

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Национальный исследовательский  
Томский государственный университет

**А.Ю. Крайнов, Л.Л. Миньков**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА**

*Учебное пособие*

Scientific & Technical Translations



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
Томск – 2016

**УДК 519.63**  
**ББК 22.194**  
**К78**

**К78** **Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л.** Численные методы решения задач тепло- и массопереноса : учеб. пособие.– Томск : СТТ, 2016. – 92 с.

ISBN 978-5-93629-559-1

Представлены численные методы решения нестационарных уравнений теплопроводности и диффузии, уравнения Лапласа. Приводятся методы анализа устойчивости разностной схемы, алгоритмы реализации численных методов. Приведены примеры численного решения задач. Учебное пособие составлено для студентов четвертого курса, изучающих «Численные методы в технической физике» по программе подготовки бакалавров по направлениям 16.03.01 - Техническая физика, 24.03.03 – Баллистика и гидроаэродинамика на физико-техническом факультете ТГУ.

**УДК 519.63**  
**ББК 22.194**

*Учебное пособие разработано при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 10.1329.2014/К.*

Рецензенты:

- Васенин И.М. – докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета;
- Носков М.Д. – докт. физ.-мат. наук, профессор, заместитель руководителя по НР и МД СТИ НИЯУ МИФИ.

ISBN 978-5-93629-559-1

- © А.Ю. Крайнов, Л.Л. Миньков, 2016
- © Томский государственный университет, 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	6
1 Математическое моделирование процессов теплопроводности.....	6
1.1 Уравнение теплопроводности.....	6
1.2 Уравнение диффузии.....	9
1.3 Начальные и граничные условия для уравнения теплопроводности.....	10
1.4 Постановка задачи о теплопередаче слоя вещества.....	13
2 Численные методы решения задач теплопроводности.....	15
2.1 Идея метода численного решения задач теплопроводности.....	15
2.2 Понятие аппроксимации.....	18
2.3 Понятие устойчивости разностной схемы.....	21
2.4 Исследование устойчивости разностных схем.....	24
2.5 Аппроксимации дифференциальных операторов.....	26
2.6 Явная разностная схема для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами.....	27
2.7 Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами.....	28
2.8 Схема с «весами» для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами.....	28
2.9 Явная разностная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности.....	30
2.10 Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности.....	31
2.11 Аппроксимация граничных условий.....	31
2.12 Алгоритм решения задачи теплопроводности с использованием явной схемы.....	33
2.13 Алгоритм решения задачи теплопроводности с использованием неявной схемы.....	34
2.14 Аппроксимация правых частей уравнения теплопроводности.....	36

2.15	Особенности решения задач в цилиндрических и сферических координатах.....	37
2.16	Способы задания неравномерной сетки .....	39
2.17	Метод прямых для решения уравнения теплопроводности.....	41
2.18	Пример численного решения задачи о теплопроводности в стержне конечной длины.....	41
3	Численные методы решения многомерных задач теплопроводности.....	48
3.1	Метод покоординатного расщепления.....	49
3.2	Метод продольно-поперечной прогонки.....	51
3.3	Разностные схемы для трехмерных уравнений теплопроводности.....	51
3.4	Пример решения двухмерного уравнения теплопроводности методом продольно-поперечной прогонки.....	53
3.4.1.	Программа на языке Фортран.....	54
4	Численные методы решения задач кондуктивно-конвективного теплопереноса.....	57
4.1	Явная разностная схема для уравнения кондуктивно-конвективного теплопереноса.....	57
4.2	Неявная разностная схема для уравнения кондуктивно-конвективного теплопереноса.....	59
4.3	Построение схемы второго порядка точности для уравнения кондуктивно-конвективного теплопереноса. Преобразование А.А. Самарского.....	61
5	Разностная схема для решения уравнения эллиптического типа.....	64
5.1.	Построение разностной схемы.....	64
5.2.	Реализация граничных условий.....	67
5.3.	Особенности построения разностной схемы для уравнения в цилиндрической системе координат.....	69
5.4.	Особенности построения разностной схемы для уравнения в полярной системе координат.....	72
5.5.	Пример решения гиперболического уравнения методом конечных разностей.....	73
5.5.1.	Программа на языке Паскаль.....	73
5.5.2.	Программа для системы Mathcad.....	76

6. Заключение. «Прописные истины» начинающего вычислителя.....	78
Контрольные вопросы.....	82
Индивидуальные задания.....	84
Список литературы.....	90
Дополнительная литература.....	90

## ВВЕДЕНИЕ

Для решения задач теплопроводности существуют аналитические методы, однако решение некоторых неоднородных и нелинейных задач теплопроводности получить аналитическими методами не представляется возможным. Решение такого рода задач проводится с использованием численных методов.

В настоящее время имеется большое количество учебников и монографий по численным методам решения задач теплопроводности, тепло- и массопереноса [1-5, 9-13] и другие.

Использование численных методов в задачах тепло- и массообмена позволяет решать многие практические задачи. Появление высокопроизводительной вычислительной техники позволяет в настоящее время решать нестационарные пространственные задачи тепло- и массопереноса.

В пособии представлены основные численные методы, используемые для решения задач теплопереноса, даны способы построения разностных схем и алгоритмов численного решения задач теплопроводности.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

### 1.1. Уравнение теплопроводности

При неоднородном распределении температуры в среде поток тепла через единицу площади, перпендикулярную градиенту температуры, в единицу времени определяется законом Фурье. В случае одномерного распределения температуры например вдоль оси  $x$  тепловой поток определяется соотношением:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1.1)$$

где  $q$  – величина теплового потока, Дж/(м<sup>2</sup> с);  $T$  – температура;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Дж/(м с К).

Рассмотрим стержень радиуса  $R$ , в котором имеется неоднородное распределение температуры по длине. По сечению стержня примем температуру одинаковой (рис. 1). Пусть на боковых стенках стержня происходит теплообмен с окружающей средой температуры  $T_0$ , а в объеме стержня расположены источники и стоки тепла интенсивности  $Q$ . Теп-

лообмен с окружающей средой будем описывать законом Ньютона для теплообмена с коэффициентом теплообмена  $\alpha$ .

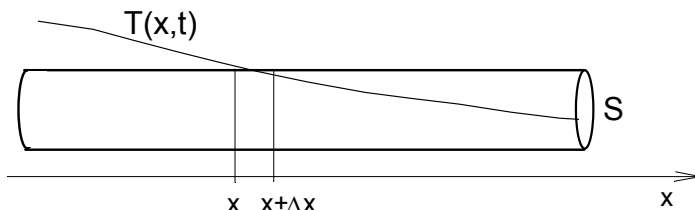


Рис. 1. К выводу уравнения теплопроводности

Выберем участок стержня толщиной  $\Delta x$  и запишем изменение его внутренней энергии  $E = c\rho S\Delta x T$ , где  $c$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность,  $S$  – площадь поперечного сечения стержня. Изменение  $E$  происходит за счет прихода тепла через сечение  $x$ , ухода тепла через сечение  $x + \Delta x$ , за счет действия источников и стоков тепла и теплообмена с окружающей средой через боковую поверхность участка  $\Delta x$ . За время  $\Delta t$  изменение внутренней энергии рассматриваемого участка стержня произойдет на величину

$$\begin{aligned} \Delta E &= c\rho S\Delta x\Delta T = q_x S\Delta t - q_{x+\Delta x} S\Delta t - \\ &- S_b \Delta t \alpha (T - T_0) + Q S \Delta x \Delta t \end{aligned} \quad (1.2)$$

Подставляя в (1.2) выражения  $S_b = 2\pi R\Delta x$ ,  $S = \pi R^2$ , учитывая, что  $Q$  может быть функцией  $x$  и  $t$ , и разделяя на произведение  $S \cdot \Delta x \cdot \Delta t$ , получим:

$$c\rho \frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{q_{x+\Delta x} - q_x}{\Delta x} - \frac{2\alpha}{R}(T - T_0) + Q(x, t). \quad (1.3)$$

Сделаем предельный переход при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{2\alpha}{R}(T - T_0) + Q(x, t). \quad (1.4)$$

Подставляя выражение (1.1) в (1.4) получим:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{2\alpha}{R}(T - T_0) + Q(x, t). \quad (1.5)$$

Если коэффициент теплопроводности  $\lambda$  является постоянной величиной (это выполняется не всегда), то (1.5) можно переписать в виде:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\alpha}{R}(T - T_0) + Q(x, t).$$

Если ввести обозначение  $\lambda/(c\rho) = a$  – коэффициент температуропроводности, то уравнение (1.5) можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h(T - T_0) + \bar{Q}(x, t), \quad h = \frac{2\alpha}{c\rho R}, \quad \bar{Q}(x, t) = \frac{Q(x, t)}{c\rho}.$$

При отсутствии теплообмена с окружающей средой и источников и стоков тепла уравнение теплопроводности запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (1.6)$$

Это одномерное уравнение теплопроводности.

В случае, когда температура меняется во всех направлениях пространства и во времени, уравнение теплопроводности запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T, \quad (1.7)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа. В декартовой системе координат  $x, y, z$  уравнение (1.7) запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (1.8)$$

Для определения температурного поля в телах цилиндрической формы переходят к цилиндрическим координатам  $r, \varphi, z$ ,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

и после замены переменных уравнение (1.8) запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (1.9)$$

В сферической системе координат  $r, \varphi, \psi$ ,  $x = r \sin \varphi \cos \psi$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \psi$ ,  $z = r \cos \varphi$ , уравнение (1.8) примет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} \right). \quad (1.10)$$

В случае осевой или центральной симметрии уравнения (1.9), (1.10) запишутся в виде, соответственно:



$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (1.12)$$

Уравнение (1.6) по классификации уравнений в частных производных второго порядка относится к параболическому типу [7].

Решение уравнения (1.6)  $T(x, t)$  – функция двух переменных. Уравнение (1.6) имеет множество решений. Для получения однозначного решения уравнение (1.6) должно быть дополнено начальными и граничными условиями.

## 1.2. Уравнение диффузии

Аналогичное (1.6) уравнение получается при описании диффузии веществ. Поток массы вещества за счет диффузии, возникающей при неоднородном распределении концентрации компонентов в смеси, определяется законом Фика:

$$j = -D \frac{\partial \rho_A}{\partial x}, \quad (1.13)$$

где  $j$  – поток массы вещества в единицу времени через единицу площади, перпендикулярную градиенту концентрации вещества  $A$ ,  $кг/(м^2 \cdot с)$ ;  $\rho_A$  – плотность вещества  $A$  в смеси,  $кг/(м^3)$ ;  $D$  – коэффициент диффузии,  $м^2/с$ .

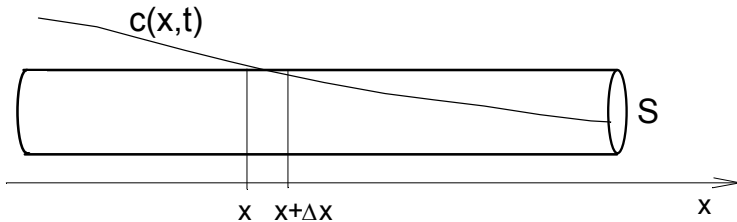


Рис. 2. К выводу уравнения диффузии

Рассмотрим трубку поперечного сечения  $S$ , в которой имеется неподвижная газовая смесь с неоднородной концентрацией вещества  $A$

(рис. 2). Выделим слой толщины  $\Delta x$ . Изменение массы вещества в этом слое за время  $\Delta t$  определяется равенством:

$$\Delta M = S \Delta x \Delta \rho_A = j_x S \Delta t - j_{x+\Delta x} S \Delta t. \quad (1.14)$$

Разделим (1.14) на произведение  $S \cdot \Delta x \cdot \Delta t$ , получим:

$$\frac{\Delta \rho_A}{\Delta t} = - \frac{\Delta j}{\Delta x}$$

Устремляем  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , подставляем (1.13), получим:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \rho_A}{\partial x} \right). \quad (1.15)$$

При  $D = const$  уравнение переписывается в виде:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial x^2}. \quad (1.16)$$

Уравнение (1.16) – уравнение диффузии.

Уравнения (1.6) и (1.16) по классификации уравнений в частных производных второго порядка относятся к параболическому типу [7] и с математической точки зрения одинаковы.

### 1.3. Начальные и граничные условия для уравнения теплопроводности

В общем случае уравнение теплопроводности имеет множество решений. Для того, чтобы уравнение теплопроводности имело единственное решение, моделировало конкретную физическую ситуацию, необходимо задание краевых условий. В качестве краевых условий для нестационарного уравнения теплопроводности задаются условия на границах рассматриваемого тела (граничные условия) и поле температур внутри тела в некоторый момент времени  $t_0$ ,  $T = T(x, y, z, t_0)$ , (начальные условия). Обычно значение  $t_0$  принимается за начало отсчета времени и задается равным нулю,  $t_0 = 0$ . В одномерном случае задается  $T = T(x, t_0)$ .

Граничные условия должны моделировать конкретные теплофизические условия на границах рассматриваемого тела. В зависимости от рассматриваемых теплофизических условий на границе тела ставится граничное условие I, II, III, или IV рода.

*Граничное условие I рода:* задаются значения температуры на поверхности тела, в общем случае в виде функции от времени:

$T(M, t) = f(M, t)$  (здесь  $M$  – точка, принадлежащая поверхности тела).

В частном случае функция  $f(M, t)$  может быть постоянной величиной, когда поддерживается постоянная температура на поверхности тела. Граничное условие I рода моделирует, например, теплообмен тела с нагревателем, находящимся в идеальном контакте с телом.

*Граничное условие II рода:* задаются значения теплового потока в каждой точке поверхности тела, в общем случае в виде функции времени:

$$\lambda \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n = q(M, t), \text{ где } \vec{l}_n \text{ – вектор нормали к поверхности тела,}$$

$q(M, t)$  – величина теплового потока на поверхность тела в точке  $M$ ,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности вещества тела. В частном случае функция  $q(M, t)$  может быть постоянной величиной. Граничное условие II рода моделирует лучистый нагрев от внешнего источника поверхности непрозрачного тела.

*Граничное условие III рода:* задается связь между температурой тела на его границе и теплового потока в тело:

$$\lambda \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n = \alpha (T(M, t) - T_0), \text{ где } \vec{l}_n \text{ – вектор нормали к поверхности}$$

тела,  $T_0$  – температура окружающей среды, находящейся в контакте с телом,  $\alpha$  – коэффициент теплообмена между окружающей средой и поверхностью тела.

Граничные условия III рода описывают конвективный теплообмен между телом и окружающей его средой (газом, жидкостью), имеющей температуру  $T_0$ . Такое описание теплообмена называется закон Ньютона для теплообмена.

С помощью граничных условий III рода можно описать теплообмен излучением между двумя телами. В соответствии с законом Стефана – Больцмана результирующий тепловой поток между двумя телами с температурой их поверхности  $T_1$  и  $T_2$  можно записать в виде:

$$q_{rez} = \sigma (T_2^4 - T_1^4 (M, t)).$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана.

Тогда поток тепла в первое тело

$$\lambda \frac{\partial T_1(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n = \sigma (T_2^4 - T_1^4(M, t)). \quad (1.17)$$

Проводя дважды разложение разности квадратов вместо (1.17) запишем:

$$\lambda \frac{\partial T_1(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n = \alpha(T_1, T_2) (T_2 - T_1(M, t)),$$

где

$$\alpha(T_1, T_2) = \sigma (T_2^2 + T_1^2) (T_2 + T_1).$$

Здесь коэффициент теплообмена будет функцией температуры поверхности тел.

*Граничное условие IV рода:* задаются соотношения для тепловых потоков и температур на границе двух тел (или сред), находящихся в идеальном контакте:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial T_1(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n &= \lambda_2 \frac{\partial T_2(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n \\ T_1(M, t) &= T_2(M, t), \end{aligned}$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности первого и второго тела,  $T_1(M, t), T_2(M, t)$  – температуры первого и второго тела на границе их контакта.

Граничные условия IV рода моделируют идеальный тепловой контакт между плотно соприкасающимися телами, и имеют простой физический смысл: какое количество тепла подводится из глубины первого тела к его границе, такое же количество тепла отводится в глубь второго тела. Второе равенство следует из того, что двух значений температуры в одной точке пространства быть не может.

Если на границе двух тел происходит фазовый переход, то граничные условия необходимо записывать с учетом поглощения-выделения скрытой теплоты фазового перехода:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n - \lambda_2 \frac{\partial T_2(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n = \rho r U,$$

(разность потоков тепла, подведенного к поверхности фазового перехода и отведенного от нее, расходуется на фазовый переход), где  $U = \partial x_b / \partial t$  – скорость движения границы фазового перехода,  $r$  – скрытая теплота фазового перехода.

