, что быстрее всего сходится метод Зейделя для системы с диагональным доминированием.

5.3. Контрольные задания

Решить систему линейных уравнений

- 1) методом простых итераций с приведением системы к системе с диагональным доминированием.
- 2) методом Зейделя с приведением системы к системе с диагональным доминированием.
- 3) методом Зейделя с приведением системы к нормальной форме.

1	$0.8x_1 + 7.4x_2 - 0.5x_3 = 6.4$ $3.1x_1 - 0.6x_2 - 2.3x_3 = -1.5$ $4.5x_1 - 3.5x_2 + 7.4x_3 = 2.5$	2	$x_1 + x_2 - x_3 = 6$ $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 21$ $7x_1 - x_2 - 3x_3 = 6$
3	$1.7x_1 - 2.2x_2 + 3.0x_3 = 1.8$ $2.1x_1 + 1.9x_2 - 2.3x_3 = 2.8$ $4.2x_1 + 3.9x_2 - 3.1x_3 = 5.1$	4	$x_1 + 3x_2 - x_3 = -2$ $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3$ $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 13$
5	$0.8x_1 + 1.3x_2 + 3.7x_3 = 1.2$ $3.4x_1 - 3.6x_2 - 6.7x_3 = -2.4$ $5.6x_1 + 2.7x_2 - 1.7x_3 = 1.9$	6	$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ $3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5$ $x_1 + x_2 + x_3 = 6$
7	$7.8x_1 + 5.3x_2 + 4.8x_3 = 1.8$ $3.3x_1 + 1.1x_2 + 1.8x_3 = 2.3$ $4.5x_1 + 3.3x_2 - 2.8x_3 = 3.4$	8	$4.1x_1 + 4.8x_2 - 5.0x_3 = 7.0$ $2.7x_1 + 2.3x_2 - 2.9x_3 = 6.1$ $3.3x_1 + 3.7x_2 + 4.2x_3 = 5.8$
9	$3.4x_1 + 2.4x_2 + 7.4x_3 = 1.9$ $4.2x_1 + 1.7x_2 - 2.3x_3 = 2.7$ $5.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = -3.5$	10	$4.2x_1 - 1.7x_2 + 1.3x_3 = 2.8$ $2.1x_1 + 3.4x_2 + 1.8x_3 = 1.1$ $1.7x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.7$
11	$2.4x_1 - 4.5x_2 + 3.5x_3 = -0.6$ $6.4x_1 + 1.3x_2 - 2.7x_3 = 3.8$ $3.8x_1 + 6.7x_2 - 1.2x_3 = 5.2$	12	$-3.1x_1 + 3.2x_2 + 2x_3 = 4.1$ $1.2x_1 - 2.2x_2 + 3.3x_3 = 5.0$ $1.1x_1 + 5.3x_2 + 3.2x_3 = 6.0$
13	$7.5x_1 + 3.8x_2 + 4.8x_3 = 5.6$ $1.9x_1 + 3.1x_2 + 2.1x_3 = 2.1$ $3.1x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.2$	14	$-2.1x_1 - 3.7x_2 + 1.8x_3 = 2.7$ $4.1x_1 + 4.5x_2 - 4.8x_3 = 4.9$ $3.7x_1 + 3.1x_2 + 4.0x_3 = 5.0$
15	$-3x_1 + 3.0x_2 + 2.0x_3 = 2.0$ $1.0x_1 - 2.0x_2 + 3.0x_3 = -3.0$ $1.0x_1 + 5.0x_2 + 3.0x_3 = 7.0$	16	$4.1x_1 + 5.7x_2 + 1.2x_3 = 5.8$ $3.8x_1 + 5.1x_2 + 2.8x_3 = 6.7$ $9.1x_1 + 5.6x_2 + 7.8x_3 = 9.8$
17	$5.0x_1 + 4.0x_2 + 4.0x_3 = 6$ $6.0x_1 + 6.0x_2 - 8.0x_3 = 13$ $4.0x_1 + 2.0x_2 - 1.0x_3 = 7$	18	$4.9x_1 + 4.0x_2 + 4.2x_3 = 3$ $5.8x_1 + 5.0x_2 - 9.0x_3 = 1$ $4.1x_1 + 2.0x_2 - 1.1x_3 = -3$

19	$2.9x_1 + 2.1x_2 + 3.8x_3 = 7.8$ $3.8x_1 + 4.1x_2 + 2.7x_3 = 9.7$ $7.6x_1 + 5.8x_2 + 4.7x_3 = 6.1$	20	$1.6x_1 + 5.3x_2 + 1.3x_3 = -2.4$ $2.5x_1 + 4.7x_2 - 7.8x_3 = 3.5$ $3.7x_1 - 2.3x_2 + 4.5x_3 = 2.4$
21	$5.1x_1 + 3.7x_2 - 1.4x_3 = -0.4$ $4.5x_1 - 2.8x_2 + 6.7x_3 = 2.6$ $2.7x_1 + 0.9x_2 - 1.5x_3 = 3.5$	22	$2.7x_1 + 1.8x_2 + 1.1x_3 = 3.2$ $4.1x_1 + 3.7x_2 + 4.8x_3 = 5.7$ $3.3x_1 + 2.1x_2 + 2.8x_3 = 0.8$
23	$5.1x_1 + 4.2x_2 + 4.1x_3 = 6$ $6.2x_1 + 5.1x_2 - 7.1x_3 = 4$ $2.1x_1 + 1.1x_2 - 1.1x_3 = 7$	24	$1.2x_1 + 7.3x_2 - 2.3x_3 = 5.6$ $2.8x_1 + 3.4x_2 + 5.8x_3 = -3.2$ $1.5x_1 + 2.3x_2 - 3.7x_3 = 4.5$
25	$3.4x_1 - 2.3x_2 + 5.2x_3 = 3.5$ $1.8x_1 + 4.3x_2 + 1.2x_3 = -1.2$ $2.4x_1 + 3.7x_2 - 8.3x_3 = 2.3$	26	$4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 = 0.8$ $3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7$ $2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1$
27	$-3.1x_1 + 3.2x_2 + 2x_3 = 2.3$ $x_1 - 2.2x_2 + 3.1x_3 = -3.2$ $x_1 + 5.3x_2 + 3.1x_3 = 7.2$	28	$1.6x_1 + 2.3x_2 - 1.5x_3 = 4.3$ $0.5x_1 + 0.3x_2 + 1.7x_3 = -0.3$ $3.2x_1 - 2.5x_2 + 3.7x_3 = 6.5$
29	$1.5x_1 + 4.5x_2 + 3.3x_3 = -1.6$ $2.7x_1 - 3.6x_2 + 1.9x_3 = 0.4$ $3.6x_1 + 1.8x_2 - 4.7x_3 = 3.8$	30	$1.5x_1 - 2.3x_2 + 8.6x_3 = -5.5$ $0.8x_1 + 3.5x_2 - 1.4x_3 = 3.2$ $2.4x_1 + 2.5x_2 - 2.9x_3 = 4.5$

6. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Основные понятия и методы решения

Решение нелинейных уравнений с одним неизвестным является одной из важных математических задач, возникающих в различных разделах физики, химии, биологии и других областях науки и техники.

В общем случае нелинейное уравнение с одним неизвестным можно записать в виде:

$$f(x) = 0, \quad (6.1)$$

где $f(x)$ – непрерывная функция. Требуется найти такие x_* , которые при подстановке в (6.1) давали бы верное равенство с заданной погрешностью (иными словами, необходимо отыскать корни уравнения (6.1)). Из школьного курса алгебры должен быть известен графический метод решения (6.1). В этом методе ищутся точки пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = 0$. В курсе «Приближенных вычислений» изучаются численные методы решения уравнения (6.1). Рассмотрим некоторые из этих методов.

1) Метод половинного деления.

В методе половинного деления для нахождения корня нужно выполнить следующие действия:

1. Определить интервал $[a, b]$, на котором существует единственный корень (6.1). Этот интервал можно найти либо интуитивно, либо используя графический метод нахождения корней нелинейных уравнений. Если на промежутке $[a, b]$ есть корень, то функция меняет знак, и справедливо неравенство $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. Далее, ищем первое приближение, в качестве которого рассматривается середина отрезка $[a, b]$. Найти середину отрезка можно по формуле:

$$c = (a + b) / 2. \quad (6.2)$$

Получили два новых отрезка: $[a, c]$ и $[c, b]$. Первым делом проверяем, не является ли c – корнем (6.1). Для этого подставляем c в (6.1), если $f(c) = 0$ или близко к нулю с точностью ϵ , то c – корень уравнения (6.1). Если $f(c) \neq 0$, то определяем, на каком из отрезков $[a, c]$ или $[c, b]$ находится корень уравнения (6.1). Для этого достаточно

проверить неравенство $f(a) \cdot f(c) < 0$. Если неравенство $f(a) \cdot f(c) < 0$ выполняется, то далее рассматривается интервал $[a, c]$, иначе рассматривается интервал $[c, b]$.

3. Определившись с новым интервалом решения, называем новый отрезок $[a_1, b_1]$ и ищем его середину по формуле (6.2): $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. Повторяем действия, описанные в пункте 2. Процесс поиска середины отрезка и получения новых интервалов решения продолжаем k -раз, до тех пор, пока не выполнится одно из условий $f(c) = 0$ или $|a_k - b_k| < \varepsilon$. Количество операций k дает нам скорость сходимости метода половинного деления.

2) Метод хорд.

Метод хорд по смыслу аналогичен методу половинного деления. Отличие заключается лишь в формуле, с помощью которой мы ищем решение.

1. Аналогично предыдущему методу находим интервал $[a, b]$, где существует единственный корень уравнения (6.1).
2. Выбираем начальное приближение и формулу, с помощью которой будем решать задачу. Для этого проверяем выполнение двух неравенств:

- а) Если справедливо неравенство $f(b)f''(x) > 0$, то начальное приближение корня задается, как $x_0 = a$, а формула для решения имеет вид:

$$x_k = b - \frac{f(b)}{f(b) - f(x_{k-1})}(b - x_{k-1}). \quad (6.3a)$$

- б) Если справедливо неравенство $f(a)f''(x) > 0$, то начальное приближение корня задается, как $x_0 = b$, а формула для решения имеет вид:

$$x_k = a - \frac{f(a)}{f(x_{k-1}) - f(a)}(x_{k-1} - a). \quad (6.3б)$$

3. Повторяем k -раз вычисление x_k по выбранной формуле (6.3a) или (6.3б). Процесс поиска решения продолжаем до тех пор, пока функция в точке x_k не станет близкой нулю, т.е. $|f(x_k)| < \varepsilon$. Количество операций k дает нам скорость сходимости метода хорд.

3) Метод простых итераций.

