Министерство образования и науки Российской Федерации
Национальный исследовательский
Томский государственный университет

А.Ю. Крайнов

ОСНОВЫ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ЧЕРЕЗ СЛОЙ ВЕЩЕСТВА

Учебное пособие

Scientific & Technical Translations
STT
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Томск – 2016

УДК 519.63
ББК 22.37
К78

К78 **Крайнов А.Ю.** Основы теплопередачи. Теплопередача через слой вещества : **у**чеб. пособие.– Томск : STT, 2016. – 48 с.

ISBN 978-5-93629-558-4

Представлены основы расчета теплопередачи через слой вещества. Представлены и проанализированы решения задач теплопередачи через многослойные пластинки, через слои веществ, ограниченные стенками, при тепловыделении в слое. Рассмотрены случаи цилиндрических и сферических слоев. Учебное пособие составлено для студентов четвертого курса, изучающих «Теория тепло- и массообмена» по программе подготовки бакалавров по направлениям 16.03.01 - Техническая физика, 24.03.03 – Баллистика и гидроаэродинамика на физико-техническом факультете ТГУ.

УДК 519.63
ББК 22.37

Учебное пособие разработано при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 10.1329.2014/К.

Рецензенты:

Васенин И.М. – докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета;

Носков М.Д. – докт. физ.-мат. наук, профессор, заместитель руководителя по НР и МД СТИ НИЯУ МИФИ.

ISBN 978-5-93629-558-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии изложены основы расчета теплопередачи через слой вещества. Приведены решения задач по определению потоков тепла через слой вещества с различными условиями на границах слоя и различными свойствами вещества слоя. Рассмотрены случаи цилиндрических и сферических слоев.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Теплофизика – наука, изучающая процессы передачи и переноса тепла. Тепло связывается с некоторым уровнем температуры. Температура есть мера энергии движения частиц среды (молекулы, ионы, электроны). Каждая частица среды имеет свою энергию. В процессе взаимодействия друг с другом частицы среды обмениваются энергией.

В соответствии с гипотезой сплошной среды, мы будем рассматривать «макрообъемы» по отношению к межмолекулярным расстояниям, так как реальные объекты в природе, как правило, имеют размеры много больше межмолекулярных расстояний. С точки зрения теплофизики гипотеза сплошности применима, если в рассматриваемом объеме содержится много частиц вещества, такое количество, что $\sum_{i=1}^{N} E_i \frac{1}{N} = E$ для изотермических условий объема есть величина постоянная. Для малого количества частиц эта величина может изменяться, «прыгать» относительно некоторой средней величины, а с увеличением N – стабилизируется. При этом N частиц занимает малый объем.

Поэтому теплофизика оперирует понятиями физической точки с определенной температурой, где осредненная температура объема принимается за температуру точки.

Каким образом происходит передача тепла? Различают три основных вида передачи тепла: **Теплопроводность, конвекцию, тепловое излучение.**

Теплопроводностью или кондукцией называется молекулярный перенос теплоты в среде, обусловленный неоднородным распределением температуры.

Конвекцией называется перенос теплоты в среде с неоднородным распределением температуры, осуществляемый макроскопическими элементами среды при их перемещении.

Тепловое излучение – процесс распространения теплоты электромагнитными волнами. Этот вид передачи тепла обусловлен превращением внутренней энергии вещества в энергию излучения, переносом излучения и его поглощением.

Теплообмен, обусловленный совместным переносом теплоты посредством этих видов называется радиационно-конвективным, радиационно-кондуктивным.

Процесс теплообмена между теплоносителями, разделенными твердой стенкой, называется теплопередачей.

В природе и технике многие процессы теплообмена осложняются процессами массообмена, фазовыми переходами, химическими реакциями, тепловыделением.

Совокупность значений температуры в точках пространства называется полем температуры. В общем случае поле температуры есть функция координаты точки и времени, $T = f(x, y, z, t)$. Если T зависит от t, то поле температур не стационарно, если не зависит от t, то – стационарно. Если T зависит от x, y, z, то поле неоднородное. Если температурное поле неоднородное, то в силу законов термодинамики, энергия стремится распределиться таким образом, чтобы поле стало однородным. Второй закон термодинамики определяет направление этого переноса (из точек более прогретых к менее прогретым) – переход к термодинамическому равновесию. Законы термодинамики также способны указать направление процесса, конечное состояние.

2. УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

Основой для вывода уравнений распространения тепла в сплошной среде будет закон сохранения и превращения энергии. Для единицы объема движущейся среды имеем:

$$Q_v dt + L_v dt = \rho\left(dU + d\left(w^2/2\right)\right) \tag{2.1}$$

Здесь Q_v - количество тепла, втекающего в единицу объема среды в единицу времени, L_v - работа, совершаемая внешними силами над единицей объема среды за единицу времени, dU - внутренняя энергия единицы массы среды, w - скорость движения среды, dt - малый интервал времени. Уравнение (2.1) выражает то, что изменение полной энергии (внутренней + кинетической) единицы объема среды происходит за счет подвода тепла извне этого объема и работы внешних сил за время dt.

Выделим в рассматриваемой сплошной среде объем V, ограниченный поверхностью F. В общем случае объем V движется вместе со средой с некоторой скоростью $\vec{w}$. Уравнение теплового баланса объема, отнесенное к единице времени запишется в виде:

$$\int_V Q_v dV = -\int_F q dF + \int_V q_v dV \tag{2.2}$$

В левой части уравнения (2.2) стоит изменение теплосодержания рассматриваемого объема в единицу времени. В правой части первый член – количество тепла, ушедшее-пришедшее в объем V через поверхность F за единицу времени, второй член – количество тепла, выделенное внутренними источниками тепла за единицу времени. Внутренние источники тепла могут возникать, например, в следствии объемных химических реакций, прохождения электрического тока и выделения при этом Джоулева тепла, внутреннего трения слоев среды при неоднородном поле скорости движения среды, поглощения излучения для случая полупрозрачной среды, радиоактивного распада и т.д.

Перейдем в первом члене правой части от поверхностного интеграла к объемному по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_V Q_v dV = -\int_F q dF + \int_V q_v dV \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.2) получаем связь:

$$Q_v = -divq + q_v \tag{2.4}$$

Внутренняя энергия связана с энтальпией уравнением $U = i - \left(p/\rho \right)$, тогда $dU = di - d\left(p/\rho \right)$. Для совершенного газа $di = c_p dT$.

С учетом (2.4) уравнение (2.1) запишется в виде:

$$-divq + q_v + L_v = \rho \frac{d}{dt}\left(i - \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} \right) \tag{2.5}$$

$-div\left(q\right)$ - член, содержащий потоки тепла. Он имеет не нулевое значение при неоднородном температурном поле. q - связан с неоднородностью температурного поля и определяет величину теплового потока. В декартовой системе координат $div q = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$.

В середине 18 века М.В. Ломоносов, а затем в 1804 году французский ученый Био высказал гипотезу, согласно которой количество тепла, проходящее через любую изотермическую поверхность в направлении другой изотермической поверхности должно быть пропорционально времени, площади поверхности, разности температур и обратно пропорционально расстоянию между этими поверхностями:

$$Q \sim -\frac{\Delta T}{\Delta l} F \Delta t,$$

где Q - количество тепла, переданного через слой, толщины Δl, площадью F, за время Δt, при перепаде температур между изотермическими поверхностями ΔT. Знак «-» стоит перед выражением потому, что тепло переносится от поверхности с большей температурой к поверхности с меньшей температурой. Переходя к бесконечно малым элементам площади, Δl и Δt получим:

$$d^2 Q = -\lambda l_n \frac{\partial T}{\partial n} dF dt,$$

где λ - коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом теплопроводности*, или просто теплопроводностью, является теплофизической характеристикой вещества, l_n - единичный вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры.

Вводится обозначение $q = \frac{d^2 Q}{dF dt} = -\lambda l_n \frac{\partial T}{\partial n} = -\lambda \, grad\, T$, где q - количество тепла проходящего через единицу площади в единицу времени.

Формула

$$q = -\lambda \, grad\, T,$$

есть **закон Фурье**, определяет величину теплового потока. Она названа в честь французского ученого-математика Ж.Б. Фурье, много сделавшего в развитии методов решения уравнения теплопроводности.

Тепловой поток векторная величина. В декартовой системе координат она определяется в виде:

$$q = q_x i + q_y j + q_z k\,, \quad q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\,, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\,, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\,.$$

С учетом закона Фурье уравнение (5) запишется в виде:

$$\underset{(1)}{\rho \frac{d\left(i + w^2/2\right)}{dt}} = \underset{(2)}{-div\left(\lambda gradT\right)} + \underset{(3)}{q_v} + \underset{(4)}{L_v} + \underset{(5)}{\frac{dp}{dt}} - \underset{(6)}{\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}} \qquad (2.6)$$

Члены уравнения описывают следующие физические процессы, происходящие в сплошной среде:

(1) – изменение энтальпии и кинетической энергии,

(2) – перенос тепла за счет теплопроводности (кондукции),

(3) – внутренние источники тепловыделения,

(4) – работа внешних сил,

(5), (6) – учитывают изменение энергии среды при ее сжатии – расширении.

Здесь производная d/dt есть полная производная по времени. Если рассматривать процессы в среде относительно неподвижной инерциальной декартовой системы координат, то $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_z \frac{\partial}{\partial z}$, где w_x, w_y, w_z - проекции вектора скорости среды $\vec{w}$.

Уравнение (2.6), в соответствии с классификацией уравнений математической физики в частных производных второго порядка, параболического типа. Имеет решения при бесконечно большой скорости распространения возмущений.

Для решения задачи и теплопереносе в движущейся среде к уравнению (2.6) необходимо присоединить уравнения, определяющие поле скоростей (уравнения движения и неразрывности) и уравнение состояния среды. Дополнив получившуюся систему уравнений необходимыми краевыми условиями (начальными и граничными), можно найти нестационарное поле температуры среды, $T = T\left(x, y, z, t\right)$.

2.1. Частные случаи уравнения переноса тепла

Уравнение (2.6) является весьма сложным для решения. В некоторых практически интересных случаях уравнение (2.6) можно упростить, пренебрегая некоторыми членами этого уравнения.

При умеренных скоростях движения среды (жидкости, газа), когда работа внешних сил и кинетическая энергия малы по сравнению с ее энтальпией, можно пренебречь влиянием изменения давления и кинетической энергии. В этом случае уравнение примет вид:

$$\rho \frac{di}{dt} = div\left(\lambda gradT\right) + q_v \tag{2.7}$$

В случае, когда c_p и λ приняты постоянными величинами, их можно вынести из под оператора дифференцирования, уравнение (2.7) примет вид:

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta T + q_v \tag{2.8}$$

где Δ - оператор Лапласа.