#### 1.4. Постановка задачи о теплопередаче слоя вещества

Пусть дан слой вещества толщины  $l$  с известными теплофизическими характеристиками, имеющий начальную температуру  $T_0$ . Внутри слоя имеются источники и стоки тепла,  $Q(x, t)$ . На левой границе слоя задана температура  $T_1$ , на правой границе происходит теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой температуры  $T_2$ . Математическая постановка задачи имеет вид:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q(x, t), \quad (1.18)$$

Начальное условие:

$$T(x, 0) = T_0,$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_1 \\ \lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} &= -\alpha(T(l, t) - T_2) \\ 0 \leq x \leq l, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Решение задачи будет зависеть от  $x$ ,  $t$ ,  $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $l$ ,  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  и характеристик источника  $Q(x, t)$ .

Бывает удобно привести задачу (1.18) – (1.19) к безразмерному виду [6, 8]. Тогда количество параметров, определяющих решение, уменьшается.

Будем измерять ширину слоя не в метрах, а в толщинах этого слоя. Введем независимую переменную  $\xi = x/l$ . Тогда толщина слоя будет равна  $l$ . Будем измерять температуру не в градусах, а в температурных интервалах  $\Delta T$ . В задаче (1.18) – (1.19) в качестве  $\Delta T$  удобно выбрать  $\Delta T = T_1 - T_0$ . Введем зависимую переменную  $\vartheta$  – безразмерную температуру,  $\vartheta = \frac{T(x, t) - T_0}{T_1 - T_0}$ . Проводя замену переменных  $x$  и  $T$  в уравнении (1.18) получим:

$$\frac{c\rho l^2}{\lambda} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{Q(\xi, t)l^2}{\lambda(T_1 - T_0)}.$$

Величина  $c\rho l^2/\lambda$  имеет размерность *секунды*. Примем величину  $t_* = c\rho l^2/\lambda$  за масштаб времени и введем безразмерную независимую переменную  $\tau = t/t_*$ . Тогда уравнение (1.18) запишется в виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \bar{Q}(\xi, \tau),$$

Где

$$\bar{Q}(\xi, \tau) = \frac{Q(\xi, \tau)l^2}{\lambda(T_1 - T_0)}.$$

В новых переменных начальное условие запишется в виде:  $\vartheta(\xi, 0) = 0$ , граничное условие при  $\xi = 0$ :  $\vartheta(0, \tau) = 1$ .

Проведем замену переменных в граничном условии при  $x = l$  (1.19):

$$\frac{\partial \vartheta(1, \tau)}{\partial \xi} = -\frac{\alpha l}{\lambda} (\vartheta(1, \tau) - \vartheta_2), \quad \vartheta_2 = \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}.$$

Введя обозначение  $Bi = \frac{\alpha l}{\lambda}$  – число Био, перепишем в виде:

$$\frac{\partial \vartheta(1, \tau)}{\partial \xi} = -Bi(\vartheta(1, \tau) - \vartheta_2)$$

Итак, задача (1.18) – (1.19) в безразмерных переменных принимает вид:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \bar{Q}(\xi, \tau), \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi, 0) &= 0, \\ \vartheta(0, \tau) &= 1, \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \vartheta(1, \tau)}{\partial \xi} = -Bi(\vartheta(1, \tau) - \vartheta_2).$$

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \tau > 0$$

В задаче (1.20) – (1.21) решение зависит только от  $\xi$ ,  $\tau$ ,  $Bi$  и характеристик источника  $\bar{Q}(\xi, \tau)$ . Получив решение задачи (1.20) – (1.21) можно легко перейти к размерным величинам:  $t = \tau \cdot t_*$ ,  $x = \xi \cdot l$ ,  $T(x, t) = \vartheta(x/l, t/t_*)(T_1 - T_0) + T_0$ .

Аналитическое решение неоднородного уравнения теплопроводности с соответствующими начальными и граничными условиями может быть получено лишь в случае простых видов функции  $\bar{Q}(\xi, \tau)$ , либо приближенно, упрощая вид функции  $\bar{Q}(\xi, \tau)$ . Эффективным средством решения задач являются численные методы.

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

### 2.1. Идея метода численного решения задач теплопроводности

Способ решения дифференциальных уравнений, основанный на замене дифференциальных операторов их приближенными значениями в отдельных точках, называется *методом конечных разностей*, или *методом сеток*. Рассмотрим метод на решении простой задачи теплопроводности с граничными условиями первого рода:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + Q(\xi, \tau), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi, 0) = \vartheta_0, \quad \vartheta(0, \tau) = \vartheta_1, \quad \vartheta(1, \tau) = \vartheta_2 \\ 0 \leq \xi \leq 1, \quad \tau > 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\vartheta(\xi, \tau)$  – безразмерная температура,  $Q(\xi, \tau)$  – функция распределения источников тепла. Заданы начальная температура  $\vartheta_0$ , температура на левой границе  $\vartheta_1$  и на правой границе  $\vartheta_2$ . Область изменения искомой функции  $\vartheta(\xi, \tau)$ :  $G \in [0 \leq \xi \leq 1, \tau \geq 0]$

Чтобы найти решение задачи (2.1) – (2.2) методом конечных разностей перейдем от исходной дифференциальной задачи к разностной. Для этого заменим область непрерывного изменения искомой функции  $\vartheta(\xi, \tau)$ ,  $[0 \leq \xi \leq 1, \tau \geq 0]$ , дискретным множеством точек  $G_{h\tau}$ . Пусть дис-

кретное множество точек  $G_{h\tau}$  такое, что равномерно покрывает всю область (рис. 3), и их координаты определяются выражениями

$$\xi_k = kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad \tau^n = n\Delta\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $h$  – шаг сетки по пространству,  $\Delta\tau$  – шаг сетки по времени. Набор узлов  $(\xi_k, \tau^n)$ , соответствующий фиксированному моменту времени называется  $n$ -тым временным слоем.

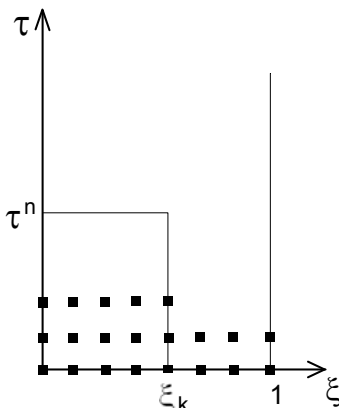


Рис. 3. Область изменения искомой функции

Вместо непрерывных функций  $\vartheta(\xi, \tau)$ ,  $Q(\xi, \tau)$  вводятся их числовые последовательности, определенные в точках сетки  $(\xi_k, \tau^n)$ :

$\vartheta_k^n = \vartheta(\xi_k, \tau^n)$ ,  $Q_k^n = Q(\xi_k, \tau^n)$  (пространственные узлы сетки – подстрочные индексы, временные – надстрочные).

Будем предполагать, что значения рассматриваемых сеточных функций совпадают с соответствующими значениями непрерывных в узлах сетки,  $\vartheta_k^n = \vartheta(\xi_k, \tau^n)$ . Решение дифференциальной задачи (2.1) – (2.2) сводится к определению таблицы  $\vartheta_k^n$  числовых значений ее точного решения  $\vartheta(\xi, \tau)$  в точках сетки  $G_{h\tau}$ . Эту задачу можно решить прибли-



женно, если перейти от дифференциальной задачи (2.1) – (2.2) к аппроксимирующему ее разностному уравнению. Для этого заменим производные, содержащиеся в уравнении, разностными соотношениями.

По определению производной как предела

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vartheta(\xi + h, \tau) - \vartheta(\xi, \tau)}{h}.$$

Зафиксировав  $h$  в этом равенстве, получим приближенную формулу для первой производной через конечные разности:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \approx \frac{\vartheta(\xi + h, \tau) - \vartheta(\xi, \tau)}{h}.$$

Производная второго порядка аппроксимируется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} &\approx \frac{1}{h} \left[ \frac{\vartheta(\xi + h, \tau) - \vartheta(\xi, \tau)}{h} - \frac{\vartheta(\xi, \tau) - \vartheta(\xi - h, \tau)}{h} \right] = \\ &= \frac{1}{h^2} (\vartheta(\xi + h, \tau) - 2\vartheta(\xi, \tau) + \vartheta(\xi - h, \tau)), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \approx \frac{\vartheta(\xi, \tau + \Delta\tau) - \vartheta(\xi, \tau)}{\Delta\tau}.$$

Переходя к сеточным функциям можно записать:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \approx \frac{\vartheta_k^{n+1} - \vartheta_k^n}{\Delta\tau}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} \approx \frac{\vartheta_{k+1}^n - 2\vartheta_k^n + \vartheta_{k-1}^n}{h^2}.$$

Заменяв в уравнении (2.1) производные разностными соотношениями, получим разностные уравнения.

Введем обозначение  $\theta_k^n$  – приближенное решение дифференциальной задачи  $\theta_k^n = \theta(\xi_k, \tau^n) \approx \vartheta(\xi_k, \tau^n) = \vartheta_k^n$ , имея ввиду, что решение разностной задачи отличается от решения исходной дифференциальной задачи из-за приближенного определения производных. С учетом введенного обозначения (2.1) в разностной форме запишется в виде:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n, \quad (2.3)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Начальные условия:  $\theta_k^0 = \vartheta_k^0 = \vartheta_0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, K$ .

Граничные условия:  $\theta_0^n = \vartheta_0^n = \vartheta_1$ ,  $\theta_K^n = \vartheta_K^n = \vartheta_2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Таким образом, исходная дифференциальная задача (2.1) – (2.2) сведена к разностной задаче (2.3). Совокупность разностных уравнений и краевых условий, записанных в разностной форме, называют *конечно-разностной схемой*.

Алгоритм решения задачи (2.3) прост. Если для некоторого момента времени  $\tau^n = n\Delta\tau$  решение  $\theta_k^n$  известно, то значения  $\theta_k^{n+1}$  для любого  $k$  может быть вычислено по формуле:

$$\theta_k^{n+1} = \frac{\Delta\tau}{h^2} \theta_{k+1}^n + \left(1 - 2\frac{\Delta\tau}{h^2}\right) \theta_k^n + \frac{\Delta\tau}{h^2} \theta_{k-1}^n + \Delta\tau Q_k^n. \quad (2.4)$$

Так как для начального момента времени  $\tau = 0$   $\theta_k^n$  заданы, то можно последовательно определять  $\theta_k^1$  для  $k = 1, 2, \dots, K-1$ ,  $\theta_k^2, \dots, \theta_k^n$ .

## 2.2. Понятие аппроксимации

При использовании метода конечных разностей дифференциальная задача заменяется разностной. Для близости решений этих задач необходимо, чтобы в пределе при стремлении к нулю шагов сетки по времени и пространству решение разностной задачи совпало с решением дифференциальной. Если это выполняется, то говорят, что разностная схема *аппроксимирует* дифференциальную задачу.

При замене дифференциальной задачи разностной допускается ошибка – *погрешность аппроксимации*. Погрешность аппроксимации характеризуется величиной *невязки*, которая получается при подстановке точного решения исходной задачи в разностную.

Предположим, что известно точное решение дифференциальной задачи (2.1)  $\vartheta(\xi, \tau)$ . Вычислим его в точках сетки  $\xi_k = kh$ ,  $\tau^n = n\Delta\tau$ ,  $\vartheta(\xi_k, \tau^n)$  и подставим в разностную (2.3), получим величину невязки:

$$\delta_h = \frac{\vartheta_k^{n+1} - \vartheta_k^n}{\Delta\tau} - \frac{\vartheta_{k+1}^n - 2\vartheta_k^n + \vartheta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n. \quad (2.3')$$

Говорят, что разностная задача аппроксимирует дифференциальную на решении  $\vartheta(\xi, \tau)$  с порядком  $p$  относительно  $\Delta\tau$  и  $q$  относительно

$h$ , если при  $\Delta\tau, h \rightarrow 0$  для погрешности аппроксимации выполняется неравенство:

$$\|\delta\| \leq M_1 (\Delta\tau)^p + M_2 h^q,$$

где  $M_1, M_2, p, q$  – положительные константы и не зависят от  $\Delta\tau$  и  $h$ ,

$$\|\delta\| = \max_{k,n} \left| \delta_k^n \right| – \text{максимум модуля погрешности аппроксимации.}$$

Проверка аппроксимации проводится единообразно для всех разностных схем на основе разложения точного решения дифференциальной задачи в узлах сетки в ряд Тейлора. Проиллюстрируем это на примере задачи (2.1)-(2.2). Установим порядок аппроксимации схемы (2.3), оценив порядок невязки  $\delta_h$ . В задаче (2.3) краевые условия аппроксимируются точно, поэтому величина невязки  $\delta_h$  будет определяться только погрешностью, с которой разностное уравнение аппроксимирует исходное, (2.1). Разложим функцию

$$\mathfrak{G}_{k+1}^n = \mathfrak{G}(\xi_k + h, \tau^n), \mathfrak{G}_{k-1}^n = \mathfrak{G}(\xi_k - h, \tau^n), \mathfrak{G}_k^{n+1} = \mathfrak{G}(\xi_k, \tau^n + \Delta\tau)$$

в окрестности точки  $(\xi_k, \tau^n)$  в ряд Тейлора, полагая, что функция  $\mathfrak{G}(\xi, \tau)$  удовлетворяет условиям гладкости, имеет достаточное число ограниченных производных (большинство задач теплообмена удовлетворяет этим требованиям).

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\xi_k + h, \tau^n) &= \mathfrak{G}(\xi_k, \tau^n) + \frac{\partial \mathfrak{G}(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi} h + \frac{\partial^2 \mathfrak{G}(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi^2} \frac{h^2}{2} + \\ &+ \frac{\partial^3 \mathfrak{G}(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 \mathfrak{G}(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi^4} \frac{h^4}{4!} + o(h^5) \\ \mathfrak{G}(\xi_k - h, \tau^n) &= \mathfrak{G}(\xi_k, \tau^n) - \frac{\partial \mathfrak{G}(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi} h + \frac{\partial^2 \mathfrak{G}(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi^2} \frac{h^2}{2} - \\ &+ \frac{\partial^3 \mathfrak{G}(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi^3} \frac{h^3}{3!} - \frac{\partial^4 \mathfrak{G}(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi^4} \frac{h^4}{4!} + o(h^5) \end{aligned}$$

$$\vartheta(\xi_k, \tau^n + \Delta\tau) = \vartheta(\xi_k, \tau^n) + \frac{\partial\vartheta(\xi_k, \tau^n)}{\partial\tau} \Delta\tau + \frac{\partial^2\vartheta(\xi_k, \tau^n)}{\partial\tau^2} \frac{\Delta\tau^2}{2} + o(\Delta\tau^3)$$

На основе выписанных соотношений получим:

$$\frac{\vartheta_k^{n+1} - \vartheta_k^n}{\Delta\tau} = \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)_k + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\tau^2} \frac{\Delta\tau}{2} + o(\Delta\tau^2),$$

$$\frac{\vartheta_{k+1}^n - 2\vartheta_k^n + \vartheta_{k-1}^n}{h^2} = \left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2}\right)_k + \frac{\partial^4\vartheta}{\partial\xi^4} \frac{h^2}{12} + o(h^3).$$

Подставляя эти выражения в (2.3') получим:

$$\delta_h = \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)_k^n - \left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2}\right)_k^n - Q_k^n + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\tau^2} \frac{\Delta\tau}{2} - \frac{\partial^4\vartheta}{\partial\xi^4} \frac{h^2}{12} + o(h^3 + \Delta\tau^2).$$

Поскольку  $\vartheta(\xi, \tau)$  точно удовлетворяет уравнению (2.1), то

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)_k^n - \left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2}\right)_k^n - Q_k^n = 0,$$

$$\delta_h = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\tau^2} \frac{\Delta\tau}{2} - \frac{\partial^4\vartheta}{\partial\xi^4} \frac{h^2}{12} + o(h^3 + \Delta\tau^2).$$

Верхняя оценка модуля  $\delta_h$  определяется соотношением

$$|\delta_h| = \Delta\tau \frac{1}{2} \max \left| \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\tau^2} \right| - h^2 \frac{1}{12} \max \left| \frac{\partial^4\vartheta}{\partial\xi^4} \right| = \Delta\tau M_1 - h^2 M_2.$$

Таким образом, конечно-разностная схема (2.3) аппроксимирует дифференциальное уравнение с первым порядком по  $\Delta\tau$  и вторым порядком по  $h$ . Разностная задача (2.3) аппроксимирует задачу (2.1) – (2.2) на ее решении с точностью  $o(\Delta\tau + h^2)$ .

*Замечание 1.* Если краевые условия задачи или ее правая часть аппроксимируются с погрешностью, то величину этой погрешности необходимо учитывать при оценке  $\delta_h$ . Например, если разностная аппроксимация граничного условия II или III рода проводится по двум точкам, что

обеспечивает первый порядок по пространству, то тогда вся задача имеет порядок аппроксимации  $o(\Delta\tau + h)$ , несмотря на то, что уравнение аппроксимируется с порядком  $o(\Delta\tau + h^2)$ .