1. Заменяем уравнение (6.1) эквивалентным: $x = \varphi(x)$. Для этого нужно выразить из (6.1) величину x каким-либо удобным способом. Но при этом нужно учесть важное обстоятельство. В методе простых итераций на функцию $\varphi(x)$ накладывается условие: $|\varphi'(x)| < 1$. Поэтому, при замене (6.1) на $x = \varphi(x)$ первым делом нужно проверить в окрестности корня выполнение неравенства $|\varphi'(x)| < 1$.
2. После выбора $\varphi(x)$ начинается итерационный процесс поиска решения, при этом x_k ищется, как $x_k = \varphi(x_{k-1})$. Итерационный процесс повторяется k -раз, пока не выполнится условие

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon,$$

где

$$q = \max \{ \max |\varphi'(\alpha)|, \max |\varphi'(\beta)| \}, \quad \alpha \in [x_*, x_k], \quad \beta \in [x_{k-1}, x_k].$$

Сразу стоит отметить, что метод простых итераций сходится крайне медленно, и может потребоваться большое количество операций для выполнения условия сходимости.

4) Модифицированный метод простых итераций.

1. Этот метод является сочетанием метода хорд и метода простых итераций. Количество итераций в этом методе требуется меньше, чем в методе простых итераций, но формула для расчета меняется в зависимости от четности шага итерации. Для начала, аналогично методу простых итераций, уравнение (6.1) приводится к виду $x = \varphi(x)$. Однако в данном случае на функцию $\varphi(x)$ не накладывается никаких дополнительных условий.
2. Далее решение ищется по схеме:
 - а) на нечетном шаге: $x_{2k+1} = \varphi(x_{2k})$, (5.4a)
 - б) на четном шаге: $x_{2k+2} = \frac{x_{2k+1}^2 - x_{2k} \varphi(x_{2k+1})}{2x_{2k+1} - x_{2k} - \varphi(x_{2k+1})}$. (6.4б)
3. Поиск решения останавливается, когда выполняется условие $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$.

5) Метод Ньютона.

1. Аналогично пунктам 1-2, на первом этапе определяется интервал $[a, b]$, на котором существует единственный корень уравнения (6.1).
2. В зависимости от поведения функции выбирается начальное приближение x_0 :
 - а) $x_0 = a$, если $f(a)f''(x) > 0$,
 - б) $x_0 = b$, если $f(b)f''(x) > 0$.
3. Решение ищется по итерационной формуле:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}. \quad (6.5)$$

4. Поиск решения останавливается, когда выполняется условие $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$. Количество операций k дает нам скорость сходимости метода.
- б) Метод секущих.**

1. Метод секущих является модификацией метода Ньютона, но требует задания двух точек начального приближения. Точку x_0 можно выбрать аналогично пункту 2 метода Ньютона. Точку x_1 можно получить, используя, например, метод Ньютона.
2. Вычисление нового приближения осуществляется по формуле:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})} f(x_{k-1}). \quad (6.6)$$

3. Поиск решения останавливается, когда после выполнения условия $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$ на одной из последующих итераций $k+m$ не начинает расти модуль разности $|x_{k+m} - x_{k+m-1}|$. Количество операций $k+m$ дает нам скорость сходимости метода.

7) Метод Чебышева построения итераций высших порядков.

1. С помощью метода Чебышева можно построить формулы для итераций высокого порядка. Построение формул осуществляется по схеме:
 - а) Общий вид итерационной формулы:

$$x_k = x_{k-1} + \sum_{j=1}^k (-1)^j \frac{F^{(j)}(y)}{j!} f^j(x).$$

Здесь $x = F(y)$ – функция, обратная функции $y = f(x)$, $F^{(j)}(y)$ – производная j -ой степени от функции $F(y)$, j – порядок итерационного метода.

б) Определяется порядок итерационного метода, далее ищется $F^{(j)}(y)$. Поиск $F^{(j)}(y)$ осуществляется исходя из того, что

$$1 = F'(y)f'(x) \Rightarrow F'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \text{ Например, для получения } F''(y)$$

нужно продифференцировать $1 = F'(y)f'(x)$ второй раз по x :

$$\begin{aligned} 0 &= F''(y)f'(x)f'(x) + F'(y)f''(x) = F''(y)(f'(x))^2 + F'(y)f''(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow F''(y) &= -\frac{F'(y)f''(x)}{(f'(x))^2} = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}. \end{aligned}$$

Получение последующих дифференциалов осуществляется аналогичным образом.

в) соответствующие формулы для итераций при $j = 1$ и $j = 2$ следующие:

$$j = 1: \quad x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad (6.7a)$$

$$j = 2: \quad x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} - \frac{f''(x_{k-1})f^2(x_{k-1})}{2[f'(x_{k-1})]^3}. \quad (6.7b)$$

6.2. Примеры

Пример 6.1. Для примера решим уравнение $x - \sin(x) = 0.25$ методом простых итераций и методом Ньютона.

1. Метод простых итераций.

Определим функцию $\varphi(x)$, как $x = \varphi(x) = \sin(x) + 0.25$. Проверим, выполняется ли условие сходимости: $\varphi'(x) = \cos(x) \Rightarrow |\varphi'(x)| < 1$. Условие выполняется за исключением значений x кратным π . Значит, мы можем вести вычисления корня, используя выбранную функцию $\varphi(x)$.

В качестве начального приближения возьмем $x_0 = 1$. Далее, будем вычислять каждое новое приближение, как $x_k = \varphi(x_{k-1})$. Остановим вычисления, когда будет выполнено условие на сходимость. В таблице 6.1 представлены значения x_k в зависимости от номера итерации.

Таблица 5.1

x_k	0	1	2	3	4	5
k	1	1.091471	1.137306	1.137306	1.165804	1.169105
x_k	6	7	8	9	10	11
k	1.170401	1.170907	1.171104	1.171181	1.171211	1.171222

После 11-ой итерации мы получили значение корня, для которого значение исходной функции близко к нулю, $x - \sin(x) - 0.25 = 0.000005$.

2. Метод Ньютона.

Зададим в качестве начального приближения $x_0 = 1$. Вычисления последующих x_k будем вести по формуле (5.5): $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$. Расчет выполним с точностью $|f(x_k)| < 10^{-5}$. Результаты расчета представлены в таблице 6.2.

Таблица 6.2

x_k	0	1	2	3
k	1	1.198981	1.171791	1.171230

После 3-ей итерации мы получили значение корня, для которого значение исходной функции близко к нулю, $x - \sin(x) - 0.25 = 0.00000015$.

Все перечисленные в главе методы схожи между собой по принципу работы. Отличается только скорость сходимости методов. Поэтому для понимания принципа работы методов достаточно приведенного примера. Если проанализировать полученные результаты, то видно, что метод Ньютона сходится быстрее, чем метод простых итераций. В методе Ньютона потребовалось меньшее количество операций, чем в методе простых итераций.

6.3. Контрольные задания

Решить нелинейное уравнение двумя методами: а); б). Область нахождения решения подобрать самостоятельно, используя графический метод нахождения корней нелинейных уравнений (знания 9-10 класса).

Сравнить количество операций, требуемых для нахождения корня с точностью 10^{-5} .

1	$\ln x + x = 5$ методами: а) половинного деления; б) простых итераций.
2	$e^x - 6x = 5$ методами: а) хорд; б) модифицированным методом простых итераций.
3	$x - \sin x = 1$ методами: а) Ньютона; б) простых итераций.
4	$(x-1)^2 - 2e^x = 0$ методами: а) секущих; б) простых итераций.
5	$x^2 + 4 \sin x = 0$ методами: а) половинного деления; б) Ньютона.
6	$2^x - 2 \cos x = 0$ методами: а) половинного деления; б) секущих.
7	$\ln(x+5) + (x-3) = 0$ методами: а) половинного деления; б) секущих.
8	$3x - \cos x = 1$ методами: а) половинного деления; б) хорд.
9	$e^{2x+1} + 3x + 1 = 0$ методами: а) модифицированным методом простых итераций; б) простых итераций.
10	$x - \operatorname{tg} x = 0$ методами: а) хорд; б) простых итераций.
11	$e^{x+1} - (x-1)^2 = 0$ методами: а) Ньютона; б) простых итераций.
12	$x^2 \cos(2x-1) = 1$ методами: а) секущих; б) простых итераций
13	$e^x - 5 \cos x = 0$ методами: а) хорд; б) Ньютона.
14	$x^3 + 1 - e^x = 0$ методами: а) хорд; б) секущих.
15	$\operatorname{arctg} x - x^2 + 1 = 0$ методами: а) Ньютона; б) модифицированным методом простых итераций
16	$e^x + x^2 = 3$ методами: а) секущих; б) модифицированным методом простых итераций
17	$3x + \cos x + 1 = 0$ методами: а) Ньютона; б) секущих
18	$3x - e^x = -1$ методами: а) секущих; б) хорд
19	$\ln x + 2x = 6$ методами: а) хорд; б) Ньютона
20	$\cos(x+0.5) = x^3$ методами: а) хорд; б) секущих
21	$x^3 - 3 \sin x = 0$ методами: а) половинного деления; б) модифицированным методом простых итераций
22	$2 - x = \ln x$ методами: а) половинного деления; б) простых итераций.
23	$e^x + x^2 - 2 = 0$ методами: а) половинного деления; б) Ньютона.
24	$\ln x + 0.5(x+1)^{1/2} = 0$ методами: а) секущих; б) простых итераций.

25	$x^3 - \sqrt{x^2 + x - 1} = 0$ методами: а) хорд; б) модифицированным методом простых итераций
26	$\lg x + \sin 2x = 0$ методами: а) Ньютона; б) хорд
27	$\operatorname{sh} x + \sqrt{x + 1} = 0$ методами: а) хорд; б) модифицированным методом простых итераций

7. СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

7.1. Основные понятия и методы решения

Рассмотрим методы решения систем нелинейных уравнений. В координатном виде система нелинейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Решить такую систему уравнений можно с помощью итерационных методов. Ниже перечислены некоторые из них.

1) Метод простых итераций.

В методе простых итераций решение ищется в виде:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}). \end{cases} \quad (7.2)$$

Для получения решения требуется:

- задать вектор начального приближения $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$;
- подобрать такие функции $\varphi_i(\vec{x})$, $(i=1, 2, \dots, n)$, чтобы выполнялось достаточное условие сходимости итерационного процесса: $\|\vec{\varphi}'(\vec{x})\| \leq q < 1$, где

$$\vec{\varphi}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} - \text{матрица Якоби.}$$

- итерационный процесс должен идти до тех пор, пока не выполнится условие: $\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon$. Это значит, что на каждом k -м шаге

нужно вычислять норму матрицы Якоби, которая дает нижнюю оценку для q , и проверять, как соотносятся между собой новое и старое значения вектора \vec{x} .

2) Метод Ньютона.

Решение системы (7.1) методом Ньютона имеет вид:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \left[J(\vec{x}^{(k)}) \right]^{-1} f(\vec{x}^{(k)}) \quad (7.3)$$

Здесь $J(\vec{x})$ – матрица Якоби:

$$J(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Обратная ей матрица может быть найдена из уравнения: $[J(\vec{x})]^{-1} = \frac{1}{|J|} \tilde{A}$, где $|J|$ – определитель матрицы Якоби, \tilde{A} – присоединенная матрица. Присоединенная матрица составляется из алгебраических дополнений матрицы $J(\vec{x})$. Решение ищется до тех пор, пока не выполнится условие: $\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon$.