Для неподвижной среды уравнение (2.8) принимает вид:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + q_v \tag{2.9}$$

В случае отсутствия внутренних источников уравнение (2.9) принимает вид:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \tag{2.10}$$

Для одномерного распространения тепла уравнение (2.10) принимает вид:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{2.11}$$

Если ввести коэффициент температуропроводности $a = \lambda / (c\rho)$, уравнение (2.10) принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T \tag{2.12}$$

Для стационарного процесса теплопроводности (2.10) принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T \quad (2.13)$$

Для решения уравнений (2.8)-(2.12) используются аналитические и численные методы.

2.2. О постановке краевых задач

В общем случае уравнение теплопроводности имеет множество решений. Для того, чтобы уравнение теплопроводности имело единственное решение, моделировало конкретную физическую ситуацию необходимо задание краевых условий. В качестве краевых условий для нестационарного уравнения теплопроводности, (2.10), задаются условия на границах рассматриваемого тела (граничные условия) и поле температур внутри тела в некоторый момент времени t_0, $T = T\left(x, y, z, t_0\right)$, (начальные условия). Обычно значение t_0 принимается за начало отсчета времени и задается равным нулю, $t_0 = 0$. Для стационарного уравнения теплопроводности (2.13) достаточно задать лишь граничные условия.

Граничные условия должны моделировать конкретные теплофизические условия на границах рассматриваемой области, или тела. В зависимости от рассматриваемых теплофизических условий на границе тела ставится граничное условие I, II, III, или IV рода.

Граничное условие I рода: задаются значения температуры на поверхности тела, в общем случае в виде функции от времени: $T(M,t) = f\left(M,t\right)$, в частном случае функция $f\left(M,t\right)$ может быть постоянной величиной, т.е. поддерживается постоянная температура на поверхности тела. (Здесь M - точка, принадлежащая поверхности тела.). Граничное условие I рода моделирует, например, теплообмен тела с нагревателем, находящимся в контакте с телом.

Граничное условие II рода: задаются значения теплового потока в каждой точке поверхности тела, в общем случае в виде функции времени: $\lambda \frac{\partial T(M,t)}{\partial n}\vec{l}_n = q\left(M,t\right)$, где $\vec{l}_n$ - вектор нормали к поверхности тела, $q\left(M,t\right)$ - величина теплового потока на поверхность тела в точке M, λ - коэффициент теплопроводности вещества тела. В частном случае функция $q(M,t)$ может быть постоянной величиной. Граничное условие II рода моделирует теплообмен излучением непрозрачных тел.

Граничное условие III рода: задается связь между температурой тела на его границе и теплового потока в тело: $\lambda \dfrac{\partial T(M,t)}{\partial n}\vec{l}_n = \alpha\left(T(M,t) - T_{OC}\right)$, где $\vec{l}_n$ - вектор нормали к поверхности тела, T_{OC} - температура окружающей среды, находящейся в контакте с телом, α - коэффициент теплообмена между окружающей средой и поверхностью тела.

В соответствии с законом сохранения энергии, поток тепла, приходящий из окружающей среды (пусть это будет жидкость) на границу тела, отводится в глубь тела.

В соответствии с законом Фурье можно записать:

$\lambda_l \dfrac{\partial T_l(M,t)}{\partial n}\vec{l}_n = \lambda \dfrac{\partial T(M,t)}{\partial n}\vec{l}$, λ_l - коэффициент теплопроводности жидкости.

При течении жидкости вдоль поверхности тела, вблизи тела в жидкости возникает слой жидкости некоторой толщины δ , имеющий меньшую скорость, чем остальная жидкость. Такой слой называется пограничный слой. Возникновение этого слоя обусловлено вязкостью жидкости и так называемым условием прилипания, когда частицы жидкости на поверхности тела имеют скорость равную нулю (или скорость тела). Внутри этого слоя происходит изменение температуры жидкости от величины T_{OC} до значения температуры на границе тела, $T(M,t)$. Если приближенно представить $\lambda_l \dfrac{\partial T_l(M,t)}{\partial n}\vec{l}_n = \lambda_l \dfrac{T(M,t) - T_{OC}}{\delta}\vec{l}_n = \alpha\left(T(M,t) - T_{OC}\right)$, то становиться очевидным, что $\alpha = \lambda_l / \delta$. Толщина пограничного слоя жидкости δ зависит от скорости движения жидкости, ее физических свойств. Поэтому коэффициент теплообмена α зависит от скорости движения жидкости, температуры, от времени при нестационарных условиях движения жидкости. В некоторых условиях величину α можно принимать постоянной величиной.

Таким образом, граничные условия III рода описывают конвективный теплообмен между телом и окружающей его средой (газом, жидкостью), имеющей температуру T_{OC}. Такое описание теплообмена называется теплообмен по закону Ньютона.

С помощью граничных условий III рода можно описать теплообмен излучением между двумя телами. По закону Стефана – Больцмана результирующий тепловой поток между двумя телами можно записать в виде:

$$q_{rez} = \sigma\left(T_1^4\left(M_1,t\right) - T_2^4\left(M_2,t\right)\right) =$$

$$= \sigma\left(T_1^2\left(M_1,t\right) + T_2^2\left(M_2,t\right)\right)\left(T_1\left(M_1,t\right) + T_2\left(M_2,t\right)\right)\left(T_1\left(M_1,t\right) - T_2\left(M_2,t\right)\right) =$$

$$= \alpha\left(T_1,T_2\right)\left(T_1\left(M_1,t\right) - T_2\left(M_2,t\right)\right)$$

Здесь коэффициент теплообмена будет функцией температуры поверхности тел.

$$\alpha\left(T_1,T_2\right) = \sigma\left(T_1^2\left(M_1,t\right) + T_2^2\left(M_2,t\right)\right)\left(T_1\left(M_1,t\right) + T_2\left(M_2,t\right)\right)$$

Граничное условие IV рода: задаются соотношения для тепловых потоков и температур на границе двух тел (или сред), находящихся в идеальном контакте:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(M,t)}{\partial n}\vec{l}_n = \lambda_2 \frac{\partial T_2(M,t)}{\partial n}\vec{l}_n,$$

$$T_1(M,t) = T_2(M,t),$$

где λ_1, λ_2 - коэффициенты теплопроводности первого и второго тела, $T_1(M,t)$, $T_2(M,t)$ - температуры первого и второго тела на границе их контакта.

Граничные условия IV рода моделируют идеальный тепловой контакт между плотно соприкасающимися телами, и имеют простой физический смысл: какое количество тепла подводится из глубины первого тела к его границе, такое же количество тепла отводится в глубь второго тела. Второе равенство следует из того, что двух значений температуры в одной точке пространства быть не может.

Если на границе двух тел происходит фазовый переход, то граничные условия необходимо записывать с учетом поглощения-выделения скрытой теплоты фазового перехода:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(M,t)}{\partial n}\vec{l}_n - \lambda_2 \frac{\partial T_2(M,t)}{\partial n}\vec{l}_n = \rho q \frac{\partial L}{\partial t},$$

(разность тепла, подведенного к поверхности фазового перехода и отведенного от нее, расходуется на фазовый переход)
Обознвчения: q - скрытая теплота фазового перехода, $\partial L / \partial t$ - скорость перемещения границы фазового перехода.

Математическая постановка задачи о переносе тепла состоит в записи уравнения переноса тепла с учетом принимаемых предположений математической модели, а также в записи необходимых начальных и граничных условий.

Корректно поставленную краевую задачу теплопроводности можно решить.

Методы решения задач теплопроводности можно условно разделить на несколько групп.

Для решения линейных задач:

I. 1) Метод разделения переменных. 2) Метод функций источников (Функций Грина). 3) Метод потенциалов.

II. Методы интегральных преобразований 1) в бесконечных пределах, 2) в конечных пределах.

Для решения нелинейных задач:

III. Вариационные методы.

IV. Методы линеаризации.

V. Проекционные методы.

VI. Численные методы.

2.3. О коэффициенте теплопроводности

Коэффициент теплопроводности λ в законе Фурье представляет собой коэффициент пропорциональности и имеет размерность $\text{Вт}/(\text{м} \times \text{K})$. Это теплофизическая характеристика вещества, которая характеризует способность тел проводить тепло. λ для веществ не является константой, а зависит от температуры, агрегатного состояния вещества, количества примесей, давления и т.п. λ для конкретных веществ не поддается теоретическому определению, определяется из эксперимента.

Теплопроводность металлов обычно высокая и определяется в основном диффузией свободных электронов, содержащихся в металлах. С увеличением температуры λ почти у всех металлов уменьшается. Сильно влияет на λ металлов наличие примесей. Для металлов характерный интервал изменения $\lambda = 2 - 450 \ \ \text{Вт}/(\text{м} \times \text{K})$.

Теплопроводность жидкостей изменяется в пределах $\lambda = 0{,}1 - 0{,}7$ Вт/(м×К) и с увеличением температуры уменьшается. У некоторых жидкостей с увеличением температуры увеличивается (вода, глицерин).

Теплопроводность газов изменяется в пределах $\lambda = 0{,}006 - 0{,}1$ Вт/(м×К) и с ростом температуры увеличивается. В молекулярно-кинетической теории газов получено выражение для коэффициента теплопроводности газов: $\lambda = \bar{v}\bar{l}c_v\rho/3$, где $\bar{v}$ - средняя скорость движения молекул, $\bar{l}$ - средняя длина свободного пробега молекул, ρ - плотность, c_v - удельная теплоемкость при постоянном объеме. С увеличением давления произведение $\bar{v}\rho$ остается практически постоянной величиной, поэтому теплопроводность газов слабо зависит от давления. Средняя скорость молекул зависит от температуры T: $\bar{v} = \sqrt{3RT/\mu}$, где R - универсальная газовая постоянная, μ молярная масса вещества. То есть $\lambda \sim T^{0,5}$. Из экспериментов установлена зависимость $\lambda = \lambda_0 \left(T/273\right)^{2/3}$. λ для смесей газов не подчиняется закону аддитивности, а определяется на основании опытных данных.

Для кристаллов и некоторых искусственных материалов, например, композитов, теплопроводность зависит от направления (анизотропия теплопроводности). Для таких материалов теплопроводность вещества представляет собой тензор второго ранга.

$$div\left(\Lambda gradT\right) = div\left(\begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{xy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} gradT\right) =$$

$$= div\left(\left(\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)i + \right.$$

$$+\left(\lambda_{yx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)j +$$

$$\left. +\left(\lambda_{zx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)k\right).$$

где i, j, k - орты декартовой системы координат.

Для анизотропных тел коэффициенты теплопроводности в различных направлениях удовлетворяют соотношениям Онзагера и является симметричным тензором: $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$, $\lambda_{xz} = \lambda_{zx}$, $\lambda_{yz} = \lambda_{zy}$.