*Замечание 2.* Шаги разностной сетки всегда имеют конечную величину, поэтому решение разностной задачи всегда будет отличаться от точного решения дифференциальной задачи. И чем грубее сетка (чем больше  $\Delta\tau$  и  $h$ ), тем значительнее это отличие.

### 2.3. Понятие устойчивости разностной схемы

Кроме точности аппроксимации источником отклонения численного решения от точного являются ошибки округления. Компьютер выполняет арифметические операции с конечным числом значащих цифр. В зависимости от организации вычислительного алгоритма эти ошибки округления в процессе счета могут затухать или возрастать. В первом случае говорят, что *численный метод устойчив*, во втором – *неустойчив*. Для решения практических задач используются только устойчивые алгоритмы.

Проанализируем устойчивость разностной схемы (2.3) для решения задачи (2.1) – (2.2).

Введем обозначение  $r = \Delta\tau/h^2$  – число Куранта и перепишем (2.4) в виде:

$$\theta_k^{n+1} = r\theta_{k+1}^n + (1-2r)\theta_k^n + r\theta_{k-1}^n + \Delta\tau Q_k^n. \quad (2.5)$$

Решение разностной задачи отличается от точного решения в точках  $(\xi_k, \tau^n)$  на величину  $\varepsilon_k^n$ :

$$\theta_k^n - \vartheta_k^n = \varepsilon_k^n.$$

Подставим

$$\theta_k^n = \vartheta_k^n + \varepsilon_k^n$$

в уравнение (2.5) и учитывая, что разностная схема аппроксимирует задачу (2.1) – (2.2) с точностью порядка  $o(\Delta\tau + h^2)$ ,

$$\vartheta_k^{n+1} - r\vartheta_{k+1}^n - (1-2r)\vartheta_k^n - r\vartheta_{k-1}^n - \Delta\tau Q_k^n = \Delta\tau o(\Delta\tau + h^2),$$

получим

$$\varepsilon_k^{n+1} = r\varepsilon_{k+1}^n + (1-2r)\varepsilon_k^n + r\varepsilon_{k-1}^n + \Delta\tau o\left(\Delta\tau + h^2\right). \quad (2.6)$$

Соотношение (2.6) описывает процесс эволюции ошибки при переходе от одного временного уровня к другому. Если  $0 < r < 1/2$ , то коэффициенты при  $\varepsilon_{k+1}^n$ ,  $\varepsilon_k^n$ ,  $\varepsilon_{k-1}^n$  положительны и можно записать неравенство:

$$\begin{aligned} \left|\varepsilon_k^{n+1}\right| &\leq r\left|\varepsilon_{k+1}^n\right| + (1-2r)\left|\varepsilon_k^n\right| + r\left|\varepsilon_{k-1}^n\right| + \Delta\tau o\left(\Delta\tau + h^2\right) \leq \\ &\leq \max\left(\left|\varepsilon_{k+1}^n\right|, \left|\varepsilon_k^n\right|, \left|\varepsilon_{k-1}^n\right|\right) + \Delta\tau o\left(\Delta\tau + h^2\right) \end{aligned}$$

Так как это неравенство справедливо для всех значений  $k$ , то справедливо также

$$\max\left|\varepsilon_k^{n+1}\right| \leq \max\left(\left|\varepsilon_k^n\right|\right) + \Delta\tau o\left(\Delta\tau + h^2\right),$$

которое показывает, что максимальное отклонение  $\varepsilon$  увеличивается за один шаг  $\Delta\tau$  не более чем на величину  $\Delta\tau o\left(\Delta\tau + h^2\right)$ . Следовательно, за  $N$  шагов по времени

$$\max\left|\varepsilon_k^N\right| \leq \max\left(\left|\varepsilon_k^0\right|\right) + N\Delta\tau o\left(\Delta\tau + h^2\right).$$

Если  $\varepsilon_k^0 = 0$  (начальные условия заданы точно), то в пределе получим

$$\max\left|\varepsilon_k^N\right| \leq N\Delta\tau o\left(\Delta\tau + h^2\right).$$

Таким образом, если условие  $0 < r < 1/2$  выполнено, то при стремлении  $\Delta\tau$  и  $h$  к нулю ошибки округления не возрастают со временем, разностная схема (2.5) устойчива.

Рассмотрим теперь случай  $r > 1/2$ . В этом случае знак погрешности  $\varepsilon_k$  в узлах  $\xi_k$  будет чередоваться, и зависеть от индекса  $k$ . Ее можно представить в виде суммы, одно из слагаемых которого имеет вид  $(-1)^k \varepsilon$ . Пусть погрешность округления при аппроксимации начальных условий имеет вид:

$$\varepsilon_k^0 = (-1)^k \varepsilon.$$

Подставляя это выражение в (2.6) получим:

$$\varepsilon_k^1 = r(-1)^{k+1} \varepsilon + (1-2r)(-1)^k \varepsilon + r(-1)^{k-1} \varepsilon = (1-4r)(-1)^k \varepsilon.$$

После  $n$  шагов получим:

$$\varepsilon_k^n = (1-4r)^n (-1)^k \varepsilon.$$

При  $|1-4r| \leq 1$  ошибка затухает, в противном случае – возрастает.

Это приводит к тому, что решение  $\theta_k^n$  становится хаотичным и теряет физический смысл.

Итак, установлено, что при  $r < 1/2$  ( $\Delta\tau < h^2/2$ ) решение  $\theta_k^n$  разностной задачи (2.3) при стремлении  $\Delta\tau$  и  $h$  к нулю будет приближаться к точному решению дифференциальной задачи (2.1), при  $\Delta\tau > h^2/2$  ( $r > 1/2$ ) разностная схема (2.3) неустойчива.

*Теорема сходимости.* Если разностная краевая задача аппроксимирует дифференциальную на ее точном решении и устойчива, то решение разностной задачи при измельчении сетки сходится к точному решению дифференциальной задачи и порядок точности разностной схемы совпадает с порядком аппроксимации.

Теорема сходимости указывает способ построения сходящейся разностной схемы для численного решения дифференциальной задачи: необходимо строить аппроксимирующую ее разностную схему и из многих возможных способов аппроксимации следует выбирать такой, при котором разностная схема будет устойчивой.

Пример. Рассмотрим решение задачи (2.3) с начальным условием вида:  $\vartheta_k^0 = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8$ ,  $\vartheta_4^0 = 1$ .

При  $r = 1/4$  (2.5) запишется в виде:

$$\theta_k^{n+1} = \frac{1}{4}\theta_{k+1}^n + \frac{1}{2}\theta_k^n + \frac{1}{4}\theta_{k-1}^n. \quad (2.7)$$

Подставим  $\vartheta_k^0$  в (2.7), получим  $\theta_k^1$ , затем подставим  $\theta_k^1$  в (2.7), получим  $\theta_k^2$ , и т. д. Результаты расчетов представлены на рисунке 4 а.

При  $r = 1$  (2.5) запишется в виде:

$$\theta_k^{n+1} = \theta_{k+1}^n - \theta_k^n + \theta_{k-1}^n.$$

Аналогичные расчеты представлены на рисунке 4 б.

Видно, что решение становится немонотонным, знакопеременным, хаотическим, и никакого отношения не имеющим к задаче теплопроводности.

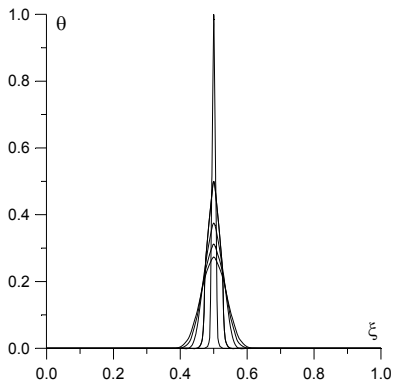


Рис. 4. а.

0	$1/16$	$1/8$	$1/4$	$5/16$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	0
0	0	$1/8$	$1/4$	$3/8$	$1/4$	$1/8$	0	0
0	0	0	$1/4$	$1/2$	$1/4$	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0

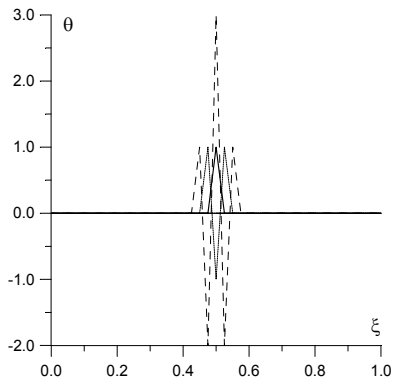


Рис. 4. б.

0	1	-3	6	-7	6	-3	1	0
0	0	1	-2	3	-2	1	0	0
0	0	0	1	-1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0

## 2.4. Исследование устойчивости разностных схем

Исследование устойчивости линейных разностных схем с постоянными коэффициентами проводится при помощи спектрального метода, метода гармоник, с использованием принципа максимума.

Исследуем устойчивость схемы (2.3) методом гармоник. Запишем решение  $\theta_k^n$  в виде:



$$\theta_k^n = \theta_0 \lambda^n e^{i\varphi kh}, \quad (2.8)$$

где  $i$  – мнимая единица,  $\varphi$  – произвольное действительное число. Подставим решение (2.8) в разностную схему (2.3)

$$\frac{\theta_0 e^{i\varphi kh} (\lambda^{n+1} - \lambda^n)}{\Delta\tau} = \frac{\theta_0 e^{i\varphi(k+1)h} - 2\theta_0 e^{i\varphi kh} + \theta_0 e^{i\varphi(k-1)h}}{h^2} \lambda^n,$$

После сокращения:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta\tau} = \frac{e^{i\varphi h} - 2 + e^{-i\varphi h}}{h^2}. \quad (2.9)$$

С использованием формулы Эйлера (2.9) преобразуется к виду:

$$\lambda = 1 + \frac{\Delta\tau}{h^2} (2 \cos(\varphi h) - 2) = 1 - 4 \frac{\Delta\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\varphi h}{2}\right).$$

Из (2.8) решение на следующем временном слое  $\theta_k^{n+1} = \lambda \theta_k^n$ . Оно будет ограничено если выполняется условие

$$|\lambda| < 1.$$

$$\left| 1 - 4 \frac{\Delta\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\varphi h}{2}\right) \right| < 1, \Rightarrow 4 \frac{\Delta\tau}{h^2} < 2, \Rightarrow \frac{\Delta\tau}{h^2} < 1/2.$$

Полученное условие соответствует условию устойчивости схемы (2.3),  $r < 1/2$ .

Принцип максимума для разностного оператора  $L_h$  вида

$$L_h \theta_h = A_k \theta_{k+1} + B_k \theta_k + C_k \theta_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, K-1$$

формулируется следующим образом:

Если для всех точек разностной сетки выполнены условия

$$A_k > 0, \quad C_k > 0, \quad -B_k > A_k + C_k, \quad (2.10)$$

то функция достигает своего наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения только на границе сеточной области. Выполнение условий (2.10) эквивалентно выполнению неравенства

$$\max |\theta_k^{n+1}| \leq \max \left( |\theta_k^n| \right),$$

и такая разностная схема устойчива.

Удовлетворение принципу максимума является для линейной разностной схемы достаточным условием ее устойчивости. Принцип максиму-

ма позволяет проводить исследование устойчивости разностных задач с переменными коэффициентами.

## 2.5. Аппроксимации дифференциальных операторов

Простейший дифференциальный оператор  $\frac{\partial u}{\partial x}$  может быть заменен одним из следующих разностных операторов с соответствующим порядком аппроксимации:

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[ \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k + \dots \right], \quad o(h), \quad (2.11)$$

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[ -\frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k + \dots \right], \quad o(h), \quad (2.12)$$

$$\frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[ \frac{h^2}{6} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_k + \dots \right], \quad o(h^2). \quad (2.13)$$

Выражения (2.11), (2.12) называются правой и левой разностной производной, (2.13) – центральной разностной производной.

При построении разностных алгоритмов иногда применяются трехточечные аппроксимации первой производной:

$$\frac{-3u_k + 4u_{k+1} - u_{k+2}}{2h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[ -\frac{h^2}{3} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_k + \dots \right], \quad o(h^2), \quad (2.14)$$

$$\frac{3u_k - 4u_{k-1} + u_{k-2}}{2h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[ \frac{h^2}{3} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_k + \dots \right], \quad o(h^2). \quad (2.15)$$

Производная  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  обычно аппроксимируется на трехточечном шаблоне:  $x_k - h_{k-1}$ ,  $x_k$ ,  $x_k + h_k$ , при  $h_k \neq h_{k-1}$

$$\frac{2}{h_{k-1} + h_k} \left( \frac{u_{k+1} - u_k}{h_k} - \frac{u_k - u_{k-1}}{h_{k-1}} \right) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k + \left[ \frac{h_k - h_{k-1}}{3} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_k + \dots \right], \quad o(h), \quad (2.16)$$

При  $h_k = h_{k-1} = h$

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k + \left[ \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_k + \dots \right], \quad o(h^2). \quad (2.17)$$

На равномерной сетке  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  аппроксимируется с порядком  $o(h^2)$ , на неравномерной –  $o(h)$ .

Производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  можно аппроксимировать с большим порядком аппроксимации привлекая соответственно большее количество точек, например:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{k-2} - 8u_{k-1} + 8u_{k+1} - u_{k+2}}{12h} + o(h^4),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-u_{k-2} + 16u_{k-1} - 30u_k + 16u_{k+1} - u_{k+2}}{12h^2} + o(h^4).$$

## 2.6. Явная разностная схема для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

Для численного решения уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + Q(\xi, \tau) \quad (2.18)$$

введем равномерную разностную сетку с координатами узлов  $(\xi_k, \tau^n)$ ,

$\xi_k = kh$ ,  $\tau^n = n\Delta\tau$ . Явная разностная схема запишется в виде:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n. \quad (2.19)$$

Она аппроксимирует уравнение (2.18) с порядком  $o(\Delta\tau + h^2)$  и является условно устойчивой при  $r = \frac{\Delta\tau}{h^2} < 1/2$ .

### 2.7. Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

Для решения уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами может быть использована неявная разностная схема, которая строится путем аппроксимации дифференциального оператора  $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}$  разностным на  $n+1$ -ом временном слое:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} + Q_k^n. \quad (2.20)$$

Разностная схема (2.20) аппроксимирует уравнение (2.18) с порядком  $o(\Delta\tau + h^2)$ . Исследуем (2.20) на устойчивость. Обозначим  $\Delta\tau/h^2 = r$  и перепишем (2.20) в виде:

$$r\theta_{k+1}^{n+1} - (1+2r)\theta_k^{n+1} + r\theta_{k-1}^{n+1} = -\theta_k^n - \Delta\tau Q_k^n$$

или

$$A_k\theta_{k+1} + B_k\theta_k + C_k\theta_{k-1} = F_k.$$

Проверим устойчивость схемы по принципу максимума.

$A_k = r > 0$ ,  $C_k = r > 0$ ,  $-B_k = 1 + 2r > A_k + C_k$ . Последнее неравенство выполняется всегда. Значит, неявная схема является абсолютно устойчивой.

### 2.8. Схема с «весами» для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

Уравнение теплопроводности (2.18) аппроксимируем разностным аналогом вида:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = & \sigma \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} + \\ & + (1-\sigma) \frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь  $\sigma$  произвольный вещественный параметр,  $0 \leq \sigma \leq 1$ . Семейство разностных схем вида (2.21) называется схемой с весами для уравнения теплопроводности. При  $\sigma = 0$  получим явную разностную схему (2.19), при  $\sigma = 1$  получим неявную разностную схему (2.20).  $\sigma = 0,5$  – симметричная схема, которую называют схемой Кранка – Николсона. Все разностные алгоритмы, полученные при  $\sigma \neq 0$ , неявные.

Исследование аппроксимации разностной схемы (2.21) проводится на основе разложения точного решения дифференциальной задачи (2.18) в ряд Тейлора и показывает, что она аппроксимирует задачу (2.18) с погрешностью

$$\delta_h = \left[ (\sigma - 0,5)\Delta\tau + \frac{h^2}{12} \right] \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial\tau\partial\xi^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 Q}{\partial\xi^2} + o(\Delta\tau^2 + h^4).$$

При  $\sigma = 0,5$  схема аппроксимирует задачу с погрешностью  $o(\Delta\tau^2 + h^2)$ .

При выборе  $\sigma = 0,5 - \frac{h^2}{12\Delta\tau}$  и  $Q_k^n = Q_k^n + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 Q}{\partial\xi^2}$  имеем схему повы-

шенного порядка точности с погрешностью аппроксимации  $o(\Delta\tau^2 + h^4)$ .