Другой способ нахождения $\vec{x}^{(k+1)}$ можно получить, если переписать (7.3) в виде:

$$J(\vec{x}^{(k)}) (\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}) = f(\vec{x}^{(k)}).$$

Тогда

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \Delta \vec{x}^{(k+1)},$$

где $\Delta \vec{x}^{(k+1)}$ находится из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$J(\vec{x}^{(k)}) \Delta \vec{x}^{(k+1)} = f(\vec{x}^{(k)})$$

3) Методы спуска.

Методы спуска основаны на поиске минимума целевой функции, построенной на основе исходной системы уравнений (7.1):

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = f_1^2(x_1, \dots, x_n) + f_2^2(x_1, \dots, x_n) + \dots + f_n^2(x_1, \dots, x_n).$$

Методы спуска могут иметь несколько вариаций. Рассмотрим методы градиентного спуска, которые основаны на поиске минимума целевой функции $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ с помощью выбора направления максимального убывания $\Phi(x_1, \dots, x_n)$. Так как вектор $\text{grad } \Phi(\vec{x}) = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right\}$ направлен в сторону максимального роста функции $\Phi(\vec{x})$, то для нахождения минимума $\Phi(x)$ нужно двигаться в противоположном направлении. Таким образом, формула для поиска решения задачи (7.1) будет иметь вид:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - h_k \text{grad } \Phi(\vec{x}^{(k)}), \quad (7.4)$$

где h_k – шаг спуска. Итерационный процесс может быть остановлен в случае выполнения условий $\left| \frac{\partial \Phi(x^{k+1})}{\partial x_i} \right| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n$.

Скорость сходимости решения зависит от выбора шага h_k . Приведем два варианта выбора шага:

а) линейная зависимость функции $\Phi(\vec{x}^{(k+1)})$ от шага h_k :

$$h_k = h_0 \equiv \frac{\Phi(\vec{x}^{(k)})}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)^2},$$

Соответственно, формула (7.4) будет иметь вид:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\Phi(x^{(k)})}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)^2} \text{grad } \Phi(x^{(k)}). \quad (7.5)$$

б) квадратичная зависимость функции $\Phi(\vec{x}^{(k+1)})$ от шага h_k :

$$h_k = \frac{3\Phi_1 + \Phi_2 - 4\Phi_3}{4(\Phi_1 + \Phi_2 - 2\Phi_3)} h_0,$$

соответственно формула (7.4) будет иметь вид:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \frac{3\Phi_1 + \Phi_2 - 4\Phi_3}{4(\Phi_1 + \Phi_2 - 2\Phi_3)} h_0 \text{grad } \Phi(x^{(k)}), \quad (7.6)$$

где:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi(\vec{x}^{(k)}), \\ \Phi_2 &= \Phi\left(\vec{x}^{(k)} - h_0 \text{grad}\left(\Phi(\vec{x}^{(k)})\right)\right), \\ \Phi_3 &= \Phi\left(\vec{x}^{(k)} - \frac{h_0}{2} \text{grad}\left(\Phi(\vec{x}^{(k)})\right)\right).\end{aligned}$$

7.2. Примеры

Пример 7.1. Решить систему нелинейных уравнений методами простых итераций, методом Ньютона и одним из методов спуска:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \text{tg}(xy + 0.4) - x^2 = 0, \\ f_2(x, y) = 0.6x^2 + 2y^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad x < 0, y > 0. \quad (7.7)$$

1) Метод простых итераций.

Выразим x и y , соответственно, из первого и второго уравнений системы (7.7):

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y) \equiv \frac{\arctg(x^2) - 0.4 + xy}{2y}, \\ y = \varphi_2(x, y) \equiv \sqrt{\frac{1 - 0.6x^2}{2}}.\end{cases}$$

Метод простых итераций сильно зависит от начального приближения, выбор начального приближения нужно проводить исходя из вида $\varphi_i(\vec{x})$. Возьмем в качестве начального приближения вектор $x^{(0)} = -0.5$, $y^{(0)} = 0.5$. Условие сходимости зададим как

$$\max\left(|f_1(x^{(k)}, y^{(k)})|, |f_2(x^{(k)}, y^{(k)})|\right) < \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 10^{-4}$. Значения x и y в зависимости от номера итерации представлены в таблице 7.1.

Таблица 7.1. Результаты решения системы нелинейных уравнений методом простых итераций

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$ f_1(x^{(k)}, y^{(k)}) $	$ f_2(x^{(k)}, y^{(k)}) $
0	-0.5	0.5	$9.9 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-1}$
1	-0.405021	0.651920	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$5.2 \cdot 10^{-2}$
2	-0.384593	0.671407	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$9.7 \cdot 10^{-3}$
3	-0.380821	0.675001	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$
4	-0.380025	0.675642	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$
5	-0.379886	0.675777	$4.2 \cdot 10^{-5}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$

Видим, что решение сошлось за 5 итераций. Разность между значениями приближений на соседних итерациях $x^{(6)}$ и $x^{(5)}$, а также $y^{(6)}$ и $y^{(5)}$ составляет порядка 10^{-4} .

2) Метод Ньютона.

Для решения системы двух уравнений формулы метода Ньютона имеют вид:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(\frac{f_1(x, y)}{|J|} \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} - \frac{f_2(x, y)}{|J|} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right)^{(k)},$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \left(\frac{f_2(x, y)}{|J|} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} - \frac{f_1(x, y)}{|J|} \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \right)^{(k)}.$$

Здесь $|J| = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x}$. В качестве начального

приближения возьмем вектор $x^{(0)} = -0.5$, $y^{(0)} = 0.5$. За условие сходимости примем такое же условие, как в методе простых итераций. Величина $\epsilon = 10^{-4}$. В таблице 7.2 представлены значения x и y в зависимости от номера итерации.

Таблица 7.2. Результаты решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$ f_1(x^{(k)}, y^{(k)}) $	$ f_2(x^{(k)}, y^{(k)}) $
0	-0.5	0.5	$9.9 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-1}$
1	-0.361293	0.716612	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$
2	-0.379216	0.677136	$4.0 \cdot 10^{-4}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$
3	-0.379848	0.675808	$4.6 \cdot 10^{-7}$	$3.8 \cdot 10^{-6}$

Видим, что решение сошлось за 3 итераций. Разность между значениями приближений на соседних итерациях $x^{(3)}$ и $x^{(2)}$, а также $y^{(3)}$ и $y^{(2)}$ составляет порядка 10^{-3} .

3) Метод спуска.

Решим задачу методом спуска с линейной зависимостью шага от функции $\Phi(\vec{x})$. Для начала запишем целевую функцию:

$$\Phi(x, y) = f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y) = (\operatorname{tg}(xy + 0.4) - x^2)^2 + (0.6x^2 + 2y^2 - 1)^2.$$

Формулы для нахождения решения системы двух нелинейных уравнений методом спуска имеют вид:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \Phi(x^{(k)}, y^{(k)}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^{(k)} \bigg/ \sqrt{\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right]^{(k)}};$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \Phi(x^{(k)}, y^{(k)}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^{(k)} \bigg/ \sqrt{\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right]^{(k)}}.$$

Для решения необходимо найти компоненты вектора

$$\operatorname{grad} \Phi(x, y) = \left\{ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right\}.$$

Из курса математического анализа нам известно:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = 2f_1(x, y) \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} + 2f_2(x, y) \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = 2f_1(x, y) \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} + 2f_2(x, y) \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y}.$$

При решении будем пользоваться этими соотношениями вместо нахождения громоздких производных целевой функции. В качестве начального приближения возьмем вектор $x^{(0)} = -0.5$, $y^{(0)} = 0.5$. За условие сходимости примем такое же условие, как в методе простых итераций. Величина $\varepsilon = 10^{-4}$

Таблица 7.3. Результаты решения системы нелинейных уравнений методом спуска

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$ f_1(x^{(k)}, y^{(k)}) $	$ f_2(x^{(k)}, y^{(k)}) $
0	-0.5	0.5	$9.9 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-1}$
1	-0.509417	0.600959	$1.7 \cdot 10^{-1}$	$1.2 \cdot 10^{-1}$
2	-0.45885	0.655197	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$
3	-0.421508	0.65256	$5.2 \cdot 10^{-2}$	$4.2 \cdot 10^{-2}$
4	-0.409681	0.670438	$4.2 \cdot 10^{-2}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$
5	-0.396613	0.666985	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$
6	-0.391832	0.673918	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$
7	-0.386698	0.672285	$8.6 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-3}$
8	-0.38474	0.67508	$6.8 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$
9	-0.382665	0.674373	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-3}$
10	-0.381859	0.675516	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$
11	-0.38101	0.675218	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
12	-0.380677	0.675688	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$5.7 \cdot 10^{-5}$
13	-0.380328	0.675564	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$
14	-0.38019	0.675758	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$
15	-0.380046	0.675707	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
16	-0.379989	0.675787	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$
17	-0.37993	0.675765	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$7.4 \cdot 10^{-5}$

Видим, что решение сошлось за 17 итераций. Разность между значениями приближений на соседних итерациях $x^{(17)}$ и $x^{(16)}$, а также $y^{(17)}$ и $y^{(16)}$ составляет порядка 10^{-5} .

7.3. Контрольные задания

Решить систему нелинейных уравнений двумя методами из следующего списка:

- 1) методом Ньютона,
- 2) методом градиентного спуска с линейной зависимостью целевой функции от шага,
- 3) методом градиентного спуска с квадратичной зависимостью целевой функции от шага.