Для ортотропных тел, тел, имеющих различную теплопроводность в трех взаимно перпендикулярных направлениях, тензор теплопроводности при соответствующем выборе направлений осей координат, имеет шаровой вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zz} \end{pmatrix}$$

Для большинства практических случаев λ можно принимать равной const, численно равной некоторой средней величине в рассматриваемом в задаче интервале температуры.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОПЕРЕНОСЕ ЧЕРЕЗ СЛОЙ ВЕЩЕСТВА

В этом разделе будут рассмотрены процессы переноса тепла в неподвижных средах. В таких средах единственным механизмом переноса тепла будет теплопроводность.

3.1. Теплопередача через плоскую пластинку

Рассмотрим теплопередачу через пластинку. Требуется определить величину теплового потока через пластинку толщины L, имеющей коэффициент теплопроводности λ, стенки которой имеют постоянную температуру T_0 и T_1. Математическая формулировка задачи состоит из стационарного одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями I рода:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0, \tag{3.1}$$

$$T(0) = T_0, \ T(L) = T_1 \tag{3.2}$$

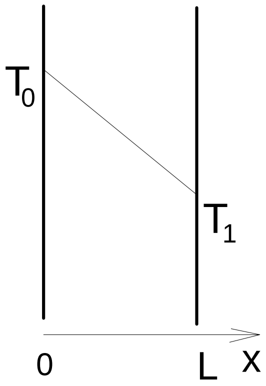

Рис. 3.1.

Задача (3.1)-(3.2) не имеет параметров среды и если ввести безразмерную температуру $u = \dfrac{T_0 - T}{T_0 - T_1}$ и координату $\xi = \dfrac{x}{L}$, то задача (3.1)-(3.2) запишется в виде:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = 0\,, \tag{3.3}$$

$$u(0) = 0\,,\ u(1) = 1\,. \tag{3.4}$$

Задача (3.3)-(3.4) представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка с краевыми условиями. Общее решение уравнения (3.3) $u(\xi) = C_1\xi + C_2$, где C_1 и C_2 - константы интегрирования. Из граничных условий (3.4) находим $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Решение задачи (3.3)-(3.4) $u(\xi) = \xi$. Возвращаясь к физическим переменным, получаем:

$$T(x) = T_0 - \left(T_0 - T_1\right)\frac{x}{L}\,. \tag{3.5}$$

Функция (3.5) представляет собой прямую линию. Распределение температуры внутри пластинки – линейное (рис. 3.1). Подсчитаем количество тепла, проходящее через единицу площади пластинки в направлении, перпендикулярном ей, в единицу времени. Согласно закону Фурье $q = -\lambda \dfrac{dT}{dx}$. Подставим в закон Фурье найденное распределение температуры (3.5), получим:

$$q = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} = \lambda \frac{T_0 - T_1}{L}\,. \tag{3.6}$$

Количество тепла, переносимое через единицу площади пластинки в единицу времени пропорционально разности температур $\left(T_0 - T_1\right)$ с коэффициентом пропорциональности $\alpha = \lambda/L$, который называется коэффициентом теплопередачи. Величина, обратная α, $1/\alpha = L/\lambda = R_T$ называется термическим сопротивлением, и введена ввиду аналогии между потоком тепла и электрическим током:

Для постоянного тока выполняется закон Ома: $U = RJ$, (U - напряжение, R - сопротивление, J - сила тока). Для потока тепла можно записать: $T_0 - T_1 = R_T q$. В связи с этой аналогией можно предположить, что термическое сопротивление составной пластины, состоящей из последовательно расположенных пластин, находящихся в идеальном контакте, будет определяться как сумма термических сопротивлений пластин. Эту гипотезу мы проверим при решении соответствующих задач.

3.2. Теплопередача через двухслойную плоскую пластинку

Найдем стационарное температурное поле и тепловой поток через двухслойную плоскую пластинку (рис. 3.2) для случая, когда стенки пластинки имеют постоянную температуру T_0 и T_1 . Стационарное поле температуры получим из решения стационарных уравнений теплопроводности в пластинках с соответствующими граничными условиями:

$$\frac{d^2 T_i}{dx^2} = 0 ,\ i = 1,\ 2 \tag{3.7}$$

$$T_1(0) = T_0 ,$$

$$\lambda_1 \frac{dT_1(L_1)}{dx} = \lambda_2 \frac{dT_2(L_1)}{dx} ,$$

$$T_1(L_1) = T_2(L_1) , \tag{3.8}$$

$$T_2(L_2) = T_1 .$$

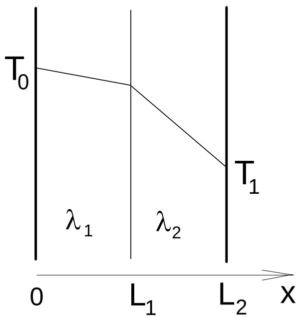

Рис. 3.2.

Уравнение теплопроводности (3.7) записано для обоих слоев двухслойной пластинки. На границе между слоями пластинки ставятся граничные условия IV рода.

Воспользуемся результатом решения задачи (3.1)-(3.2), в которой получено, что распределение температуры внутри пластинки носит линейный характер. Пусть на границе L_1 стационарная температура имеет значение T_b. Тогда распределение температуры в пластинках запишется в виде:

$$T_1(x) = T_0 - \left(T_0 - T_b\right)\frac{x}{L_1} ,\ T_2(x) = T_b - \left(T_b - T_1\right)\frac{x - L_1}{L_2 - L_1} . \tag{3.9}$$

Неизвестную величину T_b найдем, воспользовавшись условием равенства потоков тепла на границе слоев пластинки.

$\lambda_1 \dfrac{T_0 - T_b}{L_1} = \lambda_2 \dfrac{T_b - T_1}{L_2 - L_1}$, отсюда находим

$$T_b = \frac{(\lambda_1/L_1)T_0 + (\lambda_2/(L_2 - L_1))T_1}{(\lambda_1/L_1) + (\lambda_2/(L_2 - L_1))}.$$

Введя обозначения $h_1 = L_1$, $h_2 = L_2 - L_1$ - толщины слоев двухслойной пластинки и термические сопротивления слоев: $R_{T1} = h_1/\lambda_1$, $R_{T2} = h_2/\lambda_2$ запишем выражение для T_b в виде:

$$T_b = \frac{T_0 + T_1(R_{T1}/R_{T2})}{1 + (R_{T1}/R_{T2})}$$

Если $R_{T2} >> R_{T1}$ (возможно в случае, когда $\lambda_1 >> \lambda_2$ или $h_2 >> h_1$), то $T_b \to T_0$ и распределение температуры в двухслойной пластинке имеет вид, показанный на рисунке 3 а. Если $R_{T2} << R_{T1}$, то $T_b \to T_1$, и распределение температуры в двухслойной пластинке имеет вид, показанный на рисунке 3 б. Чем больше R_T, тем круче профиль температуры.

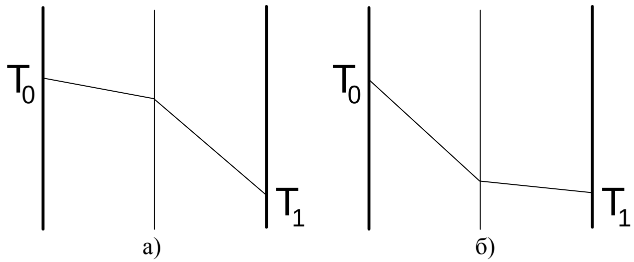

Рис. 3.3.

Подсчитаем тепловой поток через двухслойную пластинку. В стационарном случае величина теплового потока в любом сечении пластинки будет одинакова. Поэтому подсчитаем его подставив в закон Фурье выражение $T_1(x)$ (3.9).

$$q = -\lambda_1 \frac{dT_1(x)}{dx} = \frac{\lambda_1}{L_1}(T_0 - T_b) = \frac{T_0 - T_b}{R_{T1} + R_{T2}} = \frac{T_0 - T_b}{R_T}, \quad (3.10)$$

где $R_T = R_{T1} + R_{T2}$.

Из выражения (3.10) видно, что закон сложения термических сопротивлений выполняется.

3.3. Теплопередача через многослойную плоскую пластинку

Рассмотрим теплопередачу через многослойную пластинку. Пусть границы пластинки поддерживаются при заданных температурах T_0 и T_1 (рис. 3.4).

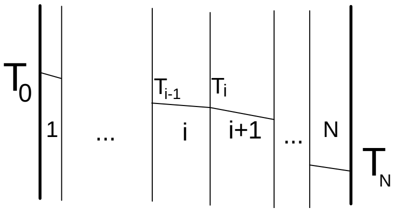

Рис. 3.4.

Воспользуемся тем фактом, что распределение температуры в каждом слое имеет линейный характер. Тогда для каждой пластинки имеем величину теплового потока:

$$q_i = \frac{\lambda_i}{h_i}\left(T_{i+1} - T_i\right). \qquad (3.11)$$

Тепловой поток через все пластинки одинаков (в стационарном случае), поэтому

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_i = q_{i+1} = \ldots = q_N = q .$$

Введем термическое сопротивление слоя пластинки $R_{Ti} = h_i / \lambda_i$ и запишем (3.11) в виде:

$$T_i - T_{i-1} = qR_{Ti} , \; i = 1,\ldots N . \qquad (3.12)$$

Просуммируем (3.12) по i :

$$\sum_{i=1}^{N}\left(T_i - T_{i-1}\right) = q\sum_{i=1}^{N} R_{Ti} , \qquad T_N - T_0 = q\sum_{i=1}^{N} R_{Ti} .$$

Из последнего выражения следует, что

$$q = \frac{T_N - T_0}{R_T} ,$$

где $R_T = \sum\limits_{i=1}^{N} R_{Ti}$.

Закон сложения термических сопротивлений для многослойной пластинки тоже выполняется. Эффективный коэффициент теплопередачи определиться из выражения: $\dfrac{1}{\alpha_{ef}} = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{\alpha_i}$.

3.4. Теплопередача пластинки с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры

В общем случае коэффициент теплопроводности не является постоянной величиной. Рассмотрим решение стационарной задачи о теплопереносе в плоской пластине, коэффициент теплопроводности которой зависит от температуры (является функцией температуры). В этом случае стационарное уравнение теплопроводности запишется в виде:

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda(T)\frac{dT}{dx}\right) = 0 , \tag{3.13}$$

$$T(0) = T_0 ,\ T(L) = T_1 . \tag{3.14}$$

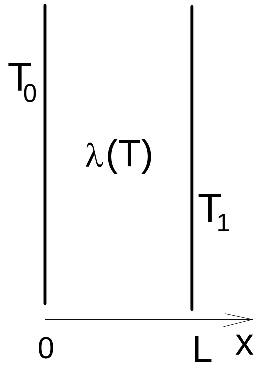

Рис. 3.5.