При этом правая часть должна вычисляться по формуле

$$Q_k^n = Q_k^n + \frac{1}{24} (Q_{k+1}^n - 2Q_k^n + Q_{k-1}^n)$$

Как показывают исследования устойчивости схемы (2.21) [2-4] (проведенное спектральным методом) она является устойчивой при любых  $\Delta\tau$  и  $h$  при  $\sigma \geq 0,5$ . В случае  $0 \leq \sigma < 0,5$  для обеспечения устойчивости

необходимо выполнение условия  $\frac{2\Delta\tau}{h^2} < \frac{1}{1-2\sigma}$ .

## 2.9. Явная разностная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности

Для решения уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) + Q(\xi, \tau) \quad (2.22)$$

разностная схема строится следующим образом: Введем обозначение

$$a(\xi, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = W. \text{ Тогда}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial (W)}{\partial \xi} \approx \frac{W_{k+1/2} - W_{k-1/2}}{h}, \quad (2.23)$$

$$W_{k+1/2} = a\left(\xi_k + h/2, \tau^n\right) \frac{\theta_{k+1}^n - \theta_k^n}{h}, \quad (2.24)$$

$$W_{k-1/2} = a\left(\xi_k - h/2, \tau^n\right) \frac{\theta_k^n - \theta_{k-1}^n}{h}, \quad (2.25)$$

Подставляя (2.24), (2.25) в (2.23) и обозначая

$$a\left(\xi_k \pm h/2, \tau^n\right) = a_{k\pm 1/2}$$

получим разностную схему:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta \tau} = \frac{a_{k+1/2} \theta_{k+1}^n - (a_{k+1/2} + a_{k-1/2}) \theta_k^n + a_{k-1/2} \theta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n$$

Если  $a_{k+1/2}$ ,  $k = 0, 1, \dots, K-1$  ограничены

$$M_1 \leq a_{k+1/2} \leq M_2,$$

то исследование схемы на устойчивость приводит к условию

$$M_2 \frac{\Delta \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Отметим, что при  $a_{k+1/2}$  может быть вычислен в средних точках разностной сетки по формулам

$$a_{k+1/2} = a\left(\xi_k + h/2, \tau^n\right),$$

либо как среднее

$$a_{k+1/2} = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}.$$

## 2.10. Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности

Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности (2.22) запишется с использованием (2.23) – (2.25) при  $\theta_k$ , выбранных на верхнем временном слое,  $\theta_k^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} &= \\ &= \frac{a_{k+1/2}\theta_{k+1}^{n+1} - (a_{k+1/2} + a_{k-1/2})\theta_k^{n+1} + a_{k-1/2}\theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} + Q_k^n, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где

$$a_{k\pm 1/2} = a(\xi_k \pm h/2, \tau^{n+1}).$$

Исследование (2.26) на устойчивость показывает устойчивость схемы при любых  $\Delta\tau$  и  $h$ .

При решении уравнений теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры  $a(\xi, \tau, \vartheta)$  значения  $a_{k\pm 1/2}$  определяются по значению температуры  $\theta_k$  на  $n$ -том временном слое.

$$a_{k+1/2} = \frac{1}{2} \left[ a(\xi_{k+1}, \tau^{n+1}, \theta_{k+1}^n) + a(\xi_k, \tau^{n+1}, \theta_k^n) \right].$$

## 2.11. Аппроксимация граничных условий

Аппроксимация граничных условий первого рода (когда на границе задано значение искомой функции) не вызывает затруднений. В этом случае граничные условия аппроксимируются точно, берутся значения заданной функции в соответствующих точках границы.

Аппроксимацию граничных условий третьего рода разберем на примере (аппроксимация граничных условий второго рода делается аналогично). Пусть для уравнения теплопроводности (2.18) на границах  $\xi = 0$  и  $\xi = l$  заданы условия

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vartheta(0, \tau)}{\partial \xi} &= b_0(\tau) \vartheta(0, \tau) + c_0(\tau), \\ \frac{\partial \vartheta(l, \tau)}{\partial \xi} &= b_K(\tau) \vartheta(l, \tau) + c_K(\tau).\end{aligned}\quad (2.27)$$

Запишем равенства (2.27) в виде разностей, используя значения  $\theta_k$  на  $n+1$ -ом временном слое:

$$\begin{aligned}\frac{\theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1}}{h} &= b_0(\tau^{n+1}) \theta_0^{n+1} + c_0(\tau^{n+1}), \\ \frac{\theta_K^{n+1} - \theta_{K-1}^{n+1}}{h} &= b_K(\tau^{n+1}) \theta_K^{n+1} + c_K(\tau^{n+1}),\end{aligned}\quad (2.28)$$

которые аппроксимируют (2.27) с погрешностью  $o(h)$ . Применяя такую аппроксимацию при решении задач теплопроводности любой численной схемой, общая погрешность схемы будет порядка  $o(h)$ .

Рассмотрим разностное соотношение

$$\frac{\theta_1 - \theta_0}{h} = \frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \xi} + \left[ \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right)_0 + o(h^2) \right].\quad (2.29)$$

В силу того, что уравнение (2.18) справедливо в точке  $\xi = 0$  выразим из него

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - Q(\xi, \tau),$$

подставим в (2.29) и выразим  $\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \xi}$ :

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \xi} + o(h^2) = \frac{\theta_1 - \theta_0}{h} - \frac{h}{2} \left[ \frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \tau} - Q(0, \tau) \right]$$

Заменяя производную  $\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \tau}$  разностным соотношением  $\frac{\theta_0^{n+1} - \theta_0^n}{\Delta \tau}$ , получим выражение, аппроксимирующее производную



$\frac{\partial \vartheta(0, \tau)}{\partial \xi}$  с погрешностью  $o(h^2)$ . Подставим это выражение в граничное

условие (2.27) и получим его аппроксимацию с погрешностью  $o(h^2)$ :

$$\frac{\theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1}}{h} - \frac{h}{2} \frac{\theta_0^{n+1} - \theta_0^n}{\Delta \tau} + \frac{h}{2} Q_0^n = b_0(\tau^{n+1}) \theta_0^{n+1} + c_0(\tau^{n+1}). \quad (2.29)$$

Аналогично для граничного условия при  $\xi = l$ :

$$\frac{\theta_K^{n+1} - \theta_{K-1}^{n+1}}{h} + \frac{h}{2} \frac{\theta_K^{n+1} - \theta_K^n}{\Delta \tau} - \frac{h}{2} Q_K^n = b_K(\tau^{n+1}) \theta_K^{n+1} + c_K(\tau^{n+1}). \quad (2.30)$$

При  $b_0(\tau) \equiv 0$  выражение (2.29) аппроксимирует граничное условие второго рода.

## 2.12. Алгоритм решения задачи теплопроводности с использованием явной схемы

Решение уравнения теплопроводности с использованием явной схемы состоит в проведении вычисления значений  $\theta_k^{n+1}$  исходя из значений  $\theta_k^n$  по формуле из (2.19):

$$\theta_k^{n+1} = r\theta_{k+1}^n + (1-2r)\theta_k^n + r\theta_{k-1}^n + \Delta \tau Q_k^n, \quad r = \Delta \tau / h^2$$

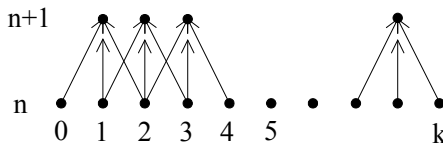


Рис. 5. Определение  $\theta_k^{n+1}$  по явной схеме

Затем определяются значения  $\theta_0^{n+1}$  и  $\theta_K^{n+1}$ . В случае граничных условий третьего рода, при втором порядке аппроксимации граничных условий  $\theta_0^{n+1}$  и  $\theta_K^{n+1}$  находятся по формулам из (2.29), (2.30):

$$\theta_0^{n+1} = \frac{\theta_1^{n+1} + \theta_0^n h^2/2\Delta\tau + Q_0^n h^2/2 - hc_0(\tau^{n+1})}{1 + hb_0(\tau^{n+1}) + h^2/2\Delta\tau},$$

$$\theta_K^{n+1} = \frac{\theta_{K-1}^{n+1} + \theta_K^n h^2/2\Delta\tau + Q_K^n h^2/2 + hc_K(\tau^{n+1})}{1 - hb_K(\tau^{n+1}) + h^2/2\Delta\tau}.$$

Циклическое повторение этих вычислений при  $\Delta\tau < h^2/2$  ( $r < 1/2$ ) приводит к определению значений  $\theta_k$  в любой момент времени  $\tau = n\Delta\tau$ .

### 2.13. Алгоритм решения задачи теплопроводности с использованием неявной схемы

В отличие от явной схемы, которая дает явное выражение для определения  $\theta_k^{n+1}$ , при аппроксимации уравнения теплопроводности с использованием неявной схемы  $\theta_k^{n+1}$  должен определяться из системы линейных уравнений вида (см п. 2.2.7):

$$\begin{cases} B_0\theta_0^{n+1} + C_0\theta_1^{n+1} = F_0, \\ A_k\theta_{k-1}^{n+1} + B_k\theta_k^{n+1} + C_k\theta_{k+1}^{n+1} = F_k, \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ A_K\theta_{K-1}^{n+1} + B_K\theta_K^{n+1} = F_K. \end{cases} \quad (2.31)$$

Например, для схемы (2.20) с граничными условиями (2.28)

$$B_0 = b_0(\tau^{n+1})h + 1, \quad C_0 = -1, \quad F_0 = -c_0(\tau^{n+1})h,$$

$$A_k = r, \quad B_k = -1 - 2r, \quad C_k = r, \quad r = \Delta\tau/h^2, \quad F_k = -\theta_k^n - \Delta\tau Q_k^n,$$

$$A_K = 1, \quad B_K = b_K(\tau^{n+1})h - 1, \quad F_K = -c_K(\tau^{n+1})h.$$

Система уравнений (2.31) имеет не нулевые элементы матрицы коэффициентов только на трех диагоналях, так называемая трехдиагональная матрица.

$$\begin{vmatrix} B_0 & C_0 & & & & \\ A_1 & B_1 & C_1 & & & 0 \\ & A_2 & B_2 & C_2 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & A_{K-1} & B_{K-1} & C_{K-1} \\ 0 & & & & A_K & B_K \end{vmatrix}$$

Такую систему уравнений удобнее всего решать методом прогонки. Будем искать решение системы уравнений в виде:

$$\theta_k^{n+1} = \alpha_k \theta_{k+1}^{n+1} + \beta_k. \quad (2.32)$$

Здесь  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  неизвестные коэффициенты, их называют прогоночными коэффициентами. Равенство (2.32) имеет место при всех  $k$ , поэтому можно записать

$$\theta_{k-1}^{n+1} = \alpha_{k-1} \theta_k^{n+1} + \beta_{k-1}. \quad (2.33)$$

Подставим (2.33) в (2.31), получим:

$$A_k (\alpha_{k-1} \theta_k^{n+1} + \beta_{k-1}) + B_k \theta_k^{n+1} + C_k \theta_{k+1}^{n+1} = F_k$$

И перепишем его в форме (2.32):

$$\theta_k^{n+1} = -\frac{C_k}{A_k \alpha_{k-1} + B_k} \theta_{k+1}^{n+1} + \frac{F_k - A_k \beta_{k-1}}{A_k \alpha_{k-1} + B_k}. \quad (2.34)$$

Сравнение (2.34) и (2.32) дает рекуррентные соотношения для определения прогоночных коэффициентов  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ :

$$\alpha_k = -\frac{C_k}{A_k \alpha_{k-1} + B_k}, \quad \beta_k = \frac{F_k - A_k \beta_{k-1}}{A_k \alpha_{k-1} + B_k}. \quad (2.35)$$

$\alpha_0$  и  $\beta_0$  определяются из первого граничного условия (2.31):

$$\begin{aligned} \theta_0^{n+1} &= -\frac{C_0}{B_0} \theta_1^{n+1} + \frac{F_0}{B_0} = \alpha_0 \theta_1^{n+1} + \beta_0, \Rightarrow \\ \alpha_0 &= -\frac{C_0}{B_0}, \quad \beta_0 = \frac{F_0}{B_0}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Для точки  $k = K - 1$

$$\theta_{K-1}^{n+1} = \alpha_{K-1} \theta_K^{n+1} + \beta_{K-1}. \quad (2.37)$$

Привлекая второе граничное условие из (2.31)

$$A_K \theta_{K-1}^{n+1} + B_K \theta_K^{n+1} = F_K, \quad (2.38)$$

решаем систему уравнений (2.37) (2.38) относительно  $\theta_K^{n+1}$  и находим

$$\theta_K^{n+1} = \frac{F_K - A_K \beta_{K-1}}{A_K \alpha_{K-1} + B_K}. \quad (2.39)$$

Таким образом, схема решения системы уравнений (2.31) состоит в следующей последовательности действий:

По формулам (2.36) вычисляем  $\alpha_0$  и  $\beta_0$

По рекуррентным формулам (2.35) вычисляем последовательно  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{K-1}, \beta_{K-1}$ .

По формуле (2.39) определяем  $\theta_K^{n+1}$ .

По формуле (2.32) вычисляем  $\theta_{K-1}^{n+1}, \theta_{K-2}^{n+1}, \dots, \theta_0^{n+1}$ .

Таким образом, все значения  $\theta_k^{n+1}$  на  $n+1$ -ом временном слое определены и можно перейти к вычислению значений на  $n+2$ -м временном слое и так далее.

## 2.14. Аппроксимация правых частей уравнения теплопроводности

В предыдущем параграфе были рассмотрены выражения источников-стоков тепла  $Q(\xi, \tau)$  зависящих от координаты и времени. Если правая часть зависит от  $\vartheta(\xi, \tau)$ , то вопрос аппроксимации и устойчивости разностной схемы нужно обязательно исследовать. Рассмотрим источники-стоки тепла, линейно зависящие от температуры, вида  $H\vartheta(\xi, \tau)$ , где  $H$  – заданная константа. В одномерном приближении такой вид источника описывает теплообмен удлинённых тел через их боковую поверхность (см. п. 2.1.1).

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} - H\vartheta(\xi, \tau), \quad (2.40)$$

Запишем явную разностную схему для уравнения (2.40).

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta \tau} = \frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} - H\theta_k^n,$$

$$\theta_k^{n+1} = r\theta_{k+1}^n + (1 - 2r - H\Delta\tau)\theta_k^n + r\theta_{k-1}^n. \quad (2.41)$$

Проводя исследование (2.41) на устойчивость по методике, изложенной в п. 2.2.3 получим:

$$(1 - 2r - H\Delta\tau) > 0, \Rightarrow \Delta\tau < \frac{1}{2/h^2 - H}, \text{ или } r < \frac{1}{2 - Hh^2}.$$

Очевидно, что при  $H > 0$  область устойчивости расширяется, при  $H < 0$  – сужается.

В неявной схеме правую часть вида  $H\vartheta(\xi, \tau)$  можно взять на верхнем временном слое. В этом случае

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} - H\theta_k^{n+1}$$

или

$$r\theta_{k+1}^{n+1} + (-1 - 2r - H\Delta\tau)\theta_k^{n+1} + r\theta_{k-1}^{n+1} = -\theta_k^n.$$

Исследование на устойчивость по принципу максимума показывает, что при  $H > 0$  схема абсолютно устойчива, при  $H < 0$  для некоторых значений  $\Delta\tau$  может проявляться неустойчивость. В соответствии с (2.10) имеем:

$$1 + 2r - |H|\Delta\tau > 2r, \Rightarrow |H|\Delta\tau < 1.$$

При выборе  $H\vartheta(\xi, \tau)$  в неявной разностной схеме равной  $H\theta_k^n$  схема остается абсолютно устойчивой.

В случае правой части нелинейно зависящей от температуры  $\vartheta(\xi, \tau)$  в разностной аппроксимации значение  $\theta_k$  берется на  $n$ -том временном слое.