1	$3 \operatorname{ch}(x^2 - y^2) \cos(2xy) - x = 0$ $3 \operatorname{sh}(x^2 - y^2) \sin(2xy) - y = 0$ Методы 1,2	2	$\cos(x^2 + y^2) - x + y = 0.4$ $(x + y - 2)^2 / 1.2 + (x - y)^2 / 1.1 = 1$ Методы 1,2
---	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---	----------------------------------------------------------------------------------------------

3	$\exp(x+y) - x^2 + y = 1$ $(x+0.5)^2 + y^2 = 2$ Методы 1,3	4	$x^2 + 2y^2 = 1$ $\operatorname{tg}(xy + 0.1) = x^2$ Методы 1,3
5	$0.8x^2 + 2y^2 = 1$ $\operatorname{tg}(xy) = x^2$ Методы 1,3	6	$x^2 + y^2 = 1$ $\sin(x+y) - 1.6x = 0$ Методы 1,2
7	$(x-0.2)^2 - y^2 = 1.5$ $\operatorname{th}(x^2 - y) - 0.44(x+y) = 0$ Методы 1,2	8	$1.5(x+0.1)^2 - (y-0.1)^2 / 0.6^2 = 1.4$ $\cos(0.6y + x^2) + x^2 + y^2 = 1.6$ Методы 1,3
9	$y - 4\exp(x^2 - y^2)\sin(2xy) = 0$ $x - 4\exp(x^2 - y^2)\cos(2xy) = 0$ Методы 1,2	10	$(x-0.1)^2 / 0.7^2 - y^2 / 2 = 0.8$ $\operatorname{ch}(0.1x^2 + y) - x + y = 1$ Методы 1,2
11	$x^2 / 0.7^2 + 2y^2 = 4$ $\exp(-0.1x + y) - xy = 1.4$ Методы 1,3	12	$x - \cos(y) = 3$ $\cos(x-1) + y = 0.5$ Методы 1,3
13	$2\operatorname{ch}(x)\sin(y) - 2xy = 0$ $2\operatorname{ch}(x)\cos(y) - x^2 + y^2 = 0$ Методы 1,2	14	$\sin(x)\operatorname{sh}(y) - 4xy = 0$ $\cos(x)\operatorname{ch}(y) + 2(x^2 - y^2) = 0$ Методы 1,2
15	$\sin(x+y) - 1.2x = 0.2$ $x^2 + y^2 = 1$ Методы 1,3	16	$\cos(x) + y = 1.5$ $2x - \sin(y - 0.5) = 1$ Методы 1,3
17	$\operatorname{tg}(-1.2x + y) + 1.2xy = 0.3$ $x^2 + y^2 = 1.3$ Методы 1,2	18	$2y + \cos(x) = 2$ $\sin(y+1) - x = 1$ Методы 1,2
19	$\cos(x)\operatorname{sh}(y) + 2xy = 0$ $\sin(x)\operatorname{ch}(y) + x^2 - y^2 = 0$ Методы 1,3	20	$\exp(-x)\cos(y) - x = 0$ $\exp(-x)\sin(y) + y = 0$ Методы 1,2
21	$\cos(x)\operatorname{sh}(y) + 2xy = 0$ $\sin(x)\operatorname{ch}(y) + x^2 - y^2 = 0$ Методы 1,3	22	$\exp(x)\cos(y) - x = 0$ $\exp(x)\sin(y) - y = 0$ Методы 1,2
23	$2x + \cos(y) = 2$ $\sin(x+1) - y = 1.2$ Методы 1,3	24	$(x-0.1)^2 / 0.8^2 - y^2 / 2 = 0.9$ $\operatorname{sh}(0.1x^2 + y) - x + y = 1$ Методы 1,3
25	$\sin(x+y) - 1.2x = 1.2$ $2x^2 + y^2 = 2$ Методы 1,2	26	$\exp(-x)\cos(x) - x^2 + y^2 = 0$ $\exp(-x)\sin(x) - 2xy = 0$ Методы 1,3
27	$\operatorname{ch}(x)\cos(y) - x = 0$ $\operatorname{sh}(x)\sin(y) + y = 0$ Методы 1,2	28	$\sin(x) + 2y = 1.6$ $\cos(y-1) + x = 1$ Методы 1,2

8. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

8.1. Основные понятия и методы решения

Численные методы решения систем дифференциальных уравнений основаны на замене исходных уравнений их дискретными аналогами – разностными уравнениями. Область непрерывного изменения аргумента заменяется дискретным множеством узлов $x \rightarrow x_k$. Искомые функции непрерывного аргумента приближенно заменяются функциями дискретного аргумента $y \rightarrow y_k$, $z \rightarrow z_k$ и т.д. Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих исходную систему дифференциальных уравнений и дополнительные условия на границах, называется разностной схемой.

Рассмотрим несколько численных методов решения систем дифференциальных уравнений. Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z), \\ z' = g(x, y, z). \end{cases} \quad (8.1)$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$.

Требуется найти решение этой системы $y = y(x), z = z(x)$ на промежутке $[x_0, x_n]$. Для получения численного решения, промежуток $[x_0, x_n]$ разбивают точками на n частей, координаты которых определяются как $x_{i+1} = x_i + h$, где $h = (x_n - x_0)/n$. В исходной системе уравнений производные заменяют разностными аналогами, и тогда по известным значениям x, y и z в i -ой точке можно вычислить значения y и z в $i+1$ точке.

1. Метод Эйлера.

Метод Эйлера для системы двух дифференциальных уравнений определяется разностными уравнениями:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i, z_i), \\ z_{i+1} = z_i + h g(x_i, y_i, z_i). \end{cases} \quad (8.2)$$

Для решения потребуются условия на левой границе расчетной области $x = x_0$: $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$.

Порядок сходимости метода – первый.

2. Модифицированный метод Эйлера.

Модифицированный метод Эйлера для системы двух дифференциальных уравнений определяется разностными уравнениями:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \\ z_{i+1} = z_i + h g(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}). \end{cases} \quad (8.3)$$

где

$$\begin{cases} \tilde{x} = x_i + \frac{h}{2}, \\ \tilde{y} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i, z_i), \\ \tilde{z} = z_i + \frac{h}{2} g(x_i, y_i, z_i). \end{cases} \quad (8.4)$$

Для решения потребуются условия на левой границе расчетной области $x = x_0$: $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$.

Порядок сходимости модифицированного метода Эйлера – второй.

3. Метод Хойна.

Метод Хойна для системы двух дифференциальных уравнений определяется разностными уравнениями:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i, z_i) + f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})], \\ z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2} [g(x_i, y_i, z_i) + g(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})]. \end{cases} \quad (8.5)$$

где

$$\begin{cases} \tilde{x} = x_i + h, \\ \tilde{y} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i, z_i), \\ \tilde{z} = z_i + h \cdot g(x_i, y_i, z_i). \end{cases}$$

Для решения потребуются условия на левой границе расчетной области $x = x_0$: $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$.

Порядок сходимости метода Хойна – второй.

4. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка для системы двух дифференциальных уравнений определяется разностными уравнениями:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4], \\ z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]. \end{cases} \quad (8.6)$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= h \cdot f(x_i, y_i, z_i), \quad k_1 = h \cdot g(x_i, y_i, z_i), \\ m_2 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{m_1}{2}, z_i + \frac{k_1}{2}\right), \quad k_2 = h \cdot g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{m_1}{2}, z_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ m_3 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{m_2}{2}, z_i + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_3 = h \cdot g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{m_2}{2}, z_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ m_4 &= h \cdot f(x_{i+1}, y_i + m_3, z_i + k_3), \quad k_4 = h \cdot g(x_{i+1}, y_i + m_3, z_i + k_3). \end{aligned}$$

Для решения потребуются условия на левой границе расчетной области $x = x_0$: $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$.

Порядок сходимости метода – четвертый.

5. Метод Рунге-Кутты-Мерсона четвертого порядка.

Метод Рунге-Кутты-Мерсона четвертого порядка для системы двух дифференциальных уравнений определяется разностными уравнениями:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[m_1 + 4m_4 + m_5], \\ z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}[k_1 + 4k_4 + k_5]. \end{cases} \quad (8.7)$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= h \cdot f(x_i, y_i, z_i), \quad k_1 = h \cdot g(x_i, y_i, z_i), \\ m_2 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{m_1}{3}, z_i + \frac{k_1}{3}\right), \quad k_2 = h \cdot g\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{m_1}{3}, z_i + \frac{k_1}{3}\right), \\ m_3 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{m_1 + m_2}{6}, z_i + \frac{k_1 + k_2}{6}\right), \\ m_4 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{m_1 + m_2}{6}, z_i + \frac{k_1 + k_2}{6}\right), \\ m_5 &= h \cdot f(x_{i+1}, y_i + m_4, z_i + k_4), \quad k_5 = h \cdot g(x_{i+1}, y_i + m_4, z_i + k_4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_4 &= h \cdot f \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{m_1 + 3m_3}{8}, z_i + \frac{k_1 + 3k_3}{8} \right), \\
k_4 &= h \cdot g \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{m_1 + 3m_3}{8}, z_i + \frac{k_1 + 3k_3}{8} \right), \\
m_5 &= h \cdot f \left(x_{i+1}, y_i + \frac{m_1 - 3m_3 + 4m_4}{2}, z_i + \frac{k_1 - 3k_3 + 4k_4}{2} \right), \\
k_5 &= h \cdot g \left(x_{i+1}, y_i + \frac{m_1 - 3m_3 + 4m_4}{2}, z_i + \frac{k_1 - 3k_3 + 4k_4}{2} \right).
\end{aligned}$$

Для решения потребуются условия на левой границе расчетной области $x = x_0$: $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$.

Порядок сходимости метода – четвертый.

8.2. Примеры

Пример 8.1 Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$z' = z^2 y; \quad y' = y/x - zy^2 \quad (8.9)$$

на отрезке $[1; 2]$ с начальными условиями

$$z(1) = e; \quad y(1) = 2/e. \quad (8.10)$$

Аналитическое решение системы (8.9) с граничными условиями (8.10) имеет вид:

$$z(x) = \exp(x^2); \quad y(x) = 2x \exp(-x^2). \quad (8.11)$$

1. Метод Эйлера.

Будем решать задачу для $n=10$. На первом этапе решения задаем начальные значения z_0, y_0 . Эти начальные значения будут соответствовать начальным условиям (8.10): $z_0 = e, y_0 = 2/e$. Далее, зная значения функций в 0-ом узле, рассчитываем по порядку значения функций в 1-ом, 2-ом, ...10-ом узлах. Результаты расчета представлены в таблице 8.1. Для того, чтобы оценить, насколько решение соответствует аналитическому, в таблицу также добавлены y_{ai} и z_{ai} (значения аналитических функций (8.11) в узловых точках x_i).

Таблица 8.1. Результаты расчета с помощью метода Эйлера 1-го порядка, $n = 10$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	0.74	0.66	0.58	0.49	0.41	0.34	0.27	0.22	0.17	0.14	0.11
y_{ai}	0.74	0.66	0.57	0.48	0.39	0.32	0.25	0.19	0.14	0.1	0.07
z_i	2.72	3.26	3.97	4.88	6.05	7.57	9.51	12	15.17	19.2	24.29
z_{ai}	2.72	3.35	4.22	5.42	7.1	9.49	12.94	17.99	25.53	36.97	54.6

Видим, что для 10 точек метод Эйлера сходится недостаточно хорошо. Увеличим количество разбиений до 20. Результат нового расчета для $n = 20$ представлен в таблице 8.2. Оценим погрешность решения:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - x(t_i)|; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - y(t_i)|.$$

$$N=10, \varepsilon_y = 0.023715695, \varepsilon_z = 7.169389478.$$

$$N=20, \varepsilon_y = 0.013685253, \varepsilon_z = 4.357513341.$$

Оценим порядок точности метода. Так как $\varepsilon = A \cdot h^\alpha$, то из $\varepsilon_1 = A \cdot h_1^\alpha$ и $\varepsilon_2 = A \cdot h_2^\alpha$ следует $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = (h_1/h_2)^\alpha$ или $\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2) = \alpha \ln(h_1/h_2)$. Следовательно $\alpha = \ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)/\ln(h_1/h_2)$.

$$\alpha_y = \ln\left(\frac{0.023715695}{0.013685253}\right) / \ln\left(\frac{0.1}{0.05}\right) \approx 0.79322;$$

$$\alpha_z = \ln\left(\frac{7.169389478}{4.357513341}\right) / \ln\left(\frac{0.1}{0.05}\right) \approx 0.718345;$$

Теоретическое значение $\alpha=1$.