Для того, чтобы найти поток тепла через такую пластинку, нужно проинтегрировать уравнение (3.13) с граничными условиями (3.14) и полученный профиль температуры подставить в закон Фурье.

Интегрируя (3.13) один раз получаем:

$$\lambda(T)\frac{dT}{dx} = const = |q| . \tag{3.15}$$

Константа интегрирования имеет смысл модуля теплового потока.

Разделяем переменные в (3.15) и интегрируем второй раз в пределах пластинки, получим:

$$\int_{T_0}^{T_1} \lambda(T)\,dT = \int_0^L |q|\,dx , \tag{3.16}$$

$$|q| = \frac{1}{L}\int_{T_0}^{T_1} \lambda(T)\,dT . \tag{3.17}$$

Если $\lambda(T)$ - известная функция, то интеграл (3.15) возьмется в виде некоторого аналитического выражения, в результате определится величина теплового потока через пластинку.

Если ввести среднеинтегральное значение коэффициента теплопроводности в форме

$$<\lambda>=\frac{1}{T_0-T_1}\int_{T_0}^{T_1}\lambda(T)\,dT\,, \tag{3.18}$$

то величина теплового потока запишется в виде:

$$|q|=<\lambda>\frac{T_0-T_1}{L}\,,$$

а величина термического сопротивления определится в виде: $R_T=L/<\lambda>$.

Профиль температуры внутри пластинки можно определить, если интегрирование (3.16) проводить до текущей координаты x, и соответствующего $T(x)$:

$$\int_{T_0}^{T(x)}\lambda(T)\,dT=\int_0^x|q|\,dx\,,\quad \int_{T_0}^{T(x)}\lambda(T)\,dT=|q|\,x\,. \tag{3.19}$$

После интегрирования в левой части выражения (3.19) будет стоять выражение в виде функции $T(x)$: $F\left(T(x)\right)=|q|\,x$, из которого можно выразить $T(x)$.

Если $\lambda(T)$ задана в виде сложной функции, и аналитическое выражение для интеграла (3.19) не находится, то ее можно разложить в ряд Тейлора вблизи T_0:

$$\lambda(T)=\lambda(T_0)+\frac{d\lambda(T_0)}{dT}(T-T_0)+\frac{d^2\lambda(T_0)}{dT^2}\frac{(T-T_0)^2}{2}+\ldots$$

Ограничиваясь двумя членами ряда, $\lambda(T)$ запишется в виде:

$$\lambda(T)=\lambda(T_0)\left(1+\beta(T-T_0)\right), \tag{3.20}$$

где $\beta=\dfrac{1}{\lambda(T_0)}\dfrac{d\lambda(T_0)}{dT}$ - коэффициент чувствительности λ к температуре.

В этом случае среднеинтегральное значение $\lambda(T)$ определиться из выражения (3.18) в виде:

$$<\lambda>=\lambda(T_0)\left[1+\beta(T_1-T_0)/2\right]=\lambda\left((T_0+T_1)/2\right)$$

Величина теплового потока найдется в виде:

$$|q| = \lambda\left(\left(T_0 + T_1\right)/2\right)\frac{T_0 - T_1}{L} = \lambda\left(T_0\right)\left[1 + \beta\left(T_1 - T_0\right)/2\right]\frac{T_0 - T_1}{L}\,. \qquad (3.21)$$

Найдем профиль температуры внутри пластинки. Проводя интегрирование (3.19) с $\lambda\left(T\right)$ в виде (3.21) и $|q|$ в виде (3.21), получим:

$$\lambda\left(\left(T_0 + T_1\right)/2\right)\frac{T_0 - T_1}{L}x =$$

$$= \lambda\left(T_0\right)\left[T(x) - T_0 + \beta\left(\left(T_1^2 - T_0^2\right)\Big/2 - T_0\left(T(x) - T_0\right)\right)\right],$$

или:

$$x = \frac{\lambda\left(T_0\right)}{\lambda\left(\left(T_0 + T_1\right)/2\right)}\frac{L}{T_0 - T_1}\left[T(x) - T_0 + \beta\left(\left(T_1^2 - T_0^2\right)\Big/2 - T_0\left(T(x) - T_0\right)\right)\right]. \qquad (3.22)$$

При $\beta = 0$ (3.22) превращается в (3.5).

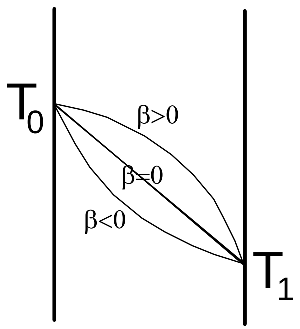

Рис. 3.6.

Построим зависимость (3.22). Пусть $T_0 > T(x) > T_1$, как это представлено на рисунке. При $\beta > 0$ кривая $T(x)$ будет выпуклая, при $\beta < 0$ - вогнутая, при $\beta = 0$ - прямая линия (рис. 3.6).

При $\beta > 0$ в соответствии с (3.20) λ уменьшается с уменьшением T, то есть термическое сопротивление увеличивается, а в соответствии со свойством, выявленным вп. 3.2, чем больше R_T, тем круче профиль температуры. При $\beta < 0$ λ увеличивается с уменьшением T и, соответственно, термическое сопротивление уменьшается.

3.5. Теплопередача пластинки с коэффициентом теплопроводности, зависящим от координаты

В некоторых случаях коэффициент теплопроводности может зависеть от координаты. Зависимость коэффициента теплопроводности от координаты возможна, когда тело состоит из неоднородного материала, например, изготовлено путем прессования из смеси порошков, с неоднородной концентрацией компонентов по длине образца.

Рассмотрим процесс теплопередачи через пластинку, коэффициент теплопроводности которой зависит от координаты (рис. 3.7). Перенос тепла через пластинку с переменной теплопроводностью описывается уравнением:

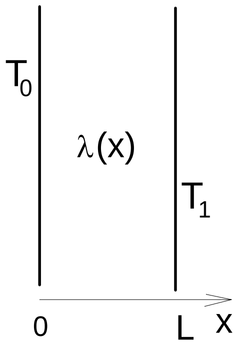

Рис. 3.7.

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{dT}{dx}\right)=0\,, \tag{3.23}$$

$$T(0)=T_0\,, \qquad T(L)=T_1\,. \tag{3.24}$$

Интегрируя (3.23) один раз получаем:

$$\lambda(x)\frac{dT}{dx}=const=|q|\,. \tag{3.25}$$

Разделяем переменные в (3.25) и интегрируем второй раз в пределах пластинки:

$$\int_{T_0}^{T_1}dT=|q|\int_0^L\frac{dx}{\lambda(x)}\,.$$

Величина теплового потока найдется по формуле:

$$|q|=\frac{T_1-T_0}{\int_0^L\frac{dx}{\lambda(x)}} \tag{3.26}$$

Для определения распределения температуры внутри пластинки проведем интегрирование (3.25) до текущей координаты x, и соответствующего $T(x)$, получим:

$$T(x)-T_0=|q|\int_0^x\frac{dx}{\lambda(x)}\,,$$

где $|q|$ определяется выражением (3.26).

Допустим, что зависимость коэффициента теплопроводности от координаты аппроксимирована линейной функцией $\lambda(x)=\lambda_0(1+kx)$. Тогда

$$\int_0^L \frac{dx}{\lambda(x)} = \frac{1}{\lambda_0 k}\ln(1+kL),\ \int_0^x \frac{dx}{\lambda(x)} = \frac{1}{\lambda_0 k}\ln(1+kx),$$

$$|q| = \lambda_0 k \frac{T_1 - T_0}{\ln(1+kL)},$$

$$T(x) - T_0 = (T_1 - T_0)\frac{\ln(1+kx)}{\ln(1+kL)}. \qquad (3.27)$$

Выражение (3.27) дает распределение температуры внутри пластинки, выражение (3.26) определяет величину теплового потока через пластинку.

3.6. Теплопередача через сферические и цилиндрические слои

Запишем уравнение стационарной теплопроводности для цилиндрического и сферического слоев. В случае центральной симметрии оно имеет вид:

$$\frac{1}{r^n}\frac{d}{dr}\left(\lambda r^n \frac{dT}{dr}\right) = 0. \qquad (3.28)$$

При $n=1$ уравнение (3.28) описывает перенос тепла через цилиндрический слой, при $n=2$ - сферический, при $n=0$ - плоский.

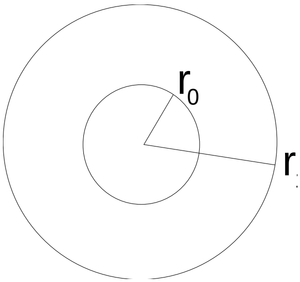

Рис. 3.8.

Рассмотрим цилиндрический слой (рис. 3.8). Пусть имеется труба круглого поперечного сечения, температура стенок которой r_0 и r_1 поддерживается при температурах T_0 и T_1. Математическая постановка задачи при $\lambda = const$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0,$$
$$T(r_0) = T_0,\ T(r_1) = T_1.$$

Общее решение уравнения (3.29) $T(r) = C_1 \ln(r) + C_2$. Константы C_1 и C_2 найдем из граничных условий (3.29), и получим:

$$T(r) = \frac{T_0 - T_1}{\ln(r_0/r_1)}\ln(r/r_0) + T_0. \qquad (3.30)$$

В случае цилиндрической симметрии зависимость температуры от координаты в слое имеет логарифмический вид.

Тепловой поток через цилиндрический слой подсчитаем на единицу длины трубы:

$$q = -2\pi r\lambda \frac{dT(r)}{dr} = \frac{T_0 - T_1}{\ln\left(r_1/r_0\right)/2\pi\lambda} = \frac{T_0 - T_1}{R_T} .$$

$R_T = \ln\left(r_1/r_0\right)/2\pi\lambda$ - термическое сопротивление единицы длины цилиндрического слоя.

Рассмотрим предельный случай. В пределе, при $\left(r_1 - r_0\right)/r_1 << 1$ радиус кривизны на теплоперенос сказываться не будет, и термическое сопротивление будет стремиться к его значению для плоского случая, помноженному на периметр трубы $2\pi r_1$: $R_T = \left(r_1 - r_0\right)/\lambda \cdot 2\pi r_1$.