## 2.15. Особенности решения задач в цилиндрических и сферических координатах

В случае осевой или цилиндрической симметрии одномерное уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности записывается в виде:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = \frac{1}{\xi^m} \frac{\partial}{\partial\xi} \left( \xi^m a(\xi, \tau) \frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} \right) + Q(\xi, \tau), \quad (2.42)$$

где  $M_1 \leq a(\xi, \tau) \leq M_2$ ,  $0 \leq \xi \leq R$ ,  $\tau > 0$ ,  $R$  – радиус цилиндра или шара. При  $m=1$  оно описывает распределение тепла в телах цилиндрической формы, при  $m=2$  – сферических. При  $\xi=0$  уравнение (2.42) имеет особенность. В силу симметрии при  $\xi=0$  выполняется  $\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}_{\xi=0} = 0$ . Перепишем уравнение (2.42) при  $\xi=0$  в виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) + \frac{m}{\xi} a(\xi, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + Q(\xi, \tau)$$

и перейдем к пределу во втором слагаемом правой части равенства при  $\xi \rightarrow 0$ , применяя правило Лопиталя получим:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \frac{m}{\xi} a(\xi, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) = m \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(0, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}.$$

Следовательно, в точке  $\xi=0$  вместо (2.42) имеем уравнение

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = (1+m) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(0, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) + Q(0, \tau).$$

Неявная разностная схема для решения уравнения (2.42) на равномерной разностной сетке запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta \tau} = \frac{1}{\xi_k^m h} & \left( \xi_{k+1/2}^m a_{k+1/2}^n \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h} - \right. \\ & \left. - \xi_{k-1/2}^m a_{k-1/2}^n \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} \right) + Q_k^n. \end{aligned} \quad (2.43)$$

При  $\xi=0$  имеем

$$\frac{\theta_0^{n+1} - \theta_0^n}{\Delta \tau} = \frac{1+m}{h} \left( a_{1/2}^n \frac{\theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1}}{h} - a_{-1/2}^n \frac{\theta_0^{n+1} - \theta_{-1}^{n+1}}{h} \right) + Q_0^n$$

С учетом равенства  $a_{1/2}^n = a_{-1/2}^n$  и  $\theta_1^{n+1} = \theta_{-1}^{n+1}$  оно переписывается в виде:

$$\frac{\theta_0^{n+1} - \theta_0^n}{\Delta \tau} = \frac{2(1+m)}{h^2} a_{1/2}^n \left( \theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1} \right) + Q_0^n. \quad (2.44)$$

Система уравнений (2.43) совместно с (2.44) и разностной аппроксимацией соответствующего граничного условия при  $\xi = R$  решается методом прогонки.

## 2.16. Способы задания неравномерной сетки

При численном решении некоторых задач теплопроводности бывает целесообразно вводить неравномерную сетку по пространству. Например, в области больших градиентов температуры (вблизи горячей стенки) необходимо построить сетку с мелким шагом, а вдали от стенки, в области гладкого решения можно использовать большие шаги по пространству.

Уравнение теплопроводности (2.18) на неравномерной сетке в разностной форме по неявной разностной схеме запишется в виде:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \frac{1}{(h_k + k_{k+1})/2} \left( \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h_{k+1}} - \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h_k} \right) + Q_k^n.$$

Как было показано в п 2.2.5 такая разностная схема аппроксимирует уравнение с погрешностью  $o(\Delta\tau + h)$ .

Изменение величины шага по пространству можно организовать различными способами. Единственное требование к изменению шагов сетки, выработанное из опыта проведения расчетов, чтобы два соседних шага отличались по величине не более чем на 20%. Например, для сгущения сетки вблизи стенки можно задать  $h_1$ , а последующие шаги определять по геометрической прогрессии:

$$h_{k+1} = h_k q^k.$$

Другой способ введения неравномерной сетки – преобразование координат (рис. 6).

Выберем функцию  $\eta = \eta(\xi)$  и в уравнении (2.18) проведем замену переменных.

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = \frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2} = \frac{\partial}{\partial\xi} \left( \frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} \right) = \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial\xi} \right) \frac{\partial\eta}{\partial\xi}$$

и в новых переменных уравнение (2.18) запишется в виде:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial\xi} \right) \frac{\partial\eta}{\partial\xi} + Q(\eta, \tau). \quad (2.45)$$

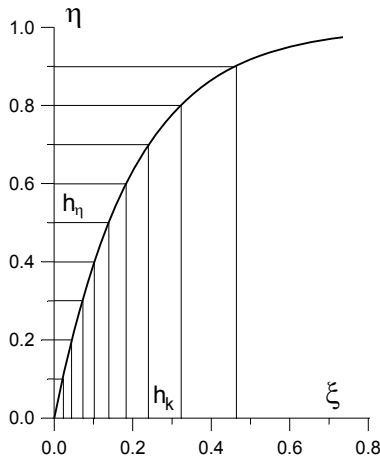


Рис. 6. Преобразование координат для введения неравномерной сетки

При конкретном виде функции  $\eta = \eta(\xi)$  ее производная  $\partial\eta/\partial\xi$  берется и также будет в виде функции. Выбирая по переменной  $\eta$  равномерный шаг, вдоль  $\xi$  будем иметь неравномерный шаг (рис. 6). В разностной форме уравнение (2.45) принимает вид:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \frac{1}{h_\eta} \left( \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h_\eta} \left( \frac{\partial\eta}{\partial\xi} \right)_{k+1/2} - \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h_\eta} \left( \frac{\partial\eta}{\partial\xi} \right)_{k-1/2} \right) \left( \frac{\partial\eta}{\partial\xi} \right)_k + Q_k^n.$$

Вместе с разностной аппроксимацией соответствующих граничных условий математической постановки задачи эта система уравнений решается методом прогонки.

Например, пусть выбрана функция  $\eta(\xi) = 1 - e^{-\gamma\xi}$ , имеющая вид, представленный на рисунке 6. Такое преобразование переводит область  $0 < \xi < \infty$  в область  $0 < \eta < 1$ .  $\partial\eta/\partial\xi = \gamma e^{-\gamma\xi} = \gamma(1 - \eta(\xi))$  и тогда, введя равномерный шаг по переменной  $\eta$ ,  $h_\eta$ , вычисляем производные в соот-



ветствующих                      точек                      сетки                       $\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)_k = \gamma(1 - h_\eta k),$

$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)_{k \pm 1/2} = \gamma(1 - h_\eta(k \pm 1/2))$  и получаем неравномерную сетку по  $\xi$ .

## 2.17. Метод прямых для решения уравнения теплопроводности

Для решения уравнения теплопроводности применяется метод прямых.

В уравнении теплопроводности (2.18)

$$\frac{\partial \vartheta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + Q(\xi, \tau)$$

запишем в разностной форме производную по пространству:

$$\frac{d\theta_k(\tau)}{d\tau} = \frac{\theta_{k+1}(\tau) - 2\theta_k(\tau) + \theta_{k-1}(\tau)}{h^2} + Q_k(\tau), \quad (2.46)$$

где принято обозначение  $\theta_k(\tau) = \theta_k(\xi_k, \tau)$ ,  $k = 1, 2, \dots, K-1$ , а частная производная заменена на обыкновенную производную.

Уравнения (2.46) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $\theta_k(\tau)$ , которая может быть решена любым из методов для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 2.18. Пример численного решения задачи о теплопроводности в стержне конечной длины

Решим задачу о переносе тепла в стержне заданной длины в следующей постановке:

Пусть дан стержень вещества длины  $l$  с известными теплофизическими характеристиками, имеющий начальную температуру  $T_1$ . Внутри стержня имеются источники и стоки тепла,  $Q(x, t)$ . На левой границе стержня задана температура  $T_1$ , на правой границе происходит теплообмен по закону Ньютона со средой температуры  $T_2$ . На боковой поверхности стержня происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей

температуру, равную  $T_0$ . Математическая постановка задачи имеет вид (п. 2.1.1):

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\alpha_0}{R}(T - T_0) + Q(x, t), \quad (2.47)$$

Начальное условие:  $T(x, 0) = T_1$ ,

Граничные условия:

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_1, \\ \lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} &= -\alpha_2(T(l, t) - T_2). \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$0 \leq x \leq l, \quad t > 0$$

Уравнение (2.47) с начальными и граничными условиями (2.48) запишем в безразмерной форме, выбрав в качестве масштабов рекомендованные в п. 2.1.3, получим:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} - H\vartheta + \bar{Q}(\xi, \tau), \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi, 0) &= 1, \\ \vartheta(0, \tau) &= 1. \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \vartheta(1, \tau)}{\partial \xi} = -Bi(\vartheta(1, \tau) - \vartheta_2),$$

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \tau > 0,$$

где

$$\xi = x/l, \quad \tau = t/t_*, \quad t_* = c\rho l^2/\lambda, \quad \vartheta = \frac{T(x, t) - T_0}{T_1 - T_0}, \quad H = \frac{2\alpha_0 l^2}{R\lambda},$$

$$\bar{Q}(\xi, t) = \frac{Q(\xi, \tau)l^2}{\lambda(T_1 - T_0)}, \quad Bi = \frac{\alpha_2 l}{\lambda},$$

Запишем неявную разностную схему для решения задачи (2.49)-(2.50)

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta \tau} = \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} - H\theta_k^{n+1} + \bar{Q}_k^n. \quad (2.51)$$

Записав (2.51) в форме

$$A_k \theta_{k-1}^{n+1} + B_k \theta_k^{n+1} + C_k \theta_{k+1}^{n+1} = F_k,$$

получим

$$A_k = r, C_k = r, B_k = -1 - 2r - H\Delta\tau, r = \Delta\tau/h^2, F_k = -\theta_k^n - \Delta\tau\bar{Q}_k^n.$$

В соответствии с методом прогонки, будем искать решение системы линейных уравнений в виде (см. п. 2.2.13)

$$\theta_k^{n+1} = \alpha_k \theta_{k+1}^{n+1} + \beta_k, \\ \alpha_k = -\frac{C_k}{A_k \alpha_{k-1} + B_k}, \beta_k = \frac{F_k - A_k \beta_{k-1}}{A_k \alpha_{k-1} + B_k}.$$

$\alpha_0$  и  $\beta_0$  определяются из граничного условия при  $\xi = 0$ :

$$\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1.$$

Для точки  $k = K - 1$  выполняется:

$$\theta_{K-1}^{n+1} = \alpha_{K-1} \theta_K^{n+1} + \beta_{K-1}.$$

Запишем второе граничное условие в разностной форме:

$$\frac{\theta_K^{n+1} - \theta_{K-1}^{n+1}}{h} = -Bi(\theta_K^{n+1} - \vartheta_2).$$

Из последних двух равенств выразим  $\theta_K^{n+1}$ :

$$\theta_K^{n+1} = \frac{\beta_{K-1} + Bi h \vartheta_2}{1 + Bi h - \alpha_{K-1}}$$

Таким образом, зная все  $\alpha_k, \beta_k$ , и определив  $\theta_K^{n+1}$  можно найти все  $\theta_k^{n+1}$ ,  $k = K - 1, K - 2, \dots, 2, 1, 0$ , по формуле  $\theta_k^{n+1} = \alpha_k \theta_{k+1}^{n+1} + \beta_k$ .

Для численного решения задачи была составлена программа, представленная ниже. Тестирование программы проводилось на решении следующих задач:

1. При  $Bi = 0$ ,  $H = 0$  и  $\bar{Q} = 0$  решением задачи (2.49)-(2.50) является  $\vartheta(\xi, \tau) = 1$ . При численном решении задачи было получено  $\theta_k^n = 1$  при любых  $k = 1, 2, 3, \dots, K - 1, K$  и  $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ .

2. При  $Bi = const$ ,  $H = 0$  и  $\bar{Q} = const$  при  $\tau \rightarrow \infty$  задача (2.49)-(2.50) становится задачей о нахождении стационарного поля температуры в стержне:

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\xi^2} = -\bar{Q}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad \bar{Q} = const. \quad (2.52)$$

Граничные условия:

$$\vartheta(0) = 1, \quad \frac{d\vartheta(1)}{d\xi} = -Bi(\vartheta(1) - \vartheta_2).$$

Общее решение задачи (2.52)

$$\vartheta(\xi) = -\bar{Q}\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  находим из граничных условий, получаем:

$$\vartheta(\xi) = -\bar{Q}\frac{x^2}{2} + \frac{Bi\bar{Q}/2 + \bar{Q} - Bi + Bi\vartheta_2}{1 + Bi}x + 1. \quad (2.53)$$

При численном решении задачи (2.49)-(2.50) при  $Bi = 1$ ,  $H = 0$  и  $\bar{Q} = 0$ ,  $\vartheta_2 = 0$  до времени, большего чем  $\tau = 2$ , получается стационарное распределение температуры, совпадающее с (2.53) (рис. 7 а), при  $Bi = 1$ ,  $H = 0$ ,  $\bar{Q} = 4$ ,  $\vartheta_2 = 0$  получается решение также совпадающее с (2.53) (рис. 7 б). Такое решение называется решение стационарной задачи методом установления.

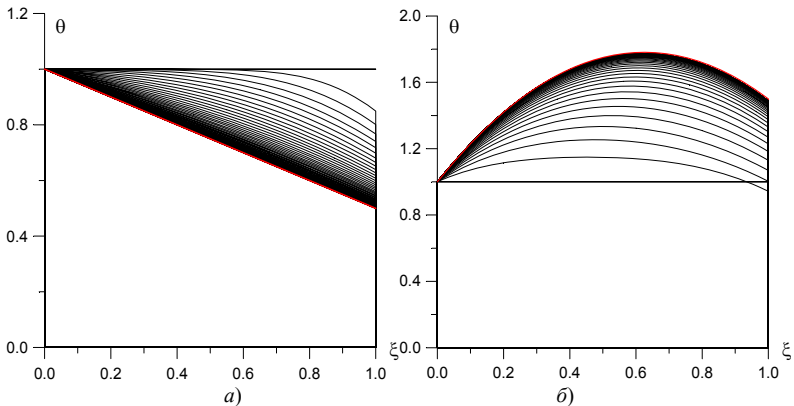


Рис. 7. Сравнение численного решения задачи с аналитическим

3. Для получения нестационарного решения задачи (2.49)-(2.50) с заданной точностью необходимо проводить исследование сходимости решения при уменьшении величины шага по пространству. Это делается следующим образом: Проводится расчет задачи до некоторого фиксиро-

ванного момента времени  $\tau_{end}$  при заданной величине шага по пространству,  $h = h_1 = 1/(K_1 - 1)$ . В процессе решения через фиксированное время  $\Delta\tau_{write}$  проводится запись полей температуры в файл данных. Затем повторяется расчет с шагом  $h = h_1/2 = 1/(K_2 - 1)$ , и также проводится запись результатов расчетов через фиксированное время  $\Delta\tau_{write}$ . Затем проводится сравнение полей температуры в соответствующие моменты времени. Если они отличаются существенно, то нужно шаг по пространству еще уменьшить, если отличие мало, то шаг по пространству можно фиксировать и решать задачу с этим шагом по пространству. Это было проделано при проведении тестовых расчетов, изложенных в п. 2, и выяснено, что величина шага  $h$ , с которым необходимо проводить расчеты должна быть равна 0,025, или меньше.

После проведения исследования схемы и тестирования программы была решена задача при заданных значениях параметров и источнике тепла, зависящего от координаты. Расчеты были проведены при  $Bi = 2$ ,  $H = 3$ ,  $\bar{Q} = 10(1 - x)$ ,  $\vartheta_2 = 0$ . Результаты представлены на рисунке 8. Видно, что в области, где источники тепла больше температура высокая, Отвод тепла из этой области идет в стенку на границе  $\xi = 0$ , в среду, находящуюся в контакте с границей стержня при  $\xi = 1$  и в окружающую среду через боковые стенки стержня.

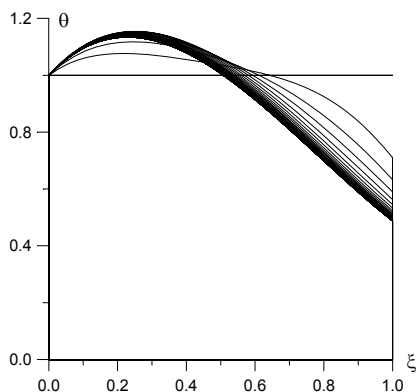


Рис. 8. Поля температуры в стержне в фиксированные моменты времени через 0,02 с.

$$Bi = 2, H = 3, \bar{Q} = 10(1 - x), \vartheta_2 = 0$$

Текст программы на языке Pascal:

```
Program schema;
const
  n = 41;           {Количество точек разностной сетки}
Var
  i,kwri : integer;
  teta,a,b,c,f,alfa,beta : array[1..n] of real;
  Bi,Toc,aaa,r,h,tau,stime,teta0,perwri,
  Hvne,Qq : real;
  fout : text;
begin

  {Описываем файл для записи результатов}
  Assign(fout,'rez77.dat');
  Rewrite(fout);

  {Задаем значения переменных в программе}
  aaa:=0.0;
  r := 1.0;         {Число Куранта}
  h := 1.0/(n-1);  {Величина шага по пространству}
  tau := r*h*h;    {Величина шага по времени}
  perwri:=0.02;    {Шаг по времени выдачи результатов в
                   файл данных}
  kwri:=1;         {Счетчик выдач в файл данных}
  stime:=0.0;      {Текущее время процесса теплопередачи}
  teta0:=1.0;      {Начальная температура}
  Bi:=2.0;         {Число Био}
  Toc:=0.0;        {Температура среды на правой границе}
  Hvne:=3.0;       {Коэффициент теплоотдачи в
                   окружающую среду}
  Qq:=10.0;        {Интенсивность источников тепла}

  {Задаем начальную температуру в стержне}
  for i:= 1 to n do
    begin
      teta[i] := teta0;
      writeln(fout,h*(i-1),' ',teta[i]:6:4,' ');
    end;
  writeln(fout,h*(n-1),' 1');
  writeln(fout,'0',' 1');
  Stime:= 0;

  {Проводим вычисления температуры на новом временном слое}
```

```

while (Stime <= tau*3000.0) do
  begin
    Stime := Stime+tau;

    {Вычисляем коэффициенты в системе линейных уравнений}
    for i:= 1 to n do
      begin
        a[i]:= r;
        b[i]:= -2*r-1.0-Hvne*tau;
        c[i]:= r;
        f[i]:= -teta[i]-Qq*tau*(1.0-h*(i-1));
      end;

    {Вычисляем начальные прогоночные коэффициенты}
    alfa[1]:= 0.0;
    beta[1]:=1.0;

    {Вычисляем все прогоночные коэффициенты}
    for i:= 2 to n do
      begin
        alfa[i] :=-a[i]/(b[i]+c[i]*alfa[i-1]);
        beta[i] :=(f[i] - beta[i-1]*c[i])/ (b[i]+c[i]*alfa[i-1]);
      end;

    {Вычисляем температуру на правой границе}
    teta[n]:= (Bi*Тос*h+beta[n-1])/(1.0-alfa[n-1]+Bi*h);

    {Вычисляем температуру во всех внутренних точках}
    for i := n-1 downto 1 do
      teta[i] := alfa[i]*teta[i+1] + beta[i];
    {С периодичностью по времени perwri записываем в
    файл результаты (поле температуры)}
    if stime > perwri*kwri then begin
      for i:=1 to n do
        writeln(fout,h*(i-1),' ',teta[i]:6:4,' ');
        writeln(fout,h*(n-1),' ',aaa);
        writeln(fout,h*0,' ',aaa);
        kwri:=kwri+1; writeln(kwri);
      end;
    end;
  readln;
  close(fout);
end.