Оценим сходимость решения в зависимости от числа разбиений. Для этого рассчитаем задачу для $n = 50, 100, 500$ узлов. На рис. 8.1 показано значение $z(x)$, полученное из численного решения системы (8.9) для $n = 20$ (кривая 1), $n = 50$ (кривая 2) и $n = 500$ (кривая 3). Аналитическая функция показана кривой 4. Видим, что при увеличении числа узлов численное решение стремится к аналитическому.

Таблица 8.2. Результаты расчета с помощью метода Эйлера 1-го порядка,
 $n = 20$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45	1.5
y_i	0.74	0.7	0.66	0.62	0.57	0.53	0.49	0.45	0.41	0.37	0.33
y_{ai}	0.74	0.7	0.66	0.61	0.57	0.52	0.48	0.44	0.39	0.35	0.32
z_i	2.72	2.99	3.3	3.66	4.08	4.55	5.1	5.74	6.47	7.32	8.31
z_{ai}	2.72	3.01	3.35	3.75	4.22	4.77	5.42	6.19	7.1	8.19	9.49
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
x_i	1.55	1.6	1.65	1.7	1.75	1.8	1.85	1.9	1.95	2	
y_i	0.3	0.26	0.23	0.21	0.18	0.16	0.14	0.12	0.11	0.09	
y_{ai}	0.28	0.25	0.22	0.19	0.16	0.14	0.12	0.1	0.09	0.07	
z_i	9.45	10.77	12.3	14.08	16.14	18.53	21.3	24.52	28.26	32.6	
z_{ai}	11.05	12.94	15.22	17.99	21.38	25.53	30.65	36.97	44.81	54.6	

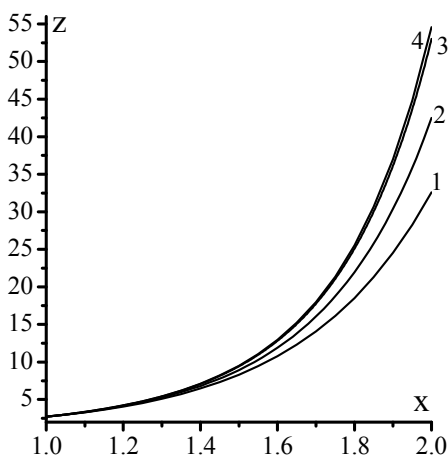


Рис. 8.1. Результаты расчета задачи с помощью метода Эйлера 1-го порядка

2. Модифицированный метод Эйлера.

Также, как и в предыдущем случае, зададим начальные значения $z_0 = e, y_0 = 2/e$. Расчет будем проводить для $n = 10$. Принцип расчета

такой же, как и в прошлом случае, с учетом, что в каждой точке требуется определять не только $i+1$ узлы, но и вспомогательные. Алгоритм расчета следующий: после задания $z_0 = e, y_0 = 2/e$ вычисляются значения вспомогательных точек:

$$\tilde{x} = x_0 + \frac{h}{2}, \tilde{y} = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0, z_0), \tilde{z} = z_0 + \frac{h}{2} g(x_0, y_0, z_0).$$

Далее вычисляются значения функций и аргумента в 1-ой точке разностной сетки: $y_1 = y_0 + h f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), z_1 = z_0 + h g(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Последующие узлы вычисляются по такой же схеме. В таблице 8.3 приведены результаты расчета.

Таблица 8.3. Результаты расчета с помощью модифицированного метода Эйлера, $n = 10$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	0.74	0.66	0.57	0.48	0.4	0.32	0.25	0.2	0.15	0.11	0.08
y_{ai}	0.74	0.66	0.57	0.48	0.39	0.32	0.25	0.19	0.14	0.1	0.07
z_i	2.72	3.34	4.19	5.34	6.94	9.17	12.34	16.88	23.48	33.24	47.85
z_{ai}	2.72	3.35	4.22	5.42	7.1	9.49	12.94	17.99	25.53	36.97	54.6

Согласно таблице 8.3 модифицированный метод Эйлера сходится к аналитическому решению лучше, чем метод Эйлера 1-го порядка.

Оценка порядка точности модифицированного метода показывает, что для $N=10$: $h = 0.1, \epsilon_y = 1.484145, \epsilon_z = 0.0057224528$, для $N=20$:

$$h = 0.05, \epsilon_y = 0.407439, \epsilon_z = 0.0015802469.$$

Поэтому

$$\alpha_y = \ln\left(\frac{1.484145}{0.407439}\right) / \ln\left(\frac{0.1}{0.05}\right) \approx 1.856484,$$

$$\alpha_z = \ln\left(\frac{0.0057224528}{0.0015802469}\right) / \ln\left(\frac{0.1}{0.05}\right) \approx 1.864976, \text{ тогда как теоретическое}$$

значение $\alpha=2$.

3. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Зададим начальные значения $z_0 = e, y_0 = 2/e$. Расчет будем проводить для $n = 10$. В каждой $(i+1)$ -ой точке нам нужно будет вычислить

вспомогательные величины $m_1, m_2, m_3, m_4, k_1, k_2, k_3, k_4$. После вычисления вспомогательных величин вычисляются значения функций и аргумента в $(i+1)$ -ой точке. В таблице 8.4 представлены результаты расчета задачи. Видно, что решение сходится высокой точностью даже для 10 точек разностной сетки.

Таблица 8.4. Результаты расчета с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка, $n = 10$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	0.74	0.66	0.57	0.48	0.39	0.32	0.25	0.19	0.14	0.1	0.07
y_{ai}	0.74	0.66	0.57	0.48	0.39	0.32	0.25	0.19	0.14	0.1	0.07
z_i	2.72	3.35	4.22	5.42	7.10	9.48	12.93	17.98	25.50	36.90	54.46
z_{ai}	2.72	3.35	4.22	5.42	7.10	9.49	12.94	17.99	25.53	36.97	54.6

8.3. Контрольные задания

Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений на указанном промежутке тремя из следующих методов:

- 1) Методом Эйлера 1-го порядка;
- 2) Модифицированным методом Эйлера;
- 3) Улучшенным методом Эйлера;
- 4) Методом Рунге-Кутты 4-го порядка;
- 5) Методом Рунге-Кутты-Мерсона.

Определить порядок точности метода. Оценить погрешность решения.

Сразу заметим, что в отличие от записанных выше уравнений x в задачах является функцией, а t является аргументом функции. Следует учесть этот факт при программировании и решении.

<p>1) $x' = 4x + y - e^{2t};$ $x(0)=3$ $y' = y - 2x;$ $y(0)=-3$ Методы 1, 3, 5</p>	<p>Точное решение $t \in [0,1]$ $x = e^{2t} + e^{3t} + (t+1)e^{2t}$ $y = -2e^{2t} - e^{3t} - 2te^{2t}$</p>
<p>2) $x' = 2x + y + 2e^t;$ $x(0)=1$ $y' = x + 2y - 3e^{4t};$ $y(0)=-3$ Методы 2, 3, 4</p>	<p>Точное решение $t \in [0,1]$ $x = e^t + e^{3t} + te^t - e^{4t};$ $y = -e^t + e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t};$</p>

3) $x' = 4x - 3y + \sin t$; $x(0)=5$; $y' = 2x - y - 2 \cos t$; $y(0) = 5$; Методы 1, 3, 5	$x(0)=5$; $y(0) = 5$; $x(0)=5$; $y(0) = 5$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = e^t + 3e^{2t} + \cos t - 2\sin t$ $y = e^t + 2e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t$
4) $x' = t / y$; $y' = -t / x$; Методы 2, 3, 5	$x(1)=e$; $y(1)=0.5e^{-1}$; $x(1)=e$; $y(1)=0.5e^{-1}$	Точное решение $t \in [1,2]$ $x = \exp(t^2)$ $y = \exp(-t^2)/2$
5) $x' = x^2 / (y - t)$; $y' = x + 1$; Методы 1, 3, 4	$x(0)=1$; $y(0)=1$; $x(0)=1$; $y(0)=1$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = \exp(t)$; $y = t + \exp(t)$; $x = \exp(t)$; $y = t + \exp(t)$
6) $x' = y / t$; $y' = y(x + 2y - 1)/t/(x - 1)$; Методы 2, 3, 6	$x(1)=1.5$; $y(1)=-0.25$; $x(1)=1.5$; $y(1)=-0.25$	Точное решение $t \in [1,2]$ $x = (t + 2)/(t + 1)$ $y = -t/(t + 1)^2$
7) $x' = (x^2 - y^2 + 1)/(2y)$; $y' = y + x$; Методы 1, 3, 5	$x(0) = -1$; $y(0) = 1$; $x(0) = -1$; $y(0) = 1$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = -1 + t/2 - t^2/4$; $y = 1 + t^2/4$; $x = -1 + t/2 - t^2/4$; $y = 1 + t^2/4$
8) $x' = 2x + y$; $y' = 3x + 4y$; Методы 2, 3, 4	$x(0)=2$ $y(0)=2$ $x(0)=2$ $y(0)=2$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = e^t + e^{5t}$; $y = -e^t + 3e^{5t}$; $x = e^t + e^{5t}$; $y = -e^t + 3e^{5t}$
9) $x' = x - y$; $y' = y - 4x$; Методы 1, 3, 5	$x(0)=2$ $y(0)=0$ $x(0)=2$ $y(0)=0$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = e^{-t} + e^{3t}$; $y = 2e^{-t} - 2e^{3t}$; $x = e^{-t} + e^{3t}$; $y = 2e^{-t} - 2e^{3t}$
10) $x' = 8y - x$; $y' = x + y$; Методы 2, 3, 5	$x(0) = -2$ $y(0) = 2$ $x(0) = -2$ $y(0) = 2$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = 2e^{3t} - 4e^{-3t}$; $y = e^{3t} + e^{-3t}$; $x = 2e^{3t} - 4e^{-3t}$; $y = e^{3t} + e^{-3t}$
11) $x' = y + x$; $y' = 3y - 2x$; Методы 1, 3, 4	$x(0)=1$ $y(0)=2$ $x(0)=1$ $y(0)=2$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = [\cos(t) + \sin(t)]e^{2t}$; $y = 2\cos(t)e^{2t}$; $x = [\cos(t) + \sin(t)]e^{2t}$; $y = 2\cos(t)e^{2t}$
12) $x' = x - 3y$; $y' = 3x + y$; Методы 2, 3, 5	$x(0)=1$ $y(0) = -1$ $x(0)=1$ $y(0) = -1$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = [\cos(3t) + \sin(3t)]e^t$; $y = [\sin(3t) - \cos(3t)]e^t$; $x = [\cos(3t) + \sin(3t)]e^t$; $y = [\sin(3t) - \cos(3t)]e^t$
13) $x' = -x - 5y$; $y' = x + y$; Методы 1, 3, 4	$x(0) = 1$ $y(0) = 1$ $x(0) = 1$ $y(0) = 1$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = \cos(2t) - 3\sin(2t)$; $y = \cos(2t) + \sin(2t)$; $x = \cos(2t) - 3\sin(2t)$; $y = \cos(2t) + \sin(2t)$