Действительно, представим $\frac{r_1}{r_0} = \frac{\left(r_1 - r_0\right)}{r_0} + 1 = 1 + Z$, тогда величина Z мала и для нее выполняется разложение

$$\ln\left(r_1/r_0\right) = \ln(1+Z) = Z - Z^2/2 + \dots .$$

Ограничиваясь двумя членами ряда, получаем: $\ln\left(r_1/r_0\right) = \frac{r_1 - r_0}{r_1}\left(1 - \frac{r_1 - r_0}{2r_1}\right) \approx \frac{r_1 - r_0}{r_1}$, и $R_T = \frac{r_1 - r_0}{r_1 2\pi\lambda}$ термическое сопротивление на единицу длины трубы, у которой $\left(r_1 - r_0\right)/r_1 << 1$. Тогда на единицу площади боковой поверхности трубы термическое сопротивление будет: $R_T = \frac{r_1 - r_0}{r_1 2\pi\lambda} \cdot 2\pi r_1 = \frac{r_1 - r_0}{\lambda}$, как для плоского случая.

Рассмотрим сферический слой. Пусть имеется шаровой слой, температура стенок которого r_0 и r_1 поддерживается при температурах T_0 и T_1. Математическая постановка задачи при $\lambda = const$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0 . \qquad T(r_0) = T_0 , \qquad T(r_1) = T_1 \qquad (3.31)$$

Общее решение уравнения (3.31) $T(r) = C_1/r + C_2$. Константы C_1 и C_2 найдем из граничных условий (3.31):

$$C_1 = \frac{r_0 r_1 \left(T_0 - T_1\right)}{r_1 - r_0},\ C_2 = T_0 - \frac{r_1 \left(T_0 - T_1\right)}{r_1 - r_0},$$

$$T(r) = T_0 - \left(T_0 - T_1\right)\frac{r_1}{r_1 - r_0}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right).$$

Видно, что распределение температуры в сферическом слое пропорционально $1/r$.

Тепловой поток через шаровой слой определяется из закона Фурье. С учетом площади поверхности шарового слоя получим:

$$q = -4\pi r^2 \lambda \frac{dT(r)}{dr} = \frac{T_0 - T_1}{\left(r_0 - r_1\right)/2\pi\lambda r_0 r_1} = \frac{T_0 - T_1}{R_T},$$

где $R_T = \left(r_0 - r_1\right)/\left(2\pi\lambda r_0 r_1\right)$ - общее термическое сопротивление шарового слоя.

3.7. Теплообмен шара с окружающей средой

Пусть шар радиуса r_0 с температурой T_1 и с бесконечно большой теплоемкостью помещен в неограниченную среду с температурой T_0. В виду большой теплоемкости температура шара не меняется. С течением времени в окружающей среде установится стационарное распределение температуры, которое определяется решением задачи:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0, \tag{3.32}$$

$$T(r_0) = T_1,\ T(\infty) = T_0. \tag{3.33}$$

Решение (3.32)-(3.33) записывается в виде:

$$T(r) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{r} r_0. \tag{3.34}$$

Определим количество тепла, отдаваемое шаром в окружающую среду в единицу времени:

$$Q = -4\pi r_0^2 \lambda \frac{dT}{dr} = 4\pi r_0^2 \lambda \frac{T_1 - T_0}{r_0}. \tag{3.35}$$

С единицы площади поверхности шара в окружающую среду секундный поток тепла равен:

$$q=-\lambda\frac{dT}{dr}=\lambda\frac{T_1-T_0}{r_0}\,. \qquad (3.36)$$

Записывая величину теплоотдачи в виде закона Ньютона

$$q=\alpha\left(T_1-T_0\right), \qquad (3.37)$$

из сравнения (3.36) и (3.37) найдем $\alpha=\dfrac{\lambda}{r_0}$.

Полученное выражение перепишем в виде:

$$\frac{\alpha r_0}{\lambda}=1\,.$$

В левой части выражения стоит безразмерный комплекс, который был назван числом Нуссельта, $Nu=\dfrac{\alpha r_0}{\lambda}$.

4. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ОБЪЕМЕ ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

4.1. Температурное поле при наличии источников тепла в симметричном объеме

Пусть имеется объем сплошной среды, тело, обладающее симметрией (плоской, цилиндрической или сферической) и внутри него действуют объемные источники тепла. Причинами, вызывающими тепловыделение может быть электрический ток, химические реакции или какие либо другие. Будем предполагать, что интенсивность источников тепловыделения постоянная величина. Стационарное температурное поле в таком теле описывается уравнением:

$$\frac{1}{r^n}\frac{d}{dr}\left(r^n\frac{dT}{dr}\right)+\frac{q_v}{\lambda}=0\,. \qquad (4.1)$$

При $n=1$ уравнение (4.1) описывает температурное поле в цилиндрическом объеме, при $n=2$ - сферическом, при $n=0$ - плоском. Рассмотрим случай, когда температура на внешней границе тела поддерживается постоянной. Тогда граничные условия для уравнения (4.1) запишутся в виде:

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0}=0\,,\ T(r_0)=T_0\,. \qquad (4.2)$$

Мы совмещаем начало оси координат с осью симметрии тела. Первое граничное условие в (4.2) есть условие симметрии поля температуры.

Интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение (4.1) с граничными условиями (4.2) получаем:

$$T(r) = T_0 + \frac{q_v r_0^2}{2\lambda(n+1)}\left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right). \qquad (4.3)$$

Как видно из решения (4.3) профиль температуры является квадратичной функцией расстояния от центра симметрии, причем независимо от того, является тело цилиндром, сферой или плоским слоем. Максимум температуры образуется в центре симметрии и численно равен:

$$T_m = T_0 + \frac{q_v r_0^2}{2\lambda(n+1)}. \qquad (4.4)$$

Поток тепла из тела:

$$q = -\lambda \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_0} = \frac{q_v r_0}{(n+1)}. \qquad (4.5)$$

Выражение (4.5) дает возможность определить коэффициент теплоотдачи из тела в окружающую среду. Свяжем величину теплового потока из тела с разностью температур $(T_m - T_0)$:

$$q = -\lambda \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_0} = \alpha(T_m - T_0),$$

тогда выполняется равенство:

$$\frac{q_v r_0}{(n+1)} = \alpha(T_m - T_0).$$

После подстановки (4.4) получим:

$$\frac{q_v r_0}{(n+1)} = \alpha \frac{q_v r_0^2}{2\lambda(n+1)} \text{ и } \alpha = \frac{2\lambda}{r_0}.$$

Видно, что коэффициент теплоотдачи не зависит от интенсивности источника и от температуры.

Термическое сопротивление симметричного слоя с источниками тепла $R_T = 1/\alpha = r_0/2\lambda$, как видно, в два раза меньше термического сопротивления слоя толщины L (см. п. 3.1). Если представить плоский слой с источником как два полуслоя, по которым в обе стороны идет поток тепла, то это аналогично параллельному соединению электрических проводников, в котором общее сопротивление определяется по формуле $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Для термических сопротивлений: $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_{T1}} + \frac{1}{R_{T2}}$, при равенстве $R_{T1} = R_{T2}$ получаем $R_T = R_{T1}/2$. Так как $R_{T1} = r_0/\lambda$, то $R_T = r_0/2\lambda$.

Рассмотрим задачу для плоской пластинки с несимметричными граничными условиями: Пусть имеется плоское тело толщины L, в котором равномерно распределены постоянные источники тепла, а температура стенок поддерживается при температурах T_0 и T_1. Стационарное поле температур в слое описывается уравнением

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0, \qquad (4.6)$$

с граничными условиями

$$T(0) = T_0, \; T(L) = T_1. \qquad (4.7)$$

Общее решение уравнения (4.6) имеет вид $T(x) = -\frac{q_v}{\lambda}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$. Определяя константы интегрирования из (4.7) получим:

$$T(x) = -\frac{q_v}{\lambda}\frac{x^2}{2} + \frac{q_v}{\lambda}\frac{L^2}{2}\frac{x}{L} + \frac{(T_1 - T_0)}{L}x + T_0. \qquad (4.8)$$

Из решения видно, что чем больше q_v, тем сильнее решение отклоняется от прямой линии.

Исследуем положение максимума температуры и величины тепловых потоков на границах $x = 0$ и $x = L$. Беря производную выражения (4.8) и приравнивая ее к нулю, получаем $x_m = \frac{L}{2} - \frac{(T_0 - T_1)\lambda}{Lq_v}$. Максимум функции (4.8) будет находиться в интервале $x \in [0,\ L]$ при выполнении условия $q_v > \frac{(T_0 - T_1)2\lambda}{L^2}$, и граница $x = 0$ из источника тепла для слоя становится стоком тепла, образующегося внутри пластинки от источников. Величина максимума температуры определяется выражением:

$$T_m = -\frac{q_v}{\lambda}\frac{x_m^2}{2} + \frac{q_v}{\lambda}\frac{L^2}{2}\frac{x_m}{L} + \frac{\left(T_1 - T_0\right)}{L}x_m + T_0 .$$

Величины тепловых потоков на границах определяются выражениями:

$$q\left(0\right) = -\lambda\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{T_0 - T_1}{L} - \frac{q_v L}{2\lambda} ,$$

$$q\left(L\right) = -\lambda\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L} = \frac{T_0 - T_1}{L} + \frac{q_v L}{2\lambda} .$$

4.2. Теплообмен слоя с источниками тепла, ограниченного двумя стенками

Рассмотрим слой толщиной $2L$, ограниченный с двух сторон стенками с одинаковыми теплофизическими характеристиками и толщиной. В слое идет тепловыделение с интенсивностью q_v. Температура стенок на границах с окружающей средой поддерживается постоянной и равной T_0. Требуется определить стационарное поле температур внутри составной системы пластин и тепловые потоки на границах (рис. 4.1.). В силу симметрии можно рассматривать только половину слоя.

Математическая постановка задачи:

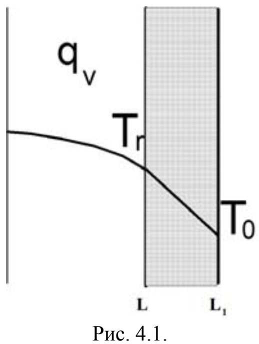

Рис. 4.1.

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 , \tag{4.9}$$

$$\frac{d^2T_1}{dx^2} = 0 , \tag{4.10}$$

$$\frac{dT}{dr}\bigg|_{r=0} = 0 ,$$

$$\lambda\frac{dT(L_-)}{dx} = \lambda_1\frac{dT_1(L_+)}{dx} , \tag{4.11}$$

$$T(L_-) = T_1(L_+), T_1(L_1) = T_0 .$$

Записав общие решения уравнений (4.9), (4.10), четыре константы интегрирования найдутся из граничных условий (4.11). Однако можно воспользоваться решениями предыдущих задач и получить то же решение без громоздких выкладок. Обозначим неизвестную температуру на границе между слоем и стенкой T_b. Тогда распределение температуры в слое определяется выражением (4.3):

$$T(x) = T_b + \frac{q_v L^2}{2\lambda}\left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right). \tag{4.12}$$

распределение температуры в стенке определится выражением (3.5):

$$T_1(x) = T_b - \left(T_b - T_0\right)\frac{x - L}{L_1 - L}. \tag{4.13}$$

Используя условие равенства тепловых потоков на границе между слоем и стенкой найдем выражение для T_b:

$$T_b = T_0 + \frac{q_v L h_1}{\lambda_1}. \tag{4.14}$$

где $h_1 = L_1 - L$.