```

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Реальные физические процессы протекают во времени и пространстве, имеющем три измерения. При построении разностных схем переход к многомерным задачам теплопроводности не вызывает принципиальных трудностей. Однако число неизвестных в системе разностных уравнений значительно возрастает, увеличивается число арифметических операций, необходимых для ее решения.

Рассмотрим задачу Коши для простейшего двухмерного уравнения теплопроводности.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + Q(x, y, \tau), \quad \vartheta(x, y, 0) = \Phi(x, y). \quad (3.1)$$

Часто бывает удобно уравнение (3.1) записать в операторной форме. Введем обозначение:

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

тогда уравнение (3.1) переписывается в виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = L_x \vartheta + L_y \vartheta + Q(x, y, \tau).$$

Введем разностную сетку с шагами  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $\Delta \tau$  по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $\tau$  соответственно. Примем обозначения:

$$\begin{aligned} \theta_{k,l}^n &= \theta(kh_x, lh_y, n\Delta \tau), \\ \Lambda_x \theta^n &= \frac{\theta_{k+1,l}^n - 2\theta_{k,l}^n + \theta_{k-1,l}^n}{h_x^2}, \\ \Lambda_y \theta^n &= \frac{\theta_{k,l+1}^n - 2\theta_{k,l}^n + \theta_{k,l-1}^n}{h_y^2}. \end{aligned}$$

Для задачи (3.1) запишем две схемы:

$$\frac{\theta_{k,l}^{n+1} - \theta_{k,l}^n}{\Delta \tau} = \Lambda_x \theta^n + \Lambda_y \theta^n + Q_{k,l}^n, \quad (3.2)$$



$$\frac{\theta_{k,l}^{n+1} - \theta_{k,l}^n}{\Delta\tau} = \Lambda_x \theta^{n+1} + \Lambda_y \theta^{n+1} + Q_{k,l}^n. \quad (3.3)$$

Первая схема (3.2) явная, в которой  $\theta_{k,l}^{n+1}$  определяется через пять значений  $\theta$  на нижнем временном слое. Она устойчива при  $r = \Delta\tau/h^2 < 1/4$ . Для вычисления  $\theta_{k,l}^{n+1}$  требуется много процессорного времени, поэтому схема (3.2) является малоэффективной.

Вторая схема (3.3) неявная. Она устойчива при любых  $h_x, h_y, \Delta\tau$ , но для вычисления  $\theta_{k,l}^{n+1}$  необходимо решать систему уравнений с использованием матричной прогонки, требующей большого объема вычислений.

Для решения многомерных задач математической физики применяются разностные методы, основанные на методе дробных шагов. Такие схемы обладают свойством абсолютной устойчивости и для перехода с одного временного слоя на другой требуют числа арифметических операций пропорционального числу узлов разностной сетки. Такая экономичность разностных схем достигается благодаря тому, что решение сложной многомерной задачи сводится к решению ряда одномерных, решаемых методом прогонки.

### 3.1. Метод покоординатного расщепления

Рассмотрим вариант метода дробных шагов – метод покоординатного расщепления на примере решения двумерного уравнения теплопроводности (3.1). Рассмотрим промежуток времени  $\Delta\tau = \tau^{n+1} - \tau^n$  и условно разделим процесс распространения тепла в плоскости  $(x, y)$  на два этапа. На первом этапе будем считать, что тепло распространяется только в направлении оси  $x$ , на втором – в направлении  $y$ . С учетом этой гипотезы разностная схема запишется в виде:

$$\frac{\tilde{\theta}_{k,l} - \theta_{k,l}^n}{\Delta\tau} = \frac{\tilde{\theta}_{k+1,l} - 2\tilde{\theta}_{k,l} + \tilde{\theta}_{k-1,l}}{h_x^2}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\theta_{k,l}^{n+1} - \tilde{\theta}_{k,l}}{\Delta\tau} = \frac{\theta_{k,l+1}^{n+1} - 2\theta_{k,l}^{n+1} + \theta_{k,l-1}^{n+1}}{h_y^2} + Q_{k,l}^n. \quad (3.5)$$

или в операторной форме:

$$\frac{\tilde{\theta}_{k,l} - \theta_{k,l}^n}{\Delta\tau} = \Lambda_x \tilde{\theta}, \quad (3.4')$$

$$\frac{\theta_{k,l}^{n+1} - \tilde{\theta}_{k,l}}{\Delta\tau} = \Lambda_y \theta^{n+1} + Q_{k,l}^n. \quad (3.5')$$

Разностная схема (3.4) – (3.5) позволяет по известным значениям  $\theta_{k,l}^n$  в два этапа определить  $\theta_{k,l}^{n+1}$ . На первом этапе по заданным  $\theta_{k,l}^n$  вычисляются  $\tilde{\theta}_{k,l}$ , на втором – по полученным  $\tilde{\theta}_{k,l}$  вычисляются  $\theta_{k,l}^{n+1}$ . Разностная схема (3.4) – (3.5) неявная по обоим направлениям, абсолютно устойчивая, решается методом прогонки. Разностная схема (3.6) – (3.7) аппроксимирует исходную задачу с погрешностью порядка  $o((\Delta\tau) + h_x^2 + h_y^2)$ .

Например, пусть нужно найти изменение поля температуры в прямоугольном сечении тела (рис. 9) при заданных граничных условиях первого рода и начальных условиях:

$$\theta(x, y, 0) = \Phi(x, y), \quad \theta|_B = \Psi(B),$$

$B$  – точки, принадлежащие границе тела.

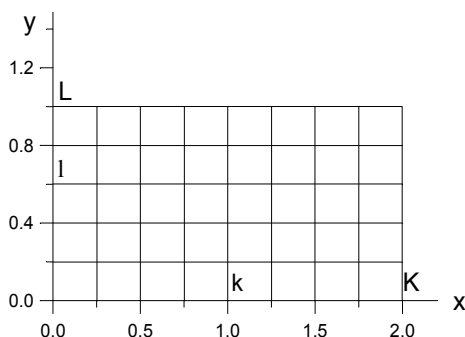


Рис. 9. Разностная сетка для решения двухмерного уравнения теплопроводности

Алгоритм решения состоит в последовательности следующих действий:

1. Решаем уравнения (3.4) методом прогонки, вдоль  $x$ , для

$l = 1, 2, 3, \dots, L - 1$ . В результате во всех внутренних точках  $k, l$  будут определены  $\tilde{\theta}_{k,l}$ . На границе  $\tilde{\theta}_{k,l}$  определяются граничным условием.

2. Решаем уравнения (3.5) методом прогонки, вдоль  $y$ , для  $k = 1, 2, 3, \dots, K - 1$ . В результате во всех внутренних точках  $k, l$  будут определены  $\theta_{k,l}^{n+1}$ . На границе  $\theta_{k,l}^{n+1}$  определяются граничным условием.

Для определения поля температуры на последующем временном слое повторяем вычисления по п. 1, 2.

### 3.2. Метод продольно-поперечной прогонки

Для вычисления  $\theta_{k,l}^{n+1}$  из известных  $\theta_{k,l}^n$  строится следующая разностная схема (с учетом принятых в п. 2.3.1 обозначений):

$$\frac{\tilde{\theta}_{k,l} - \theta_{k,l}^n}{0,5\Delta\tau} = \Lambda_x \tilde{\theta} + \Lambda_y \theta^n + Q_{k,l}^n, \quad (3.6)$$

$$\frac{\theta_{k,l}^{n+1} - \tilde{\theta}_{k,l}}{0,5\Delta\tau} = \Lambda_x \tilde{\theta} + \Lambda_y \theta^{n+1} + Q_{k,l}^n. \quad (3.7)$$

Переход с  $n$ -того временного слоя к  $n+1$ -му осуществляется в два этапа. Сначала вычисляются промежуточные значения  $\tilde{\theta}_{k,l}$  с аппроксимацией вторых производных по координатам неявно по  $x$  и явно по  $y$ . На втором этапе вычисляются  $\theta_{k,l}^{n+1}$  из полученных промежуточных значений  $\tilde{\theta}_{k,l}$  с аппроксимацией вторых производных по координатам явно по  $x$  и неявно по  $y$ .

Разностная схема (3.6) – (3.7) аппроксимирует исходную задачу с погрешностью порядка  $O((\Delta\tau)^2 + h_x^2 + h_y^2)$  и абсолютно устойчива.

### 3.3. Разностные схемы для трехмерных уравнений теплопроводности

Приведем некоторые экономичные разностные алгоритмы для численного решения трехмерных уравнений теплопроводности с заданными граничными и начальными условиями:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = L_x \vartheta + L_y \vartheta + L_z \vartheta + Q(x, y, z, \tau). \quad (3.8)$$

$$\theta(x, y, z, 0) = \Phi(x, y, z), \quad \theta|_B = \Psi(B), \quad (3.9)$$

$B$  – точки, принадлежащие границе тела.

Решение задачи (3.8) – (3.9) может быть получено с помощью двухциклической схемы расщепления:

$$\begin{aligned} \theta_{k,l,m}^{n-2/3} &= \theta_{k,l,m}^{n-1} + 0.5\Delta\tau\Lambda_x \left( \theta^{n-2/3} + \theta^{n-1} \right), \\ \theta_{k,l,m}^{n-1/3} &= \theta_{k,l,m}^{n-2/3} + 0.5\Delta\tau\Lambda_y \left( \theta^{n-1/3} + \theta^{n-2/3} \right), \\ \theta_{k,l,m}^n &= \theta_{k,l,m}^{n-1/3} + 0.5\Delta\tau\Lambda_z \left( \theta^n + \theta^{n-1/3} \right) + 2\Delta\tau Q_{k,l,m}^n, \\ \theta_{k,l,m}^{n+1/3} &= \theta_{k,l,m}^n + 0.5\Delta\tau\Lambda_x \left( \theta^{n+1/3} + \theta^n \right), \\ \theta_{k,l,m}^{n+2/3} &= \theta_{k,l,m}^{n+1/3} + 0.5\Delta\tau\Lambda_y \left( \theta^{n+2/3} + \theta^{n+1/3} \right), \\ \theta_{k,l,m}^{n+1} &= \theta_{k,l,m}^{n+2/3} + 0.5\Delta\tau\Lambda_x \left( \theta^{n+1} + \theta^{n+2/3} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Система разностных уравнений (3.10) решается в интервале  $\tau^{n-1} < \tau < \tau^{n+1}$ , имеет второй порядок относительно  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $h_z$ ,  $\Delta\tau$  и абсолютно устойчива.

Для решения задач теплопроводности в трехмерной постановке можно использовать метод предиктор-корректор:

$$\begin{aligned} \theta_{k,l,m}^{n+1/4} &= \theta_{k,l,m}^n + 0.5\Delta\tau\Lambda_x \theta^{n+1/4}, \\ \theta_{k,l,m}^{n+1/2} &= \theta_{k,l,m}^{n+1/4} + 0.5\Delta\tau\Lambda_y \theta^{n+1/2}, \\ \theta_{k,l,m}^{n+3/4} &= \theta_{k,l,m}^{n+1/2} + 0.5\Delta\tau\Lambda_z \theta^{n+3/4}, \\ \theta_{k,l,m}^{n+1} &= \theta_{k,l,m}^n + \Delta\tau \left( \Lambda_x \theta^{n+3/4} + \Lambda_y \theta^{n+3/4} + \Lambda_z \theta^{n+3/4} + Q_{k,l,m}^{n+1/2} \right). \end{aligned}$$

Первые три неявные уравнения играют роль предиктора, последнее явное служит корректором. Метод имеет второй порядок точности относительно  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $h_z$  и условно устойчив,  $\Delta\tau \square \min(h_x, h_y, h_z)$ .

### 3.4. Пример решения двухмерного уравнения теплопроводности методом продольно-поперечной прогонки

Решить краевую задачу

$$\text{ср } \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q(t), \quad 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y.$$

Начальные условия:

$$T(0, x, y) = 300 \text{ К.}$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial T(t, x, 0)}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial T(t, x, L_y)}{\partial t} = 0;$$

$$T(t, 0, y) = 300; \quad T(t, L_x, y) = 1000.$$

Решение задачи будем находить с помощью разностной схемы (3.6) - (3.7). Область решения покрывается разностной сеткой из  $N_x \times N_y = 400$  точек, координаты которых будут вычисляться по формулам:  $x_i = h_x i$ ,  $y_j = h_y j$ ,  $0 \leq k \leq N_x$ ,  $0 \leq l \leq N_y$ , где  $h_x = L_x / N_x$ ,  $h_y = L_y / N_y$ .

В соответствие со схемой (3.6)-(3.7) функция во внутренних точках у области на  $k+1/2$  шаге по времени будет определяться по формуле:

$$A\tilde{\theta}_{i-1,j} + B\tilde{\theta}_{i,j} + C\tilde{\theta}_{i+1,j} = \theta_{i,j}^k + 0.5 \Delta\tau \left( \Lambda_y \theta^k + Q_{i,j}^k \right).$$

решение ищется методом прогонки по направлению  $x$ . для  $j = 1, 2, 3, \dots, N_y - 1$ . На границах  $\tilde{\theta}_{i,j}$  определяются граничными условиями.

На втором этапе определяется значение функции на  $k+1$  шаге по времени:

$$A\theta_{i,j-1}^{k+1} + B\theta_{i,j}^{k+1} + C\theta_{i,j+1}^{k+1} = \bar{\theta}_{i,j} + 0.5 \Delta\tau \left( \Lambda_x \bar{\theta} + Q_{i,j}^k \right).$$

решение ищется методом прогонки по направлению  $y$ . для  $i = 1, 2, 3, \dots, N_x - 1$ . Значения функции на границах определяются граничными условиями.

Ниже приведен пример программы для численного решения поставленной задачи, написанной на языке Фортран.