14) $x' = 2x + y;$ $y' = 4y - x;$ Методы 2, 3, 5	$x(0) = 1$ $y(0) = 2$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = (1 + t)e^{3t};$ $y = (2 + t)e^{3t};$
15) $x' = 2x - y;$ $y' = 2y - x - 5e^t \sin t;$ Методы 1, 3, 5	$x(0) = 4$ $y(0) = 3$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = e^t + e^{3t} + e^t(2\cos t - \sin t)$ $y = e^t - e^{3t} + e^t(3\cos t + \sin t)$
16) $x' = 3x - y;$ $y' = 4x - y;$ Методы 2, 3, 4	$x(0) = 1$ $y(0) = 1$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = (1 + t)e^t;$ $y = (1 + 2t)e^t;$
17) $x' = 2y - 3x;$ $y' = y - 2x;$ Методы 1, 3, 5	$y(0) = 1$ $y(0) = 2$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = (1 + 2t)e^{-t};$ $y = (2 + 2t)e^{-t};$
18) $x' = 5x + 3y;$ $y' = -y - 3x;$ Методы 2, 3, 5	$x(0) = 1;$ $y(0) = 0;$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = (1 + 3t)e^{2t};$ $y = -3te^{2t};$
19) $x' = 4x - y$ $y' = x + 2y$ Методы 1, 3, 4	$x(0) = 1$ $y(0) = 0$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = (t + 1)e^{3t};$ $y = te^{3t}$
20) $x' = y + 2e^t;$ $y' = x + t^2;$ Методы 2, 3, 5	$x(0) = 1;$ $y(0) = -1;$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = 1.5(e^t + e^{-t}) + te^t - t^2 - 2;$ $y = 0.5e^t - 1.5e^{-t} + te^t - 2t;$
21) $x' = y - 5\cos(t);$ $y' = 2x + y;$ Методы 1, 3, 5	$x(0) = 1$ $y(0) = 4$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = e^{2t} + e^{-t} - 2\sin(t) - \cos(t)$ $y = 2e^{2t} - e^{-t} + \sin(t) + 3\cos(t)$
22) $x' = 3x + 2y + 4e^{5t};$ $y' = x + 2y;$ Методы 2, 3, 4	$x(0) = 6$ $y(0) = 1$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = e^t + 2e^{4t} + 3e^{5t}$ $y = -e^t + e^{4t} + e^{5t}$
23) $x' = 2x - 4y + 4e^{-2t};$ $y' = 2x - 2y;$ Методы 1, 3, 4	$x(0) = 2$ $y(0) = 2$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = 2\cos(2t)$ $y = \cos(2t) + \sin(2t) + e^{-2t}$
24) $x' = 4x + y - e^{2t};$ $y' = y - 2x;$ Методы 2, 3, 5	$x(0) = 3$ $y(0) = -3$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = e^{2t} + e^{3t} + (t+1)e^{2t}$ $y = -2e^{2t} - e^{3t} - 2te^{2t}$
25) $x' = 2y - x + 1;$ $y' = 3y - 2x;$ Методы 1, 3, 5	$x(0) = -2$ $y(0) = 0$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = (1 + 2t)e^t - 3$ $y = (2 + 2t)e^t - 2$

26) $x' = 5x - 3y + 2e^{3t}$, $y' = x + y + 5e^{-t}$; Методы 2, 3, 4	$x(0) = -1$ $y(0) = -2$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = e^{2t} + 3e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}$ $y = e^{2t} + e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}$
27) $x' = 2x + y + e^t$; $y' = -2x + 2t$; Методы 1, 3, 5	$x(0) = 3$ $y(0) = -3$	Точное решение $t \in [0,1]$ $x = e^t \cos(t) + e^t \sin(t) + e^t + t + 1$; $y = -2e^t \sin(t) - 2e^t - 2t - 1$

9. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

9.1. Основные понятия и методы решения

Краевая задача возникает при решении дифференциальных уравнений высших порядков или систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (9.1)$$

с граничными условиями:

$$x = a : \quad \gamma_1 y(a) + \gamma_2 y'(a) = \gamma_3, \quad (9.2)$$

$$x = b : \quad \mu_1 y(b) + \mu_2 y'(b) = \mu_3. \quad (9.3)$$

Здесь аргумент x изменяется на промежутке $[a, b]$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ – независимые константы, определяющие тип граничных условий (9.2) – (9.3). Требуется найти такую функцию $y(x)$, которая при подстановке в уравнение (9.1) давала бы верное равенство, а на границах $x = a$, $x = b$ стремилась бы к выполнению граничных условия. Рассмотрим два численных метода решения (9.1) – (9.3).

1) Конечно-разностный метод.

Покажем, сначала, как решается система линейных алгебраических $n+1$ уравнений с трехдиагональной матрицей (9.4):

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0 y_0 + \tilde{A}_0 y_1 &= \tilde{F}_0, \\ C_i y_{i-1} + B_i y_i + A_i y_{i+1} &= F_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \tilde{C}_n y_{n-1} + \tilde{B}_n y_n &= \tilde{F}_n. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Решение системы ищем в виде (9.5).

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i. \quad (9.5)$$

Тогда из (9.4) можно получить:

$$C_i (\alpha_{i-1} y_i + \beta_{i-1}) + B_i y_i + A_i y_{i+1} = F_i.$$

или

$$y_i = -\frac{A_i}{B_i + C_i \alpha_{i-1}} y_{i+1} + \frac{F_i - C_i \beta_{i-1}}{B_i + C_i \alpha_{i-1}}.$$

Из сравнения полученного уравнения с (9.6) видно, что:

$$\alpha_i = -\frac{A_i}{B_i + C_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{F_i - C_i \beta_{i-1}}{B_i + C_i \alpha_{i-1}}. \quad (9.6)$$

Здесь индекс i изменяется от 1 до $n-1$.

Соотношения (9.6) являются рекуррентными, т.е., например, для нахождения α_1 и β_1 необходимо знать α_0 и β_0 , которые получим из первого уравнения (9.4), переписав его в виде:

$$y_0 = -\frac{\tilde{A}_0}{\tilde{B}_0} y_1 + \frac{\tilde{F}_0}{\tilde{B}_0}, \quad (9.7)$$

Сравнивая (9.7) с (9.5) для $i = 0$, находим, что:

$$\alpha_0 = -\frac{\tilde{A}_0}{\tilde{B}_0}; \quad \beta_0 = \frac{\tilde{F}_0}{\tilde{B}_0}, \quad (9.8)$$

Коэффициенты α_i и β_i , называются прогоночными коэффициентами, а процесс получения этих коэффициентов по формулам (9.8) и (9.6) называется прямой проголкой.

Получим решение для y_n . Для этого разрешим третье уравнение системы (9.4) и равенство (9.5), записанного для $i = n-1$, относительно y_n :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n y_{n-1} + \tilde{B}_n y_n &= \tilde{F}_n. \\ y_{n-1} &= \alpha_{n-1} y_n + \beta_{n-1}. \\ y_n &= \frac{\tilde{F}_n - \tilde{C}_n \beta_{n-1}}{\tilde{B}_n + \tilde{C}_n \alpha_{n-1}}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Оставшиеся y_i найдем из (9.6), меняя i от $n-1$ до 0. Процесс нахождения y_i называется обратной проголкой.

Теперь решим задачу (9.1)–(9.3) конечно разностным методом с использованием метода прогонки.

Введем на отрезке $[a, b]$ разностную сетку с шагом $h = (b - a)/n$, где n – число разбиений. Тогда аргумент x в узловых точках определим как: $x_i = a + ih$. Введем сеточную функцию в узловых точках, как y_i . Производные в уравнении (9.1) в узлах сетки представим в виде конечных разностей, выраженных через сеточную функцию:

$$y' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \quad (9.10)$$

Подстановка (9.4) в (9.1) дает:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i) y_i = f(x_i).$$

Приведем подобные и перепишем полученное уравнение в виде:

$$C_i y_{i-1} + B_i y_i + A_i y_{i+1} = F_i. \quad (9.11)$$

В уравнении (9.11) приняты следующие обозначения:

$$A_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h}, B_i = -\frac{2}{h^2} + q(x_i), C_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h}, F_i = f(x_i), i = 1, \dots, n-1.$$

Разностное уравнение для внутренних точек области (9.11) записано со вторым порядком аппроксимации. Запишем разностные аналоги краевых условий (9.1) и (9.3):

$$x = x_0: \quad \gamma_1 y_0 + \gamma_2 \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \gamma_3, \quad (9.12)$$

$$x = x_n: \quad \mu_1 y_n + \mu_2 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = \mu_3. \quad (9.13)$$

Как видим, в выражениях появились значения сеточных функций в фиктивных точках y_{-1} и y_{n+1} . Для того, чтобы избавиться от этих значений запишем разностное уравнение (9.11), соответственно, для $i=0$ и $i=n$:

$$C_0 y_{-1} + B_0 y_0 + A_0 y_1 = F_0, \quad (9.14)$$

$$C_n y_{n+1} + B_n y_n + A_n y_{n+1} = F_n. \quad (9.15)$$

Исключим из (9.12) и (9.14) фиктивное значение y_{-1} , а из (9.13) и (9.15) фиктивное значение y_{n+1} :

$$(\gamma_2 B_0 + 2h\gamma_1 C_0) y_0 + \gamma_2 (A_0 + C_0) y_1 = \gamma_2 F_0 + 2h\gamma_3 C_0, \quad (9.16)$$

$$\mu_2 (C_n + A_n) y_{n-1} + (\mu_2 B_n - 2h\mu_1 A_n) y_n = \mu_2 F_n - 2h\mu_3 A_n. \quad (9.17)$$

Введем обозначения:

$$\tilde{B}_0 = \gamma_2 B_0 + 2h\gamma_1 C_0; \quad \tilde{A}_0 = \gamma_2 (A_0 + C_0); \quad \tilde{F}_0 = \gamma_2 F_0 + 2h\gamma_3 C_0,$$

$$\tilde{C}_n = \mu_2 (C_n + A_n); \quad \tilde{B}_n = \mu_2 B_n - 2h\mu_1 A_n; \quad \tilde{F}_n = \mu_2 F_n - 2h\mu_3 A_n.$$

Тогда из (9.16) и (9.17) получаются недостающие уравнения,

$$\tilde{B}_0 y_0 + \tilde{A}_0 y_1 = \tilde{F}_0,$$

$$\tilde{C}_n y_{n-1} + \tilde{B}_n y_n = \tilde{F}_n,$$

которые совместно с уравнениями (9.11) образуют систему линейных алгебраических уравнений (9.4) с трехдиагональной матрицей.

Итак, разностная схема (9.11), (9.16) и (9.17) позволяет получить численное решение задачи (9.1)–(9.3) со вторым порядком аппроксимации.