Подставляя (4.14) в (4.13) и (4.12) получаем распределения температуры в слое и стенке.

Максимальное значение температуры в середине слоя имеет величину $T_m = T_b + \dfrac{q_v L^2}{2\lambda}$. Выразим отсюда $q_v L$ и подставим в (4.14):

$$T_b = T_0 + \frac{h_1}{\lambda_1}\frac{2\lambda}{L}\left(T_m - T_b\right),$$

$$T_b = \frac{T_0 + T_m \dfrac{h_1}{\lambda_1}\dfrac{2\lambda}{L}}{1 + \dfrac{h_1}{\lambda_1}\dfrac{2\lambda}{L}} = \frac{T_0 + T_m R_W / R_T}{1 + R_W / R_T},$$

где $R_W = h_1/\lambda_1$ - термическое сопротивление стенки, $R_T = L/2\lambda$ - термическое сопротивление слоя.

Если $R_W << R_T$, то $T_b \to T_0$, если $R_W >> R_T$, то $T_{\square} \to T_m$ (рис. 4.2).

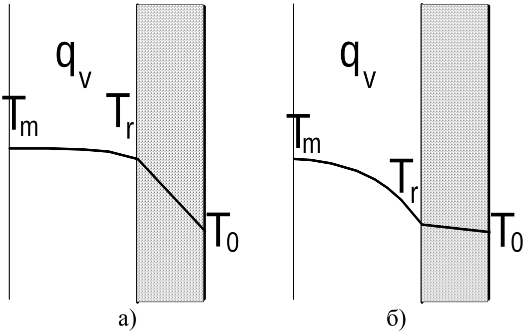

Рис. 4.2.

Определим величину теплового потока из составного тела.

$$q(L_1) = -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L_1} = \frac{\lambda_1}{h_1}(T_b - T_0) = q_v L \,. \qquad (4.15)$$

Это равенство выражает то обстоятельство, что все тепло, которое выделилось в слое за счет действия источников тепла, отводится через стенку в окружающую среду.

Определим эффективный коэффициент теплоотдачи. По определению $q = \alpha_{ef}(T_m - T_0)$. Приравнивая это выражение к (4.15) с учетом выражения для T_m получим:

$$\alpha_{ef}\left(T_b + \frac{q_v L^2}{2\lambda} - T_0\right) = \frac{\lambda_1}{h_1}(T_b - T_0)\,,$$

$$\alpha_{ef}(T_b - T_0) - \frac{\lambda_1}{h_1}(T_b - T_0) = -\alpha_{ef}\frac{q_v L^2}{2\lambda} = -\alpha_{ef}\frac{L}{2\lambda}\frac{\lambda_1}{h_1}(T_b - T_0)\,.$$

Из последнего выражения получаем: $\alpha_{ef} = \dfrac{1}{L/2\lambda + h_1/\lambda_1}$. Если обозначить $R_{ef} = 1/\alpha_{ef}$, то получим: $R_{ef} = R_T + R_W$, то есть закон сложения термических сопротивлений тоже выполняется.

Рассмотрим слой толщиной L, ограниченный с двух сторон стенками с различными теплофизическими характеристиками и толщиной (рис. 4.3). В слое идет тепловыделение с интенсивностью q_v. Температура стенок на границах с окружающей средой поддерживается постоянной и

равной T_0. Требуется определить стационарное поле температур внутри составной системы пластин и тепловые потоки на границах.
Математическая постановка задачи:

В слое с тепловыделением стационарное уравнение теплопроводности запишем в виде:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 . \tag{4.16}$$

В первой и второй пластинках уравнение теплопроводности запишем в виде:

$$\frac{d^2T_1}{dx^2} = 0 ,\ \frac{d^2T_2}{dx^2} = 0 . \tag{4.17}$$

С граничными условиями I рода на границах с окружающей средой и IV рода между стенками и слоем:

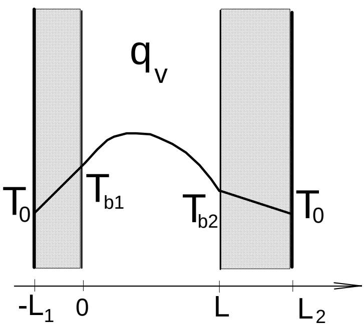

Рис. 4.3.

$$T_1(-L_1) = T_0 ,$$

$$\lambda_1 \frac{dT_1(0_-)}{dx} = \lambda \frac{dT(0_+)}{dx} ,$$

$$T_1(0_-) = T(0_+) , \tag{4.18}$$

$$\lambda \frac{dT(L_-)}{dx} = \lambda_2 \frac{dT_2(L_+)}{dx} ,$$

$$T(L_-) = T_2(L_+) , \tag{4.19}$$

$$T_2(L_2) = T_0 .$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся подходом, изложенным выше. Обозначим неизвестную температуру на границах между слоем и стенками $T(0) = T_{b1}$ и $T(L) = T_{b2}$. Запишем общее решение уравнения (4.16).

$$T(x) = -\frac{q_v}{\lambda}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 . \tag{4.20}$$

Воспользуемся тем обстоятельством, что в стенках распределение температуры линейное:

$$T_1(x) = T_{b1} + \left(T_{b1} - T_0\right)\frac{x}{L_1} , \tag{4.21}$$

$$T_2(x) = T_{b2} - \left(T_{b2} - T_0\right)\frac{x - L}{L_2 - L}\,. \qquad (4.22)$$

Из условий равенства потоков тепла на границах слоя и стенок запишем:

$$\lambda_1 \frac{dT_1(0)}{dx} = \frac{\lambda_1}{L_1}\left(T_{b1} - T_0\right) = \lambda \frac{dT(0)}{dx}\,,$$

$$\lambda_2 \frac{dT_2(L)}{dx} = \frac{\lambda_2}{L_2 - L}\left(T_0 - T_{b1}\right) = \lambda \frac{dT(L)}{dx}\,.$$

Перепишем последние равенства в форме:

$$\frac{dT(0)}{dx} = B_1\left(T_{b1} - T_0\right),\ B_1 = \frac{\lambda_1}{L_1\lambda}\,, \qquad (4.23)$$

$$\frac{dT(L)}{dx} = B_2\left(T_0 - T_{b2}\right),\ B_2 = \frac{\lambda_2}{\left(L_2 - L\right)\lambda}\,. \qquad (4.24)$$

После введения такой замены вместо задачи (4.16)-(4.19) мы будем решать задачу (4.16), (4.23)-(4.24), которая представляет собой дифференциальное уравнений второго порядка с граничными условиями третьего рода.

Значения $T_{b1} = C_2$, $T_{b2} = -\frac{q_v}{\lambda}\frac{L^2}{2} + C_1 L + C_2$ и выражение (4.20) подставляем в (4.23) и (4.24), и из полученной системы уравнений находим неизвестные константы C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = B_1\left(C_2 - T_0\right) \\ \dfrac{q_v}{\lambda}L + C_1 = B_1\left(\dfrac{q_v}{2}L^2 + C_1 L + C_2\right) \end{cases}.$$

$$C_2 = \frac{B_2 q_v L^2/2\lambda - q_v L/\lambda - B_2 B_1 L T_0 + B_1 T_0}{B_1 - B_1 B_2 L - B_2}\,,$$

$$C_1 = B_1\left(C_2 - T_0\right). \qquad (4.25)$$

Таким образом, профиль температуры в слое описывается функцией (4.20) с константами (4.25).

Рассмотрим теперь задачу о стационарной теплоотдаче пластинки, в которой идет тепловыделение с интенсивностью q_v. Окружающая среда

– газ или жидкость с температурой T_0. На границах пластинки идет теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона с коэффициентами теплообмена α_1 на левой границе и α_2 на правой. Теплообмен по закону Ньютона описывается граничными условиями III рода. Требуется определить стационарное поле температур внутри пластинки.

Математическая постановка задачи:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 . \tag{4.26}$$

$$\lambda \frac{dT(0)}{dx} = \alpha_1 \left(T(0) - T_0 \right), \ \lambda \frac{dT(L)}{dx} = -\alpha_2 \left(T(L) - T_0 \right). \tag{4.27}$$

После введения обозначения $B_1 = \dfrac{\alpha_1}{\lambda}$, $B_2 = \dfrac{\alpha_2}{\lambda}$ граничные условия запишутся в виде:

$$\frac{dT(0)}{dx} = B_1 \left(T(0) - T_0 \right), \ \frac{dT(L)}{dx} = B_2 \left(T_0 - T(L) \right). \tag{4.28}$$

И задача (4.26), (4.28) стала эквивалентна задаче (4.16)-(4.19) (с учетом преобразования (4.23), (4.24)). В задаче, описываемой уравнениями (4.26), (4.28), стенки создают термическое сопротивление $R_{T1} = L_1/\lambda_1$ и $R_{T2} = (L_2 - L)/\lambda_2$. В задаче (4.26), (4.28) термические сопротивления $R_{T1} = 1/\alpha_1$ и $R_{T1} = 1/\alpha_2$ создает окружающая среда. То есть теплообмен пластинки с окружающей жидкостью или газом мы можем представить как ее теплообмен через слои жидкости некоторой толщины справа и слева от пластинки, в которых температура линейно падает от температуры на границе слоя до температуры окружающей среды T_0.

Рассмотрим задачу с граничными условиями третьего рода. Имеется слой вещества с постоянными источниками тепловыделения интенсивности q_v. На левой границе слоя поддерживается температура T_0, на правой границе происходит теплообмен по закону Ньютона. Математическая постановка задачи:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 . \tag{4.29}$$

$$T(0) = T_0 , \ \lambda \frac{dT(L)}{dx} = -\alpha \left(T(L) - T_0 \right). \tag{4.30}$$

Введем безразмерные переменные: $\xi = \frac{x}{L}$ - безразмерная координата, $\theta = \frac{T - T_0}{q_v L^2 / (2\lambda)}$, - безразмерная температура, $Bi = \frac{\alpha L}{\lambda}$ - число Био. Тогда задача (4.29)-(4.30) после тождественных преобразований перепишется в виде:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + 2 = 0 . \qquad (4.29)$$

$$\theta(0) = 0 , \ \frac{d\theta(1)}{d\xi} = -Bi\theta(1) . \qquad (4.30)$$

Безразмерные переменные и параметры вводятся для уменьшения параметров задачи. После введения безразмерных переменных вместо пяти величин q_v, λ, α, T_0, L в задаче (4.9)-(4.30) в задаче (4.29)-(4.30) появляется лишь один параметр - Bi. Как видно из определения числа Био $Bi = \frac{\alpha L}{\lambda}$, оно имеет смысл отношения величин термического сопротивлений слоя $R_T = L/\lambda$ к термическому сопротивлению окружающей среды. $R_{TC} = 1/\alpha$, $Bi = R_T / R_{TC}$.