### 3.4.1. Программа на языке Фортран

```
program PPP
implicit none
integer, parameter:: Nx=20 ! число разбиений по координате x
integer, parameter:: Ny=20 ! число разбиений по координате y
real, parameter:: xn=0 ! начальная точка x
real, parameter:: xk=0.1 ! конечная точка x
real, parameter:: yn=0 ! начальная точка y
real, parameter:: yk=0.1 ! конечная точка y
real, parameter:: c_t=700 ! теплоемкость материала
real, parameter:: ro_t=7500 ! плотность материала
real, parameter:: lm_t=30 ! теплопроводность материала
real, parameter:: time_k=1000 ! конечное время расчета
real, parameter:: Tb=300 ! Начальная температура
real, parameter:: Txl=300 ! Температура на левой границе
real, parameter:: Txp=1000 ! Температура на правой границе
real, parameter:: dt=1d-3 ! Шаг по времени
real T(Nx+1, Ny+1), TET(Nx+1, Ny+1), x, y, alx(Nx+1), betx(Nx+1), aly(Nx+1), be-
ty(Nx+1)
real time, Qi, hx, hy, kappa, dh, A, B, C, F, kur_y, kur_x
integer i, j, tk, k, kp
open (1,file='res.dat')
hx=(xk-xn)/Nx ! шаг по пространству в направлении x
hy=(yk-yn)/Ny ! шаг по пространству в направлении y
kappa=lm_t/c_t/ro_t
kur_x=dt*kappa/hx/hx
kur_y=dt*kappa/hy/hy
tk=time_k/dt ! количество шагов по времени
kp=1d4 ! Интервал выдачи
! Блок начальных данных
time=0
do i=1,Nx
do j=1,Ny
T(i,j)=Tb
enddo
enddo
! Основной цикл
do k=1, tk
time=time+dt
! Расчет температуры в направлении x
do j=2, Ny
alx(1)=0 ! Граничное условие в T(0, y)
```

```

betx(1)=Tx1 ! Граничное условие в T(0, y)
A=-kur_x/2.0
B=1.0+kur_x
C=-kur_x/2.0
do i=2, Nx
  F=T(i,j)+kur_y*(T(i,j+1)-2.0*T(i,j)+T(i,j-1))/2.0+qi(time)*dt/2.0
  alx(i)=-C/(B+A*alx(i-1))
  betx(i)=(F-A*betx(i-1))/(B+A*alx(i-1))
enddo
TET(Nx+1,j)=Txp ! Граничное условие в T(Lx, y)
! TET - вспомогательная температура, соответствует температуре с "черточкой"
do i=Nx, 1, -1
  TET(i,j)=TET(i+1,j)*alx(i)+betx(i)
enddo
enddo
! Дополняем расчет в направлении x граничными значениями температуры на
верхней (y=yk) и нижней (y=yл) границах
TET(1:Nx+1,1)=TET(1:Nx+1,2) ! граничное условие для T(x, 0)
TET(1:Nx+1,Ny+1)=TET(1:Nx+1,Ny) ! граничное условие для T(x, Ly)
! Расчет температуры в направлении y
do i=2, Nx
  aly(1)=1 ! Граничное условие в T(x, 0)
  bety(1)=0 ! Граничное условие в T(x, 0)
  A=-kur_y/2.0
  B=1.0+kur_y
  C=-kur_y/2.0
  do j=2, Ny
    F=TET(i,j)+kur_y*(TET(i+1,j)-2.0*TET(i,j)+TET(i-
1,j))/2.0+qi(time)*dt/2.0
    aly(j)=-C/(B+A*aly(j-1))
    bety(j)=(F-A*bety(j-1))/(B+A*aly(j-1))
  enddo
  T(i,Ny+1)=bety(Ny)/(1-aly(Ny)) ! Граничное условие в T(x, Ly)
do j=Ny, 1, -1
  T(i,j)=T(i,j+1)*aly(j)+bety(j)
enddo
enddo
! Дополняем расчет в направлении y граничными значениями температуры на
левой (x=xл) и правой (x=xк) границах
T(1,1:Ny+1)=Tx1 ! граничное условие для T(0, y)
T(Nx+1,1:Ny+1)=Txp ! граничное условие для T(Lx, y)
! Печать результатов в файл

```

```

if (k==kp) then
  open (1,file='res.dat') ! для "затирания" предыдущего поля температуры
  do i=1, Nx+1
    do j=1, Ny+1
      write (1, *) (i-1)*hx, (j-1)*hy, T(i,j)
    enddo
  enddo
  write(*,*) time
  kp=kp+1d4
  close (1)
endif
enddo
end
real function qi(time)
real time
qi=0.0!1000*sin(time)
end

```

Результаты расчета представлены на рис. 10:

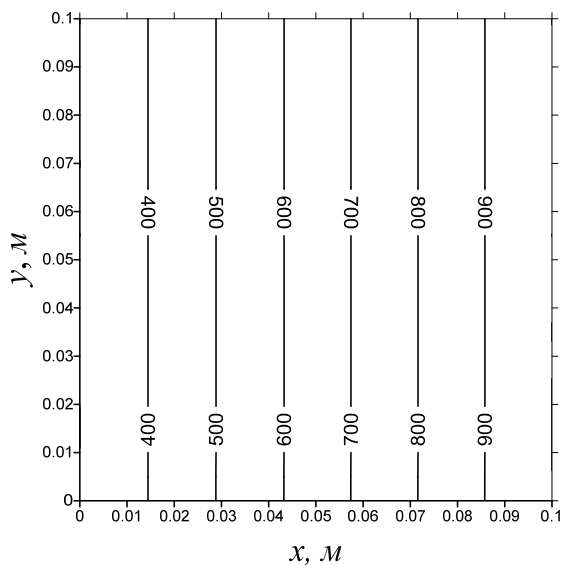


Рис. 10. Изолинии температуры



#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНДУКТИВНО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА

В предыдущих разделах были рассмотрены разностные схемы для уравнения теплопроводности, описывающего перенос тепла в неподвижной среде. Если среда движется, то помимо кондуктивного переноса тепла происходит перенос тепла конвективный, за счет движения среды со скоростью  $v$ . Уравнение кондуктивно-конвективного переноса тепла записывается в виде:

$$cp \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q(x, t), \quad (4.1)$$

где  $v$  – скорость движения среды. В общем случае  $v$  является функцией  $x$  и  $t$ ,  $v(x, t)$ .

Вводя аналогичные введенным в п. 2.1.3 безразмерные переменные и параметры, уравнение (4.1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + V \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + Q(\xi, \tau), \quad (4.2)$$

$$V(\xi, \tau) = \frac{v}{v_*}, \quad v_* = \frac{x_*}{t_*}.$$

Для уравнения (4.2) можно строить явную и неявную разностные схемы. Однако численное решение уравнения (4.2) имеет свои особенности.

##### 4.1. Явная разностная схема для уравнения кондуктивно-конвективного теплопереноса

Конвективное слагаемое  $V \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}$  мы можем аппроксимировать левой или правой разностью, тогда порядок аппроксимации будет  $o(h)$ , либо центральной разностью, тогда порядок аппроксимации будет  $o(h^2)$ . Для предварительного анализа примем  $V = const > 0$  и построим разностную схему, аппроксимируя конвективное слагаемое левой разностью, «разностью против потока».

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + V \frac{\theta_k^n - \theta_{k-1}^n}{h} = \frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n, \quad (4.3)$$

или:

$$\theta_k^{n+1} = \frac{\Delta\tau}{h^2} \theta_{k+1}^n + \left(1 - 2\frac{\Delta\tau}{h^2} - V\frac{\Delta\tau}{h}\right) \theta_k^n + \left(\frac{\Delta\tau}{h^2} + V\frac{\Delta\tau}{h}\right) \theta_{k-1}^n + \Delta\tau Q_k^n$$

Для устойчивости схемы необходимо, чтобы множители при  $\theta_i^n$  ( $i = k+1, k, k-1$ ) были положительными. Анализируя устойчивость схемы (4.3) методом, изложенным в п. 2.2.3 приходим к выводу, что схема устойчива при

$$\Delta\tau < \frac{h^2}{2 + Vh}.$$

Если бы мы аппроксимировали конвективное слагаемое  $V \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$  правой разностью,  $V \frac{\theta_{k+1}^n - \theta_k^n}{h}$ , то разностная схема имела бы вид:

$$\theta_k^{n+1} = \left(\frac{\Delta\tau}{h^2} - V\frac{\Delta\tau}{h}\right) \theta_{k+1}^n + \left(1 - 2\frac{\Delta\tau}{h^2} + V\frac{\Delta\tau}{h}\right) \theta_k^n + \frac{\Delta\tau}{h^2} \theta_{k-1}^n + \Delta\tau Q_k^n$$

Множители при  $\theta_i^n$  ( $i = k+1, k, k-1$ ) положительны при

$$h < \frac{1}{V} \text{ и } \Delta\tau < \frac{h^2}{2 - Vh}. \quad (4.4)$$

Условия (4.4) устанавливают ограничения на величины шагов по пространству и по времени. Поэтому такая аппроксимация уравнения (4.1) не используется.

При использовании центральной разности при аппроксимации конвективного слагаемого в уравнении (4.1) получаем схему:

$$\theta_k^{n+1} = \left(\frac{\Delta\tau}{h^2} - V\frac{\Delta\tau}{h}\right) \theta_{k+1}^n + \left(1 - 2\frac{\Delta\tau}{h^2}\right) \theta_k^n + \left(\frac{\Delta\tau}{h^2} + V\frac{\Delta\tau}{h}\right) \theta_{k-1}^n + \Delta\tau Q_k^n$$

имеющую погрешность порядка  $o(\Delta\tau + h^2)$ , которая является устойчивой при условиях

$$h < \frac{1}{V}, \quad \Delta\tau < \frac{h^2}{2}, \quad \left( r = \frac{\Delta\tau}{h^2} < \frac{1}{2} \right).$$

Запишем разностную схему для уравнения (4.1) при  $V = V(\xi, \tau)$ , при этом  $V$  возможно меняет знак. Явная схема с аппроксимацией конвективного слагаемого разностями против потока имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\theta_k^n - \theta_{k-1}^n}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\theta_{k+1}^n - \theta_k^n}{h} = \\ = \frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \theta_k^{n+1} = & \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} - \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k+1}^n + \\ & + \left( 1 - 2 \frac{\Delta\tau}{h^2} - \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_k^n + \\ & + \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k-1}^n + \Delta\tau Q_k^n \end{aligned}$$

Такая запись обеспечивает аппроксимацию конвективного слагаемого разностями против потока при любом направлении скорости потока. Схема устойчива при

$$\Delta\tau < \frac{h^2}{2 + \max |V_k| h}$$

и имеет погрешность аппроксимации  $o(\Delta\tau + h)$ .

Таким образом, использование разностей против потока при аппроксимации конвективного слагаемого в уравнении теплопереноса при построении явной разностной схемы дает условно устойчивую схему (4.5) с порядком погрешности аппроксимации  $o(\Delta\tau + h)$ .

## 4.2. Неявная разностная схема для уравнения кондуктивно-конвективного теплопереноса

Неявная схема для уравнения кондуктивно-конвективного теплопереноса с аппроксимацией конвективного слагаемого разностями против

потока имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h} = \\ = \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} + Q_k^n, \end{aligned} \quad (4.6)$$

или

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} - \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k+1}^{n+1} + \left( -1 - 2 \frac{\Delta\tau}{h^2} - |V_k| \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_k^{n+1} + \\ + \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k-1}^{n+1} = -\theta_k^n - \Delta\tau Q_k^n. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Схема (4.6) имеет погрешность аппроксимации  $o(\Delta\tau + h)$ . Анализируя устойчивость (4.7) по принципу максимума убеждаемся, что схема является абсолютно устойчивой. Система уравнений (4.7) решается методом прогонки.

При аппроксимации конвективного слагаемого центральными разностями с целью обеспечить погрешность аппроксимации  $o(\Delta\tau + h^2)$  получаем схему:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} - V_k \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k+1}^{n+1} + \left( -1 - 2 \frac{\Delta\tau}{h^2} \right) \theta_k^{n+1} + \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} + V_k \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k-1}^{n+1} = \\ = -\theta_k^n - \Delta\tau Q_k^n. \end{aligned} \quad (4.8)$$

или

$$A_k \theta_{k+1} + B_k \theta_k + C_k \theta_{k-1} = F_k.$$

Проверим устойчивость схемы по принципу максимума.

$$A_k > 0, \quad C_k > 0, \quad -B_k > A_k + C_k.$$

Первые два неравенства дают ограничение на величину шага по пространству:

$$h < \frac{1}{\max |V_k|},$$

схема (4.8) является условно устойчивой.

Таким образом, использование разностей против потока при аппроксимации конвективного слагаемого в уравнении теплопереноса при по-

строении неявной разностной схемы дает абсолютно устойчивую схему (4.7) с порядком погрешности аппроксимации  $o(\Delta\tau + h)$ .

### 4.3. Построение схемы второго порядка точности для уравнения кондуктивно-конвективного теплопереноса. Преобразование А.А. Самарского

Рассмотрим простейший случай уравнения (4.1)  $V = const > 0$ . При аппроксимации конвективного слагаемого в уравнении против потока запишем:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \approx \frac{\vartheta(\xi, \tau) - \vartheta(\xi - h, \tau)}{h} = \frac{\vartheta_k - \vartheta_{k-1}}{h}.$$

Запишем  $\vartheta_{k-1}$  через  $\vartheta_k$  в виде разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \vartheta_{k-1} &= \vartheta_k - \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} h + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} \frac{h^2}{2} - \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \xi^3} \frac{h^3}{3!} + o(h^4), \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + o(h^2) &= \frac{\vartheta_k - \vartheta_{k-1}}{h} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} \frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Подставим (4.9) в уравнение (4.1), получим

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + V \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{Vh}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + Q.$$

Запишем также вторые производные в виде конечных разностей на  $n+1$ -ом временном слое, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + V \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} &= \\ = \left(1 - \frac{Vh}{2}\right) \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} + Q_k^n. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Известно разложение в ряд Тейлора в окрестности  $\alpha = 0$  функции

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \dots$$

При  $\alpha \ll 1$  можно ограничиться двумя слагаемыми:

$$\frac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha.$$

При малых значениях  $Vh/2$  можно с хорошей точностью записать:

$$1 - \frac{Vh}{2} = \frac{1}{1 + Vh/2}. \quad (4.11)$$

Тогда схема (4.10) перепишется в виде:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + V \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} = \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{(1 + Vh/2)h^2} + Q_k^n,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\tau}{(1 + Vh/2)h^2} \theta_{k+1}^{n+1} + \left( -1 - 2 \frac{\Delta\tau}{(1 + Vh/2)h^2} - V \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_k^{n+1} + \\ + \left( \frac{\Delta\tau}{(1 + Vh/2)h^2} + V \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k-1}^{n+1} = -\theta_k^n - \Delta\tau Q_k^n. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Исследуя схему (4.12) на устойчивость по принципу максимума убеждаемся, что она является абсолютно устойчивой, имеет погрешность аппроксимации порядка  $o(\Delta\tau + h^2)$ .

Аппроксимация конвективного слагаемого в форме (4.9) с заменой (4.11), приводящей к схеме (4.12) называется преобразованием А.А. Самарского.

Запишем неявную разностную схему второго порядка аппроксимации для любого  $V = V(\xi, \tau)$ . Аппроксимируем конвективное слагаемое (4.1) в виде:

$$\begin{aligned} V \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + o(h^2) = \\ = \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\vartheta_k - \vartheta_{k-1}}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\vartheta_{k+1} - \vartheta_k}{h} + |V_k| \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} \frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Подставляем (4.13) в (4.1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h} = \\ = \left( 1 - \frac{|V_k| h}{2} \right) \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} + Q_k^n. \end{aligned}$$

Делая преобразование (4.11) получим

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h} = \\ = \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{(1 + |V_k|/h/2)h^2} + Q_k^n, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\Delta\tau}{(1 + |V_k|/h/2)h^2} - \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k+1}^{n+1} + \\ & + \left( -1 - \frac{2\Delta\tau}{(1 + |V_k|/h/2)h^2} - |V_k| \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_k^{n+1} + \\ & + \left( \frac{\Delta\tau}{(1 + |V_k|/h/2)h^2} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k-1}^{n+1} = -\theta_k^n - \Delta\tau Q_k^n. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Схема (4.14) абсолютно устойчива и имеет погрешность аппроксимации порядка  $o(\Delta\tau + h^2)$ . Решается методом прогонки.

Аналогично строится явная схема для уравнения (4.1) второго порядка точности. Она имеет вид:

$$\begin{aligned} \theta_k^{n+1} = & \left( \frac{\Delta\tau}{(1 + |V_k|/h/2)h^2} - \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k+1}^n + \\ & + \left( 1 - \frac{2\Delta\tau}{(1 + |V_k|/h/2)h^2} - |V_k| \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_k^n + \\ & + \left( \frac{\Delta\tau}{(1 + |V_k|/h/2)h^2} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k-1}^n + \Delta\tau Q_k^n. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Схема (4.14) условно устойчива и имеет погрешность аппроксимации порядка  $o(\Delta\tau + h^2)$ .

*Замечание.*

Вместо замены  $1 - \frac{Vh}{2} \approx \frac{1}{1 + Vh/2}$  можно провести замену вида  $1 - \frac{Vh}{2} \approx e^{-Vh/2}$ . Тогда вместо (4.14) можно получить схему

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h} = \\ = \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{\exp(|V_k|h/2)h^2} + Q_k^n, \end{aligned}$$

которая также является абсолютно устойчивой, имеет погрешность аппроксимации порядка  $o(\Delta\tau + h^2)$ , решается методом прогонки.

## 5. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения эллиптического типа в частности описывают стационарные распределения температуры в заданной пространственной области при заданных условиях на границе. Одним из методов получения решения уравнения Лапласа является решение нестационарной задачи теплопроводности в двухмерной или трехмерной области при заданных условиях на границе, не зависящих от времени, до установления. Однако такой подход требует больших вычислительных затрат. Поэтому для решения уравнений эллиптического типа (уравнений Лапласа и Пуассона) используются специальные итерационные методы.