Краевые условия (9.2)–(9.3) могут быть аппроксимированы без использования фиктивных точек (с первым порядком аппроксимации), при этом реализация разностной схемы будет чуть проще, но точность численного решения будет хуже.

$$x = x_0: \quad \gamma_1 y_0 + \gamma_2 \frac{y_1 - y_0}{h} = \gamma_3, \quad (9.18)$$

$$x = x_n: \quad \mu_1 y_n + \mu_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \mu_3. \quad (9.19)$$

Откуда получаем

$$(h\gamma_1 - \gamma_2) y_0 + \gamma_2 y_1 = h\gamma_3, \quad (9.20)$$

$$-\mu_2 y_{n-1} + (h\mu_1 + \mu_2) y_n = h\mu_3. \quad (9.21)$$

Вводя обозначения

$$\tilde{B}_0 = h\gamma_1 - \gamma_2; \quad \tilde{A}_0 = \gamma_2; \quad \tilde{F}_0 = h\gamma_3,$$

$$\tilde{C}_n = -\mu_2; \quad \tilde{B}_n = h\mu_1 + \mu_2; \quad \tilde{F}_n = h\mu_3,$$

получим из (9.20) и (9.21) недостающие уравнения,

$$\tilde{B}_0 y_0 + \tilde{A}_0 y_1 = \tilde{F}_0,$$

$$\tilde{C}_n y_{n-1} + \tilde{B}_n y_n = \tilde{F}_n.$$

Алгоритм решения задачи (9.1) – (9.3) методом конечных разностей сводится к следующим действиям:

1. Определяем размер шага разностной сетки, $h = (b - a)/n$.
2. Находим α_0, β_0 из соотношений (9.8).
3. Прямым циклом (от $i = 1$ до $i = n - 1$) определяем α_i, β_i в точках $i = 1, \dots, n - 1$ по соотношениям (9.6), используя коэффициенты системы уравнений (9.4).
4. Из выражения (9.9) находим значение функции на правой границе расчетной области y_n .
5. Обратным циклом (от $i = n - 1$ до $i = 0$) из уравнения (9.5) определяем значения функции y_i в узловых точках.

2) Метод стрельбы.

Суть метода стрельбы заключается в сведении краевой задачи к решению задачи Коши. Другими словами, мы должны свести дифференциальное уравнение второго порядка (9.1) к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого наведем новую переменную: $z(x) = y'(x)$. Уравнение (9.1) примет вид:

$$\begin{aligned} y' &= z(x), \\ z' + p(x)z + q(x)y &= -f(x). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Граничные условия (9.2) – (9.3) переписутся в виде:

$$x = a : \gamma_1 y(a) + \gamma_2 z(a) = \gamma_3, \quad (9.23)$$

$$x = b : \mu_1 y(b) + \mu_2 z(b) = \mu_3. \quad (9.24)$$

Из главы 8 нам известно, что решить систему (9.22) можно, например, с помощью методов Рунге-Кутты. Но для того, чтобы стало возможным разрешить (9.22) требуется задание двух начальных условий для точки $x = a$: условие для $y(a)$ и условие для $z(a)$. Нам изначально дано только одно условие на левой границе, заданное соотношением (9.23). Поэтому предположим, что на левой границе функция $y(a)$ имеет некоторое значение ξ : $y(a) = \xi$, тогда из (9.23) можно получить условие для $z(a)$: $z(a) = (\gamma_3 - \gamma_1 \xi) / \gamma_2$. Таким образом, задача (9.1) – (9.3) превратилась в задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = z(x), \\ z' + p(x)z + q(x)y = -f(x). \end{cases} \quad (9.25)$$

$$y(a) = \xi, \quad z(a) = (\gamma_3 - \gamma_1 \xi) / \gamma_2. \quad (9.26)$$

Задав произвольное значение ξ , мы можем получить некоторое решение $y(x)$, удовлетворяющее системе (9.22) и условию (9.23) (или уравнению (9.1) и условию (9.2)). Однако кроме этого нам нужно, чтобы полученное решение удовлетворяло граничному условию (9.3) (или (9.24)). Следовательно, если мы введем функцию

$$W = \mu_1 y(b) + \mu_2 z(b) - \mu_3 = \mu_1 y_n + \mu_2 z_n - \mu_3, \quad (9.27)$$

и потребуем равенства нулю для этой функции, то получим нелинейное уравнение $W(\xi) = 0$, поскольку y_n и z_n будут зависеть от ξ .

Решение нелинейных уравнений было подробно рассмотрено в главе 5. Выберем метод Ньютона и будем решать задачу (9.25) с начальными условиями (9.26) для разных $\xi = \xi_{k+1}$, вычисляемых по формуле

$$\xi_{k+1} = \xi_k - \frac{W(\xi_k)}{W'(\xi_k)} = \xi_k - \frac{W(\xi_k)\epsilon}{W(\xi_k + \epsilon) - W(\xi_k)}, \quad (9.28)$$

до тех пор, пока не выполнится условие $W(\xi_{k+1}) = 0$ с заданной точностью. Здесь ϵ малое число, $\epsilon = 10^{-3} \dots 10^{-2}$

Таким образом, алгоритм для решения задачи следующий:

1. Переписываем уравнение (9.1) в виде системы двух уравнений (9.25).

2. Задаем произвольное значение функции $y(a) = \xi$, по которому из граничного условия (9.23) определяем значение производной функции на левой границе $z(a) = (\gamma_3 - \gamma_1 \xi) / \gamma_2$.
3. Решаем полученную систему дифференциальных уравнений (9.25) с начальными условиями (9.26).
4. Проверяем полученное решение в точке $x = x_n$. Если при подстановке y_n, z_n в (9.27) мы получаем $W(\xi) \approx 0$, то выбор ξ оказался удачным, и получившаяся точечная функция y_i является решением задачи (9.1) – (9.3). Если $W(\xi) \neq 0$, то вычисляем новое значение $\xi = \xi_{k+1}$ из (9.28).
5. Повторяем расчет с новым ξ и снова выполняем проверку условия $W(\xi) \approx 0$.
6. Процесс подбора параметра ξ является итерационным, может потребоваться несколько расчетов задачи (9.25) с начальными условиями (9.26), чтобы выполнилось условие $W(\xi) \approx 0$.

9.2. Примеры

Пример 9.1. Решим краевую задачу

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 3y - \exp(4x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

с граничными условиями

$$\frac{dy(0)}{dx} - y(0) = 0.6, \quad \frac{dy(1)}{dx} + y(1) = 4 \exp(3) + \exp(4).$$

Точное решение задачи имеет вид:

$$y_{an}(x) = \exp(-x) + \exp(3x) + 0.2 \exp(4x).$$

1) Конечно-разностный метод.

Перепишем задачу в виде (9.11):

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{2}{2h} \right) y_{i+1} + \left(-\frac{2}{h^2} - 3 \right) y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{2}{2h} \right) y_{i-1} = e^{-4x_i}.$$

Откуда $A_i = \frac{1}{h^2} - \frac{2}{2h}$, $B_i = -\frac{2}{h^2} - 3$, $C_i = \frac{1}{h^2} + \frac{2}{2h}$, $F_i = e^{-4x_i}$.

Граничные условия реализуем с первым порядком аппроксимации, из которых определим значения коэффициентов для первого и последнего уравнений системы (9.4):

$$\begin{aligned}\tilde{B}_0 &= -h - 1; \quad \tilde{A}_0 = 1; \quad \tilde{F}_0 = 0.6 \cdot h, \\ \tilde{C}_n &= -1; \quad \tilde{B}_n = h + 1; \quad \tilde{F}_n = h(4e^3 + e^4).\end{aligned}$$

Далее, решим задачу по алгоритму, описанному выше. Пример программы на языке PascalABS.net представлен ниже.

Если граничные условия реализовать со вторым порядком аппроксимации, то соответствующие коэффициенты будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_0 &= -5 - \frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}; \quad \tilde{A}_0 = \frac{2}{h^2}; \quad \tilde{F}_0 = 2.2 + \frac{1.2}{h}, \\ \tilde{C}_n &= \frac{2}{h^2}; \quad \tilde{B}_n = -\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h} - 1; \quad \tilde{F}_n = e^4 - 2(4e^3 + e^4) \left(\frac{1}{h} - 1 \right).\end{aligned}$$

2) Метод стрельбы.

Перепишем задачу в виде:

$$\begin{aligned}y' &= z(x), \\ z' &= 2z + 3y + e^{4x}.\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы на левой границе выполнялись условия:

$$y_0 = \xi, \quad z_0 = 0.6 + \xi.$$

Зададим произвольную величину $\xi = 1$. Решим задачу с заданными начальными условиями, используя модифицированный метод Эйлера второго порядка точности, после чего проверим выполнение граничного условия на правой границе расчетной области: $W = z_n + y_n - 4e^3 - e^4$. После первого расчета значение проверочной функции составило $W = z_n + y_n - 4e^3 - e^4 = -49.2$.

Пересчитаем значение $\xi = \xi_{k+1}$ по формуле (9.28) для $\varepsilon = 10^{-3}$, получим $\xi = 2.24$. Заново выполним расчет системы дифференциальных уравнений $y' = z(x)$, $z' = 2z + 3y + e^{4x}$ с начальными условиями $y_0 = 2.24$, $z_0 = 2.84$. После расчета проверим значение функции (9.27). В данном случае $W = z_n + y_n - 4e^3 - e^4 = 3 \cdot 10^{-10} \approx 0$. Значит, мы нашли такие условия $y_0 = \xi$, $z_0 = 0.6 + \xi$, что функция $y(x)$ удовлетворяет не только исходной системе дифференциальных уравнений, но и краевым условиям. Ниже приведен пример программной реализации решения задачи.

Приложение с текстами программ:

Метод конечных разностей.

```
const N=20; ax=0; bx=1;
function y_an(x:real):real; begin
y_an:=exp(-x)+exp(3*x)+0.2*exp(4*x); end;
function p(x:real):real; begin p:=-2; end;
function q(x:real):real; begin q:=-3; end;
function f1(x:real):real; begin f1:=exp(4*x); end;
var x,y,A,B,C,F,aa,bb:array [0..N] of real; h,xx:real; i:integer;
begin
h:=(bx-ax)/N;
for i:=0 to N do x[i]:=ax+h*i;
for i:=0 to N-1 do begin
C[i]:=1/(h*h) - p(x[i])/(2*h);
A[i]:=1/(h*h) + p(x[i])/(2*h);
B[i]:=-2/(h*h)+q(x[i]);
F[i]:=f1(x[i]);
end;
B[0]:=-h-1; A[0]:=1; F[0]:=0.6*h;
B[N]:=1+h; C[N]:=-1;F[N]:=h*(4*exp(3)+exp(4));
aa[0]:=-A[0]/B[0]; bb[0]:=F[0]/B[0];
for i:=1 to N do begin
aa[i]:=-A[i]/(C[i]*aa[i-1] + B[i]);
bb[i]:=(F[i] - C[i]*bb[i-1])/(C[i]*aa[i-1] + B[i]);
end;
y[n]:=(F[n] - bb[n-1]*C[n])/(B[n] + aa[n-1]*C[n]);
for i:=n-1 downto 0 do y[i]:=aa[i]*y[i+1] + bb[i];
for i:=0 to N do writeln(x[i]:6:2, ' ',y[i]:10:6,y_an(x[i]):10:6);
xx:=0;
for i:=1 to N do xx:=xx+abs(y[i] - y_an(x[i]));
writeln(xx/N);
end.
```