Общее решение задачи: $\theta(\xi) = -\xi^2 + C_1\xi + C_2$. Находя константы интегрирования из граничных условий, получим:

$$\theta(\xi) = -\xi^2 + \frac{Bi + 2}{Bi + 1}\xi . \qquad (4.31)$$

Максимум температуры определим, приравнивая производную функции (4.31) к нулю, и подставляя найденную координату максимума в (4.31):

$$\xi_m = \frac{1}{2}\frac{Bi + 2}{Bi + 1} , \ \theta_m = \xi_m^2 . \qquad (4.32)$$

Тогда $\theta(\xi)$ можно записать в виде: $\theta(\xi) = 2\xi_m\xi - \xi^2$.

Возможны два предельных случая:

1) $Bi = \infty$, $\xi_m = 1/2$, $\theta_m = 1/4$ - соответствует бесконечно большой теплоотдаче в окружающую среду. В этом случае граничное условие

третьего рода (4.30) переходит в граничное условие первого рода, $\theta(L) = 0$.

2) $Bi = 0$, $\xi_m = 1$, $\theta_m = 1/2$ - соответствует теплоизолированной границе слоя. В этом случае граничное условие третьего рода (4.30) переходит в однородное граничное условие второго рода, $d\theta(L)/d\xi = 0$.

Определим тепловой поток из слоя в окружающую среду. Проинтегрируем уравнение (4.29) по ξ в пределах $[0, 1]$, получим:

$$\theta'(0) - \theta'(1) = \left|\theta'(0)\right| + \left|\theta'(1)\right| = 2 .$$

Эффективный коэффициент теплоотдачи найдется из равенства:

$$\left|\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}\right| + \left|\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}\right| = \alpha_{ef}\left(T_m - T_0\right).$$

В безразмерных переменных

$$\frac{\alpha_{ef} L}{\lambda} = \frac{\left|\theta'(0)\right| + \left|\theta'(1)\right|}{\theta_m} = \frac{2}{\xi_m^2} = \frac{8\left(Bi+1\right)^2}{\left(Bi+2\right)^2} .$$

Эффективный коэффициент теплоотдачи можно определить через термические сопротивления следующим образом. Вырабатываемое в слое тепло передается по двум направлениям: влево по слою толщины x_m с термическим сопротивлением $R_{T,l} = x_m/2\lambda$, и вправо через слой толщины $L - x_m$ с термическим сопротивлением $R_{T,r} = \left(L - x_m\right)/2\lambda$ и термическое сопротивление среды $R_{T,C} = 1/\alpha$. Тогда общее термическое сопротивление определиться по формуле

$$\alpha_{ef} = \frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_{T,l}} + \frac{1}{R_{T,r} + R_{T,C}} .$$

В безразмерной форме: $\dfrac{\alpha_{ef} L}{\lambda} = \dfrac{2}{\xi_m} + \dfrac{1}{\left(1-\xi_m\right)/2 + 1/Bi}$.

Подставляем $\xi_m = \dfrac{1}{2}\dfrac{Bi+2}{Bi+1}$, и получаем $\dfrac{\alpha_{ef} L}{\lambda} = \dfrac{8\left(Bi+1\right)^2}{\left(Bi+2\right)^2}$.

4.3. Теплообмен слоя с источниками тепла, зависящими от координаты

Внутренний источник тепла не всегда бывает постоянной величиной. Часто он является функцией координаты или температуры. Рассмотрим случай, когда источник тепла является функцией координаты, $q_v(x)$. Стационарное уравнение теплопроводности в этом случае записывается в виде:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{q_v(x)}{\lambda}=0\,. \tag{4.33}$$

Уравнение (4.34) легко интегрируется:

$$T(x)=-\int\left(\int\frac{q_v}{\lambda}\,dx\right)dx+C_1x+C_2\,, \tag{4.34}$$

а из соответствующих граничных условий находятся константы интегрирования C_1 и C_2.

Рассмотрим теплообмен вязкой жидкости с окружающей средой при течении ее в трубе. Будем полагать стенки трубы бесконечно тонкими, не создающими термического сопротивления, температура стенок поддерживается при температуре окружающей среды T_0. Радиус трубы r_0. При течении жидкости в трубе происходит диссипация энергии за счет вязкого трения. Тогда перенос тепла в радиальном направлении описывается уравнением:

$$\lambda\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+q_v(r)=0\,. \tag{4.35}$$

Граничные условия: $T(r_0)=T_0$, $\dfrac{dT(0)}{dr}=0$.

Диссипация тепла при вязком трении описывается функцией:

$$q_v(r)=\mu\left(\frac{dV(r)}{dr}\right)^2. \tag{4.36}$$

где μ - коэффициент вязкости жидкости, $V(r)$ - профиль скорости жидкости.

При ламинарном течении жидкости в трубе профиль скорости имеет квадратичный вид, (так называемый профиль Пуазейля):

$$V(r)=\frac{(\Delta p/L)r_0^2}{4\mu}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right], \qquad (4.37)$$

где Δp - перепад давления по длине трубы L.

Подставляем (4.37) в (4.36), и затем в (4.35), получим:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+Br^2=0,\ B=\frac{\mu\delta}{\lambda},\ \delta=\frac{(\Delta p/L)^2}{4\mu^2}.$$

Проинтегрировав один раз, с учетом граничного условия получим:

$$\frac{dT}{dr}=-\frac{B}{4}r^3.$$

После второго интегрирования получаем профиль температуры в трубе:

$$T(r)=T_0+\frac{Br_0^4}{16}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^4\right].$$

Максимум температуры находится в центре трубы и равен $T_m=T_0+\dfrac{Br_0^4}{16}$.

Величина теплового потока на границе трубы $-\lambda\dfrac{dT(r_0)}{dr}=\lambda\dfrac{Br_0^3}{4}$.

Определим величину эффективного коэффициента теплоотдачи из равенства:

$$-\lambda\frac{dT(r_0)}{dr}=\alpha_{ef}\left(T(r_0)-T_m\right),\ \alpha_{ef}=\frac{4\lambda}{r_0}.$$

4.4. Теплообмен слоя с источниками тепла, зависящими от температуры

Рассмотрим слой вещества толщины $2L$, внутри которого расположены источники тепла, зависящие от температуры $q_v(T)$. На границах слоя поддерживается температура T_0.

В силу симметрии рассматриваем половину слоя. Стационарное уравнение теплопроводности и граничные условия запишутся в виде:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{q_v(T)}{\lambda}=0, \quad (4.38)$$

с граничными условиями

$$\frac{dT(0)}{dx}=0,\ T(L)=T_0. \quad (4.39)$$

В общем случае зависимости $q_v(T)$ интегрирование уравнения (4.38) затруднено. Предположим, что зависимость $q_v(T)$ не сильная, тогда $q_v(T)$ можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться двумя слагаемыми:

$$q_v(T)=q_v(T_0)+\frac{dq_v(T_0)}{dT}(T-T_0)+\frac{d^2q_v(T_0)}{dT^2}\frac{(T-T_0)^2}{2}+\ldots=$$

$$=q_{0v}\left[1+\frac{d\ln[q_{0v}]}{dT}(T-T_0)\right]$$

В последнем выражении $\frac{d\ln[q_{0v}]}{dT}=\eta$ - коэффициент чувствительности источника к изменению температуры.

Введем безразмерные переменные: $\xi=\frac{x}{L}$ - безразмерная координата, $\theta=\frac{T-T_0}{q_{0v}L^2/\lambda}$, $\gamma=\frac{d\ln[q_{0v}]}{dT}\frac{q_{0v}L^2}{\lambda}$. В новых переменных задача (4.38)-(4.39) запишется в виде:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2}+(1+\gamma\theta)=0, \quad (4.40)$$

$$\frac{d\theta(0)}{d\xi}=0,\ \theta(1)=0. \quad (4.41)$$

Задача содержит один параметр γ. Обозначим $1+\gamma\theta=\varphi$, тогда уравнение (4.40) запишется в виде $\varphi^{//}+\gamma\varphi=0$, которое имеет общее решение вида:

$$\varphi(\xi)=A\cos\left(\sqrt{\gamma}\xi\right)+B\sin\left(\sqrt{\gamma}\xi\right).$$

Возвращаясь к переменной θ, получаем:

$$\theta(\xi) = \left(A\cos\left(\sqrt{\gamma}\xi\right) + B\sin\left(\sqrt{\gamma}\xi\right) - 1 \right) / \gamma .$$

Из граничных условий (4.41) находим $B = 0$, $A = \dfrac{1}{\cos\left(\sqrt{\gamma}\right)}$, тогда

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\cos\left(\sqrt{\gamma}\xi\right)}{\cos\left(\sqrt{\gamma}\right)} - 1 \right).$$

Максимальная температура $\theta_m = \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{1-\cos\left(\sqrt{\gamma}\right)}{\cos\left(\sqrt{\gamma}\right)} \right)$.

Из формулы для теплообмена по закону Ньютона определяем эффективный коэффициент теплообмена α_{ef}: $\alpha_{ef} = \dfrac{-\lambda\, dT/dx\big|_{x=L}}{T_m - T_0}$. В безразмерной форме:

$$\frac{\alpha_{ef} L}{\lambda} = \frac{-\theta'(1)}{\theta_m}.$$

Из выражения $\theta(\xi)$ находим $\theta'(1) = -\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}} tg\left(\sqrt{\gamma}\right)$, с учетом выражения для θ_m получим:

$$\frac{\alpha_{ef} L}{\lambda} = \frac{-\theta'(1)}{\theta_m} = \sqrt{\gamma}\frac{\sin\left(\sqrt{\gamma}\right)}{1-\cos\left(\sqrt{\gamma}\right)} = \sqrt{\gamma}\frac{\cos\left(\sqrt{\gamma}/2\right)}{\sin\left(\sqrt{\gamma}/2\right)} = \sqrt{\gamma} ctg\left(\sqrt{\gamma}/2\right), \text{ или:}$$

$$\alpha_{ef} = \frac{\lambda\sqrt{\gamma}}{L} ctg\left(\sqrt{\gamma}/2\right). \qquad (4.42)$$

Выражение (4.42) может быть использовано при малых значениях величины γ. При $\gamma \to 0$ формула (4.42) дает предельный случай (для получения выражения используем первый замечательный предел) $\alpha_{ef} = \dfrac{2\lambda}{L}$, который соответствует результату, полученному в п. 4.1.

5. ТЕПЛООТДАЧА В НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ

Теплопроводность в нестационарном случае описывается уравнением (2.10). В одномерном случае – (2.11). Величина теплового потока на границе тела при теплообмене в нестационарном случае будет величина переменная. Она определяется из закона Фурье через градиент температуры на поверхности по направлению нормали к ней. Зная нестационарное поле температуры внутри тела всегда можно найти величины тепловых потоков на границе тела.

Рассмотрим задачу об остывании слоя вещества толщины $2L$, с известными теплофизическими характеристиками, предварительно нагретого до температуры T_1, в среде с температурой T_0. Предполагается, что теплообмен с окружающей средой происходит по закону Ньютона с постоянным коэффициентом теплоотдачи α.

В силу симметрии слоя будем рассматривать половину слоя. Нестационарное уравнение теплопроводности и граничные условия запишутся в виде:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{5.1}$$

Начальные условия:

$$T\left(x,0\right)=T_1. \tag{5.2}$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial T\left(0,t\right)}{\partial x}=0,\ \lambda\frac{\partial T(L,t)}{\partial x}=-\alpha\left(T\left(L,t\right)-T_0\right). \tag{5.3}$$

Введем безразмерные переменные $\xi=\dfrac{x}{L}$ - безразмерная координата, $\theta=\dfrac{T-T_0}{T_1-T_0}$, - безразмерная температура, $\tau=\dfrac{t}{\left(L^2c\rho/\lambda\right)}=\dfrac{t}{t_*}$ - безразмерное время, $t_*=\left(L^2c\rho/\lambda\right)$ - масштаб времени, $Bi=\dfrac{\alpha L}{\lambda}$ - число Био. Тогда задача (4.43)-(4.45) перепишется в виде:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}, \tag{5.4}$$

$$\theta(\xi,0)=1\,, \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial\theta(0,\tau)}{\partial\xi}=0\,,\ \frac{\partial\theta(1,\tau)}{\partial\xi}=-Bi\theta\left(1,\tau\right). \tag{5.6}$$

Задача (5.4)-(5.6) содержит только один параметр, число Био. С математической точки зрения задача (5.4)-(5.6) – уравнение в частных производных второго порядка параболического типа с однородными граничными условиями второго и третьего рода. Для решения уравнения (5.4) можно использовать метод преобразования Лапласа, метод разделения переменных. Будем решать задачу (5.4)-(5.6) методом разделения переменных. Будем искать решение $\theta(\xi,\tau)$ в виде произведения $\theta(\xi,\tau)=X\left(\xi\right)T\left(\tau\right)$. Подставляя эту замену в уравнение (5.4) и разделяя на произведение $X\left(\xi\right)T\left(\tau\right)$, получаем два уравнения для нахождения $X\left(\xi\right)$ и $T\left(\tau\right)$:

$$X\left(\xi\right)T^{/}\left(\tau\right)=X^{//}\left(\xi\right)T\left(\tau\right)\quad :X\left(\xi\right)T\left(\tau\right),$$

$$\frac{T^{/}\left(\tau\right)}{T\left(\tau\right)}=\frac{X^{//}\left(\xi\right)}{X\left(\xi\right)}=-\beta^2\,,$$

$$T^{/}\left(\tau\right)+\beta^2T\left(\tau\right)=0\,, \tag{5.7}$$

$$X^{//}\left(\xi\right)+\beta^2X\left(\xi\right)=0\,. \tag{5.8}$$

Подставляя произведение $X\left(\xi\right)T\left(\tau\right)$ в граничные условия получаем:

$$X^{/}\left(0\right)=0\,,\ X^{/}\left(1\right)+BiX\left(1\right)=0\,. \tag{5.9}$$

Задача (5.8)-(5.9) это задача Штурма-Лиувилля на нахождение собственных значений и собственных функций. Общее решение уравнения (5.8) $X\left(\xi\right)=A\cos\left(\beta\xi\right)+B\sin\left(\beta\xi\right)$. Из граничных условий (5.9) находим

$$X^{/}\left(0\right)=-A\beta\sin\left(\beta0\right)+B\beta\cos\left(\beta0\right)=0\,,\ \Rightarrow B=0\,.$$

$X^{/}\left(1\right)+BiX\left(1\right)=-A\beta\sin\left(\beta\right)+BiA\cos\left(\beta\right)=0\,,\quad \Rightarrow\beta=Bi\cdot ctg\left(\beta\right),\quad \Rightarrow\beta_n$ - собственные значения, $X_n\left(\xi\right)=\cos\left(\beta_n\xi\right)$ - собственные функции.

Общее решение уравнения (5.7) $T_n\left(\tau\right)=D_ne^{-\beta^2\tau}$.

Частное решение уравнения (5.4), удовлетворяющее и граничным условиям, есть произведение

$$\theta_n(\xi,\tau) = X_n(\xi)T_n(\tau). \qquad (5.10)$$

Общее решение уравнения (5.4) записывается как сумма всех частных решений (5.10):

$$\theta(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\theta_n(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi)T_n(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\beta_n^2\tau}\cos(\beta_n\xi).$$

Константа C_n находится из начальных условий с использованием ортогональности собственных функций $X_n(\xi)$:

$$\theta(\xi,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(\beta_n\xi) = 1. \qquad (5.11)$$

Умножим (5.11) на $X_k(\xi) = \cos(\beta_k\xi)$ и проинтегрируем по ξ в пределах от 0 до 1. Все интегралы левой части (5.11) после умножения принимают вид, и при $n \neq k$ $\int_0^1 \cos(\beta_n\xi)\cos(\beta_k\xi)\,d\xi = 0$. При $n = k$ интегралы вычисляется:

$$C_n\int_0^1 \cos^2(\beta_n\xi)\,d\xi = C_n\frac{1}{2}\int_0^1\left(\cos(2\beta_n\xi)+1\right)d\xi = C_n\left(\frac{\sin(2\beta_n)}{4\beta_n}+\frac{1}{2}\right). \qquad (5.12)$$

Интеграл правой части:

$$\int_0^1 1\cdot\cos(\beta_n\xi)\,d\xi = \frac{\sin(\beta_n)}{\beta_n}. \qquad (5.13)$$

Приравнивая (5.12) и (5.13) после элементарных преобразований получаем: $C_n = \dfrac{2\sin(\beta_n)}{\beta_n + \sin(\beta_n)\cos(\beta_n)}$.

Решение задачи записывается в виде суммы ряда:

$$\theta(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(\beta_n)}{\beta_n + \sin(\beta_n)\cos(\beta_n)} e^{-\beta^2\tau}\cos(\beta_n\xi). \qquad (5.14)$$

Для нахождения теплового потока выражение (5.14) подставляется в соотношение на левой границе (5.6).

Контрольные вопросы

1. Основные характеристики сплошной среды (температура, давление, плотность и др.), их связь с микрофизическими параметрами.
2. Вывод уравнения переноса тепла в сплошной среде.
3. Определение теплового потока. Гипотеза Фурье.
4. Зависимость коэффициентов переноса от свойств сплошной среды.
5. Коэффициенты теплопроводности в газе, жидкости, твердом теле.
6. Зависимость коэффициентов переноса от температуры.
7. Теплопередача через пластинку. Коэффициент теплопередачи.
8. Термическое сопротивление. Законы сложения термических сопротивлений.
9. Теплопередача в случае цилиндрической и сферической симметрии.
10. Постановка нестационарных задач теплопроводности. Постановка граничных условий.
11. Теплопередача через двухслойную плоскую пластинку.
12. Теплопередача через многослойную плоскую пластинку.
13. Температурное поле в объеме при наличии источников тепла.
14. Теплопередача пластинки с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры.
15. Теплопередача пластинки с коэффициентом теплопроводности, зависящим от координаты.
16. Теплопередача через сферические и цилиндрические слои.
17. Температурное поле в объеме при наличии источников тепла.
18. Теплообмен слоя с источниками тепла, ограниченного двумя стенками.
19. Теплообмен слоя с источниками тепла, зависящими от координаты.
20. Теплообмен слоя с источниками тепла, зависящими от температуры.

Список литературы

1 *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. М.:Энергия. 1975. 488с.

2 *Лыков А.В.* Тепломассообмен (справочник). М: Энергия.-1978.-480.

3 *Кутателадзе С.С.* Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат. 1979. 416 с.

4 *Кутателадзе С.С.* Анализ подобия в теплофизике. Новосибирск: Наука. 1982. 280 с.

5 *Исаев С.И., Кожинов И.А., Кофанов В.И., Леонтьев А.И. и др.* Теория тепломассообмена. Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Высшая школа. 1979. 495 с.

6 *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа. 1967. 600 с.

Дополнительная литература

1 *Князева А.Г.* Теплофизические основы современных высокотемпературных технологий. Томск: Изд-во ТПУ. 2009. 357 с.

2 *Себеси Т., Брэдшоу.* Конвективный теплообмен. М.: Мир. 1987.

3 *Юдаев Б.Н.* Теплопередача. М.: Высшая школа. 1981. 319 с.

4 *Петухов Б.С.* Вопросы теплообмена. М.: Наука. 1987. 280 с.

5 *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т.1, 2. М.: Наука. 1987.

6 *Кутателадзе С.С., Накоряков Е.Н.* Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука. 1984. 302 с.

7 *Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В.* Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. Учебное пособие для теплофизич. и теплоэнергетич спец. вузов. М.: Высшая школа, 1990. 207 с.

8 *Цветков Ф.Ф., Григорьев Б.А.* Тепломассообмен. Учебное пособие для вузов. 2005.

9 *Ерофеев В.Л., Семенов П.Д., Пряхин А.С.* Теплотехника: Учебник для ВУЗов, Академкнига, 2008, 488 с.

10 *Луканин В.Н., Шатров М.Г. и др.* Теплотехника: Учебник Высшая школа. 2009, 671 с.

11 *Ляшков В.И.* Теоретические основы теплотехники: Учебное пособие. Москва. Издательство "Машиностроение", 2005. 260 с.

Учебное издание

Алексей Юрьевич Крайнов

ОСНОВЫ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ.
ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ЧЕРЕЗ СЛОЙ ВЕЩЕСТВА

Учебное пособие

Опубликовано в авторской редакции

Издательство "STT"
Россия, 634028, г. Томск, проспект Ленина, $15^{Б}$–1
Тел.: (3822) 421-455
E-mail: stt@sttonline.com

Усл. печ. л. 2,4. Уч.-изд. л. 1,15.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Подписано к печати 30.05.2016 г. Формат $60x84/_{16}$
Тираж 100 экз. Заказ № 558.