Метод стрельбы.

```
const N=20; ax=0; bx=1;
function y_an(x:real):real; begin
y_an:=exp(-x)+exp(3*x)+ 0.2*exp(4*x); end;
function f(x,y,z:real):real; begin f:=z; end;
function g(x,y,z:real):real; begin g:=2*z+3*y+exp(4*x); end;
var x,y,z:array [0..N] of real; h,xx,xx1,d:real; i:integer;
```

```

function shoot(ksi:real):real;
var y1,z1:real;i:integer;
begin
  y[0]:=ksi-0.6;z[0]:=ksi;
  for i:=0 to N-1 do begin
    y1:=y[i]+0.5*h*f(x[i],y[i],z[i]);
    z1:=z[i]+0.5*h*g(x[i],y[i],z[i]);
    y[i+1]:=y[i]+h*f(x[i]+0.5*h,y1,z1);
    z[i+1]:=z[i]+h*g(x[i]+0.5*h,y1,z1);
  end;
  shoot:=z[n]+y[n]-(4*exp(3)+exp(4))
end;
begin
  h:=(bx-ax)/N;
  for i:=0 to N do x[i]:=ax+h*i;
  xx:=1;
  d:=1;
  while d>1e-3 do begin
    xx1:=xx-shoot(xx)*1e-4/(shoot(xx+1e-4)-shoot(xx));
    d:=abs(xx-xx1);
    xx:=xx1;
  end;
  writeln(' x[i]    y[i]    y_an(x[i])');
  for i:=0 to N do writeln(x[i]:6:2,' ',y[i]:10:6,y_an(x[i]):13:6);
  xx:=0;
  for i:=1 to N do xx:=xx+abs(y[i]-y_an(x[i]));
  writeln(xx/N);
end.

```

Результаты расчета для $n = 20, h = 0.05$

x_i	Точное решение $u_{ан}(x_i)$	Конечно-разностный метод		Метод стрельбы y_i
		y_i , (граничные условия с 1-ым порядком точности)	y_i , (граничные условия со 2-ым порядком точности)	
0.00	2.20	2.61	2.19	2.24
0.05	2.36	2.77	2.35	2.40
0.10	2.55	2.97	2.54	2.59
0.15	2.79	3.22	2.78	2.83
0.20	3.09	3.53	3.07	3.13
0.25	3.44	3.90	3.42	3.48
0.30	3.86	4.35	3.85	3.91
0.35	4.37	4.90	4.35	4.42
0.40	4.98	5.54	4.96	5.03
0.45	5.70	6.32	5.68	5.76
0.50	6.57	7.24	6.53	6.62
0.55	7.59	8.33	7.55	7.65
0.60	8.80	9.63	8.76	8.86
0.65	10.24	11.17	10.19	10.31
0.70	11.95	13.00	11.89	12.01
0.75	13.98	15.16	13.91	14.04
0.80	16.38	17.72	16.30	16.44
0.85	19.23	20.76	19.14	19.28
0.90	22.61	24.36	22.50	22.65
0.95	26.61	28.63	26.50	26.64
1.00	31.37	33.70	31.24	31.38

Из сравнения численных решений с точным решением видно, что метод стрельбы и конечно-разностный метод со вторым порядком аппроксимации граничных условий дали более точные результаты, чем конечно-разностный метод с первым порядком аппроксимации граничных условий.

9.3. Контрольные задания

Решить краевую задачу на указанном промежутке методом стрельбы и методом конечных разностей. Сравните полученные решения с аналитическим решением и между собой. Оцените погрешность расчета задачи для $n = 10, 50, 100$ узлов.

Задача	Точное решение
1. $y'' + 2y' + y = 15e^{-x}(x+1)^{0.5}$, $x \in [0, 1]$ $y'(0)=1.5$, $y'(1)=\sqrt{2} \exp(-1)$	$y = e^{-x} (x+1)^{2.5}$
2. $y'' + y = 4xe^x$, $x \in [0, 1]$ $y'(0)=1.0$, $y'(1)+y(1)=\cos(1)+2\exp(1)$	$y = \sin(x) + (2x - 2)e^x$
3. $y'' - y = 2e^x - x^2$, $x \in [0, 1]$ $-y'(0)+y(0)=1$, $y'(1)=3\exp(1)+2$	$y = (1 + x)e^x + x^2 + 2$
4. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$ $x \in [0, 1]$ $y'(0)=2/3$, $y'(1)=(11/6) \exp(1)$	$y = (x^2/2 - x/3 + 1)e^x$
5. $y'' - 3y' + 2y = 4\sin x - 2\cos x$, $x \in [0, 1]$ $y(0)=2$, $y'(1)+y(1)=2\cos(1)+2\exp(1)$	$y = e^x + \sin x + \cos x$
6. $y'' + y = 4 \sin x$ $x \in [0, 1]$ $-y'(0)+y(0)=1$, $y(1) = \sin(1) - 2\cos(1)$	$y = \sin(x) - 2x \cos(x)$
7. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$ $x \in [0, 1]$ $y(0)=-2$, $y'(1)=\exp(1)-8\exp(2)$	$y = e^x - (2x^2 - 2x + 3) e^{2x}$
8. $y'' - 3y' + 2y = 5x \cos(x)$, $x \in [0, 1]$ $-y'(0)+y(0)=0.6$, $y(1)=\exp(1) - 0.1\cos(1) - 3.2\sin(1)$	$y = e^x + (0.5x - 0.6) \cos(x) - (1.5x + 1.7) \sin(x)$
9. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$, $x \in [0, 1]$ $y(0)=35/36$, $y'(1)+y(1)=2\exp(1)-1/6\exp(-1)+2/5\exp(-4)$	$y = e^x - 0.2xe^{-4x} - (x/6 + 1/36)e^{-x}$
10. $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$, $x \in [0, 1]$ $y(0)=1$, $y'(1)=29\exp(1)/24$	$y = (1+x^3/12 - x^2/16 + x/32)e^x$
11. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin(2x)$, $x \in [0, 1]$ $-y'(0)+y(0)=-0.25$, $y(1)=0.1\cos(2)+0.25\exp(2)+0.05\sin(2)$	$y = 0.25e^{2x} + 0.1 \cos(2x) + 0.05\sin(2x)$

12. $y'' - 9y = e^{3x} \cos(x), \quad x \in [0, 1]$ $y(0) = -1/37,$ $y'(1) + y(1) = \exp(3)[2\cos(1) + 25\sin(1)]/37$	$y = e^{3x} [(6/37) \sin(x) - (1/37) \cos(x)]$
13. $y'' - 2y' + y = 6xe^x, \quad x \in [0, 1]$ $-y'(0) + y(0) = 0, \quad y(1) = \exp(1)$	$y = x^3 e^x$
14. $y'' + y = x \sin(x), \quad x \in [0, 1]$ $y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1/2 \sin(1) - 1/4 \cos(1)$	$y = -x^2/4 \cos(x) + x/4 \sin(x)$
15. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}, \quad x \in [0, 1]$ $y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 5/32 \exp(2)$	$y = (x/16 - 1/32) e^{2x}$
16. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin(5x), \quad x \in [0, 1]$ $y(0) = 0.02,$ $y'(1) = -0.1[\cos(5) + \sin(5)] - 111/125$	$y = -0.2x^3 - 0.12x^2 - 0.048x + 0.02(\cos(5x) - \sin(5x))$
17. $y'' - 2y' + y = e^x/x, \quad x \in [1, 2]$ $y(1) = 0, \quad y'(2) = \exp(2)[1 + 3 \cdot \ln(2)]$	$y = e^x x \ln(x)$
18. $y'' + 3y' + 2y = 1/(e^x + 1)$ $x \in [0, 1]$ $-y'(0) + y(0) = 5 \cdot \ln(2) - 1$ $y(1) = \ln[1 + \exp(1)][\exp(-1) + \exp(-2)]$	$y = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1)$
19. $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$ $x \in [1, 2]$ $-y'(1) + y(1) = -5 \quad y(2) = 2 \cdot \ln(2) + 16$	$y = x \ln(x) + 2x^3$
20. $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x \quad x \in [1, 2]$ $y(1) = 2$ $y'(2) + y(2) = \cos[2 \cdot \ln(2)] + \sin[2 \cdot \ln(2)]$	$y = \sin[2 \ln(x)] + 2x$
21. $x^3 y'' - 2xy' = 6 \ln(x) - 4$ $x \in [1, 2]$ $y(1) = 0$ $y'(2) = 1/6 + 1/2 \cdot \ln^2(2) - 2/3 \cdot \ln(2)$	$y = [(2/3) \ln(x) - \ln^2(x)]/x$
22. $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2,$ $x \in [1, 2],$ $y(1) = 4,$ $y'(2) = 4 \cos[\ln(2)] - 2 \sin[\ln(2)] + 12$	$y = x^2 [\cos(\ln x) + 3]$

23. $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$ $x \in [1, 2]$ $y'(1) = -3, \quad y(2) = 8\ln(2) - 8$	$y = x^3 \ln(x) - 2x^2$
24. $x^2y'' - 2y = \sin(\ln(x))$ $x \in [1, 2]$ $-y'(1) + y(1) = 0.4,$ $y(2) = 0.1 \cos[\ln(2)] - 0.3 \sin[\ln(2)]$	$y = 0.1 \cos(\ln(x)) - 0.3 \sin(\ln(x))$
25. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$ $x \in [0, 1]$ $y'(0) + y(0) = -2.5, \quad y'(1) = 0$	$y = (x-2)^2 \ln x-2 + x - 1.5$
26. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x$ $x \in [1, 2]$ $-y'(1) + y(1) = -3, \quad y(2) = 14$	$y = x^3 + x^2 + x$
27. $x^2y'' - xy' - 3y = -4x,$ $x \in [1, 2]$ $-y'(1) + y(1) = 0, \quad y'(2) = 12.75$	$y = x^3 + x^{-1} + x$

ЛИТЕРАТУРА

1. Миньков С.Л., Миньков Л.Л. Основы численных методов : учебное пособие. – Томск : НТЛ, 2006. – 260 с.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М. : Наука, 1989. – 536 с.
3. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. – М. : Высшая школа, 1990. – 534 с.
4. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. – М. : Изд-во МГУ, 1990. – 336 с.
5. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений : учебное пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. / под ред. А.В. Старченко. – Томск : Изд. дом ТГУ, 2014. – 764 с.

Учебное издание

Леонид Леонидович Миньков
Ксения Михайловна Моисеева
Василий Андреевич Порязов

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО «ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ»**

Учебно-методическое пособие

Опубликовано в авторской редакции

Издательство “СТТ”
Россия, 634028, г. Томск, проспект Ленина, 15Б–1
Тел.: (3822)421-455
E-mail: stt@sttonline.com

Усл. печ. лист 5,9. Уч.-изд. л. 3,5.
Бумага для офсетной техники. Гарнитура Times.
Подписано к печати 07.05.2019 г. Формат 60х84/16
Тираж 100 экз. Заказ № 623.