### 5.1. Построение разностной схемы

Требуется найти решение  $u(x, y)$  эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (5.1)$$

в области, представляющей собой прямоугольник  $[a, b] \cup [c, d]$ , при следующих краевых условиях, представленных в таблице:



Таблица 1

	$x=a$	$x=b$	$y=c$	$y=d$
1)	$u = u_1(y)$	$u = u_2(y)$	$u = u_3(x)$	$u = u_4(x)$
2)	$u_x = q_1(y)$	$u_x = q_2(y)$	$u_y = q_3(x)$	$u_y = q_4(x)$

Как видно из уравнения (5.1), его решение зависит от двух пространственных переменных  $x$  и  $y$ . Выберем систему координат так, чтобы в ней переменная  $x$  менялась вдоль оси абсцисс, а переменная  $y$  – вдоль оси ординат (рис. 11).

Для решения уравнения (5.1) конечно-разностным методом построим конечно-разностную сетку, образованную пересекающимися вертикальными и горизонтальными линиями (рис. 11) и покрывающую прямоугольник  $[a, b] \cup [c, d]$ . Координаты узлов сетки, образованные пересечением вертикальных и горизонтальных отрезков, определяются по формулам  $x_i = a + i \cdot h_x$ ,  $y_j = c + j \cdot h_y$ , где  $h_x$  - шаг по пространству вдоль оси  $x$ ,  $h_x = (b - a) / N$ ;  $h_y$  - шаг по пространству вдоль оси  $y$ ,  $h_y = (d - c) / M$ . Здесь  $0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq M$ .

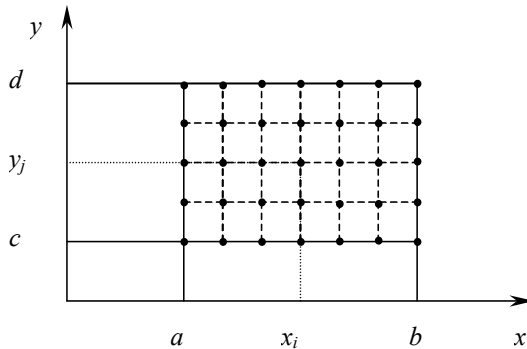


Рис. 11. Расчетная область.

Запишем конечно-разностную схему для уравнения (5.1), используя для производных по пространству пятиточечный шаблон (рис. 12).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}.$$

Здесь значения функции  $u(x, y)$ , найденные в результате численного решения (5.1) в точке  $x = x_i, y = y_j$ , заменено сеточной функцией  $u_{i,j}$ .

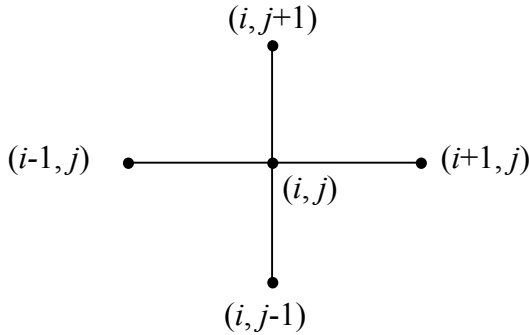


Рис. 12. Пятиточечный шаблон разностной схемы

Тогда имеем

$$u_{i,j} = (u_{i+1,j} + u_{i-1,j})\alpha + (u_{i,j+1} + u_{i,j-1})\beta + f_{i,j}\gamma \quad (5.2)$$

где

$$1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq M,$$

$$\alpha = \frac{h_y^2}{2(h_x^2 + h_y^2)}; \quad \beta = \frac{h_x^2}{2(h_x^2 + h_y^2)}; \quad \gamma = -\frac{h_x^2 \cdot h_y^2}{2(h_x^2 + h_y^2)}.$$

Полученное разностное уравнение (5.2) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (5.1) со вторым порядком точности по переменным  $x$  и  $y$ .

Разностная схема (5.2) вместе с краевыми условиями, которые будут рассмотрены ниже, представляет собой систему из  $(N+1) \times (M+1)$  ли-

нейных алгебраических уравнений, которую можно решить, например, методом Гаусса-Зейделя:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \left( u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} \right) \alpha + \left( u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} \right) \beta + f_{i,j} \quad (5.3)$$

Здесь  $k$  – номер итерации. Из (5.3) видно, что для получения значения функции в узле  $(i, j)$  на  $k+1$  итерации необходимо знать значения функции в точках  $(i+1, j)$  и  $(i, j+1)$  на  $k$ -ой итерации и значения функции в точках  $(i-1, j)$  и  $(i, j-1)$  на  $k+1$  итерации. Значения в двух последних точках  $(i-1, j)$  и  $(i, j-1)$  на  $k+1$  итерации будут известны из граничных условий, если проводить расчет, начиная из нижнего левого угла, и заканчивать в верхнем правом углу области. При этом обход области возможен либо по горизонтальным линиям узлов, либо по вертикальным линиям.

На нулевой итерации во всех узлах, кроме граничных узлов, задаются некоторые значения функции  $u_{i,j}^{(0)}$ , например, нулевые.

После каждой итерации проводим сравнение значений решения на новой итерации  $u_{i,j}^{(k+1)}$  и на предыдущей итерации  $u_{i,j}^{(k)}$ .

Расчет следует проводить до тех пор, пока не выполнится условие

$$\frac{1}{(N+1) \cdot (M+1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \left| u_{i,j}^{(k)} - u_{i,j}^{(k+1)} \right| < \delta,$$

здесь  $\delta$  – некоторая малая величина.

Для увеличения скорости сходимости итерационного процесса в методе Гаусса-Зейделя используют метод релаксации, который состоит из двух этапов.

Пусть на  $k$ -ой итерации известны значения функции  $u_{i,j}^{(k)}$ . Сначала выполняется один итерационный шаг по методу Гаусса-Зейделя и определяются значения функции  $u_{i,j}^*$ . Далее, полученные значения пересчитываются на  $k+1$  итерационный слой по формуле:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^* \omega + u_{i,j}^{(k)} (1 - \omega). \quad (5.4)$$

При  $\omega < 1$  метод носит название «нижней» релаксации, а при  $1 < \omega < 2$  – «верхней» релаксации.

## 5.2. Реализация граничных условий

Краевые условия *первого* рода.

Для краевых условий первого рода значения функций на границах известны и равны:

$$\begin{aligned} u_{0,j} &= u_1(a + jh_y); & u_{N,j} &= u_2(a + jh_y); \\ u_{i,0} &= u_3(c + ih_x); & u_{j,M} &= u_4(c + ih_x). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Заметим, что в случае граничных условий первого рода для получения решения во внутренних точках не требуется знания значений функции в угловых точках.

Краевые условия *второго* рода.

Для граничных условий второго рода значения функций на границе не известны и подлежат определению. Рассмотрим, например, ГУ на левой границе:  $u_x = q_1(y)$ . Запишем разностный аналог этого граничного условия:

$$\frac{u_{1,i} - u_{-1,i}}{2h_x} = q_1(c + jh_y).$$

Привлекая уравнение (5.2), записанного для  $i = 0$ , получим

$$u_{0,j} = (u_{1,j} + u_{-1,j})\alpha + (u_{0,j+1} + u_{0,j-1})\beta + f_{0,j}\gamma.$$

Исключая из двух последних уравнений значение функции в узле  $(-1, j)$  приходим к уравнению для нахождения функции на левой границе:

$$\begin{aligned} u_{0,j}^{(k+1)} &= 2 \cdot \alpha \cdot u_{1,j}^{(k)} + \beta \cdot (u_{0,j-1}^{(k+1)} + u_{0,j+1}^{(k)}) + \\ &+ \gamma \cdot f_{0,j} - 2 \cdot \alpha \cdot h_x \cdot q_1(c + j \cdot h_y) \end{aligned} \quad (5.6 \text{ а})$$

Аналогично получаются уравнения для нахождения функции на правой, нижней и верхней границах:

$$\begin{aligned} u_{N,j}^{(k+1)} &= 2 \cdot \alpha \cdot u_{N-1,j}^{(k+1)} + \beta \cdot (u_{N,j-1}^{(k+1)} + u_{N,j+1}^{(k)}) + \\ &+ \gamma \cdot f_{N,j} + 2 \cdot \alpha \cdot h_x \cdot q_2(c + j \cdot h_y) \end{aligned} \quad (5.6 \text{ б})$$

$$\begin{aligned} u_{i,0}^{(k+1)} &= \alpha \cdot (u_{i-1,0}^{(k+1)} + u_{i+1,0}^{(k)}) + 2 \cdot \beta \cdot u_{i,1}^{(k)} + \\ &+ \gamma \cdot f_{i,0} - 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_3(a + i \cdot h_x) \end{aligned} \quad (5.6 \text{ в})$$

$$\begin{aligned} u_{i,M}^{(k+1)} &= \alpha \cdot (u_{i-1,M}^{(k+1)} + u_{i+1,M}^{(k)}) + 2 \cdot \beta \cdot u_{i,M-1}^{(k+1)} + \\ &+ \gamma \cdot f_{i,M} + 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_4(a + i \cdot h_x) \end{aligned} \quad (5.6 \text{ г})$$

Как видно из (5.6) для краевых условий второго рода требуется знание значений функции в угловых точках. Уравнения для нахождения функции в узлах  $(0,0)$ ,  $(0,M)$ ,  $(N,0)$ ,  $(N,M)$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
 u_{0,0}^{(k+1)} &= 2 \cdot \alpha \cdot u_{1,0}^{(k)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{0,1}^{(k)} + \\
 &\quad + \gamma \cdot f_{0,0} - 2 \cdot \alpha \cdot h_x \cdot q_1(c) - 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_3(a) \\
 u_{N,0}^{(k+1)} &= 2 \cdot \alpha \cdot u_{N-1,0}^{(k+1)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{N,1}^{(k)} + \\
 &\quad + \gamma \cdot f_{N,0} + 2 \cdot \alpha \cdot h_x \cdot q_2(c) - 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_3(b) \\
 u_{N,M}^{(k+1)} &= 2 \cdot \alpha \cdot u_{N-1,M}^{(k+1)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{N,M-1}^{(k+1)} + \\
 &\quad + \gamma \cdot f_{N,M} + 2 \cdot \alpha \cdot h_x \cdot q_2(d) + 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_4(b) \\
 u_{0,M}^{(k+1)} &= 2 \cdot \alpha \cdot u_{1,M}^{(k)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{0,M-1}^{(k+1)} + \\
 &\quad + \gamma \cdot f_{0,M} - 2 \cdot \alpha \cdot h_x \cdot q_1(c) + 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_4(a)
 \end{aligned}$$

### 5.3. Особенности построения разностной схемы для уравнения в цилиндрической системе координат

Рассмотрим следующее эллиптическое уравнение, записанное в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(r, z). \quad (5.7)$$

Записывая разностные соотношения по шаблону, показанному на рисунке 13, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) &\approx \frac{\left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{i+0.5} - \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{i-0.5}}{r_i h_r} = \\
 &= \frac{r_{i+0.5} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} - r_{i-0.5} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r}}{h_r} = \\
 &= \frac{r_{i+0.5} u_{i+1,j} - (r_{i+0.5} + r_{i-0.5}) u_{i,j} + r_{i-0.5} u_{i-1,j}}{h_r^2}.
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_z^2}.$$

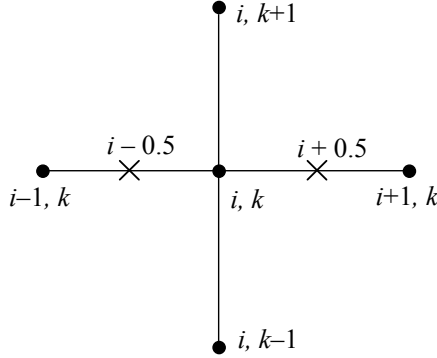


Рис. 13. Шаблон для эллиптического уравнения в цилиндрической системе координат

Тогда разностный аналог для уравнения (5.7) принимает вид:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \alpha_2 \cdot u_{i+1,j}^{(k)} + \alpha_1 \cdot u_{i-1,j}^{(k+1)} + \beta \cdot (u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)}) + \gamma \cdot f_{i,j}, \quad (5.8)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{r_{i-0.5}}{r_i} \alpha; \quad \alpha_2 = \frac{r_{i+0.5}}{r_i} \alpha.$$

$$\alpha = \frac{h_z^2}{2 \cdot (h_z^2 + h_r^2)}; \quad \beta = \frac{h_r^2}{2 \cdot (h_z^2 + h_r^2)}; \quad \gamma = -\frac{h_r^2 \cdot h_z^2}{2 \cdot (h_z^2 + h_r^2)};$$

На оси симметрии, т.е. при  $r \rightarrow 0$ , в уравнении (5.7) имеет место особенность, раскрывая которую по правилу Лопитала, получим

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(r, z) \quad (5.9)$$

Используя тот факт, что на оси симметрии выполняется условие симметрии  $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$ , разностный аналог уравнения (5.9) принимает

вид:

$$u_{0,j}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha_0 \cdot u_{1,j}^{(k)} + \beta_0 \cdot \left( u_{0,j+1}^{(k)} + u_{0,j-1}^{(k)} \right) + \gamma_0 \cdot f_{0,j}, \quad (5.10)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{h_z^2}{2 \cdot h_z^2 + h_r^2}; \quad \beta_0 = \frac{h_r^2}{2 \cdot (2 \cdot h_z^2 + h_r^2)}; \quad \gamma_0 = -\frac{h_r^2 \cdot h_z^2}{2 \cdot (2 \cdot h_z^2 + h_r^2)}.$$

Таким образом, для нахождения решения на оси симметрии всегда используется уравнение (5.10):  $1 \leq j \leq M$

$$u_{0,j}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha_0 \cdot u_{1,j}^{(k)} + \beta_0 \cdot \left( u_{0,j+1}^{(k)} + u_{0,j-1}^{(k)} \right) + \gamma_0 \cdot f_{0,j}$$

На правой границе:  $1 \leq j \leq M$

$$u_{N,j}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha \cdot u_{N-1,j}^{(k+1)} + \beta \cdot \left( u_{N,j+1}^{(k+1)} + u_{N,j-1}^{(k+1)} \right) + \gamma \cdot f_{N,j} + 2 \cdot \alpha_2 \cdot h_x \cdot q_2(c + j \cdot h_y)$$

На нижней границе:  $1 \leq i \leq N$

$$u_{i,0}^{(k+1)} = \alpha_1 \cdot u_{i-1,0}^{(k+1)} + \alpha_2 \cdot u_{i+1,0}^{(k)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{i,1}^{(k)} + \gamma \cdot f_{i,0} - 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_3(a + i \cdot h_x)$$

На верхней границе:  $1 \leq i \leq N$

$$u_{i,M}^{(k+1)} = \alpha_1 \cdot u_{i-1,M}^{(k+1)} + \alpha_2 \cdot u_{i+1,M}^{(k)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{i,M-1}^{(k+1)} + \gamma \cdot f_{i,M} + 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_4(a + i \cdot h_x)$$

Значение функции в угловых точках вычисляются по формулам:

$$u_{0,0}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha_0 \cdot u_{1,0}^{(k)} + 2 \cdot \beta_0 \cdot u_{0,1}^{(k)} + \gamma_0 \cdot f_{0,0} - 2 \cdot \beta_0 \cdot h_y \cdot q_3(a)$$

$$u_{N,0}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha \cdot u_{N-1,0}^{(k+1)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{N,1}^{(k)} + \gamma \cdot f_{N,0} + 2 \cdot \alpha_2 \cdot h_x \cdot q_2(c) - 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_3(b)$$

$$u_{N,M}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha \cdot u_{N-1,M}^{(k+1)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{N,M-1}^{(k+1)} + \gamma \cdot f_{N,M} + 2 \cdot \alpha_2 \cdot h_x \cdot q_2(d) + 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_4(b)$$

$$u_{0,M}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha_0 \cdot u_{1,M}^{(k)} + 2 \cdot \beta_0 \cdot u_{0,M-1}^{(k)} + \gamma_0 \cdot f_{0,M} + 2 \cdot \beta_0 \cdot h_y \cdot q_4(a).$$

Если же левая граница не является осью симметрии, то для нахождения функции в левой нижней и в левой верхней точке используются уравнения:

$$u_{0,0}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha \cdot u_{1,0}^{(k)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{0,1}^{(k)} + \gamma \cdot f_{0,0} - 2 \cdot \alpha_1 \cdot h_x \cdot q_1(c) - 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_3(a)$$

$$u_{0,M}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha \cdot u_{1,M}^{(k)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{0,M-1}^{(k+1)} + \gamma \cdot f_{0,M} - 2 \cdot \alpha_1 \cdot h_x \cdot q_1(c) + 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_4(a),$$

а на самой границе:

$$u_{0,j}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha \cdot u_{1,j}^{(k)} + \beta \cdot \left( u_{0,j-1}^{(k+1)} + u_{0,j+1}^{(k)} \right) + \gamma \cdot f_{0,j} - 2 \cdot \alpha_1 \cdot h_x \cdot q_1(c + j \cdot h_y).$$

#### 5.4. Особенности построения разностной схемы для уравнения в полярной системе координат

Рассмотрим эллиптическое уравнение в полярной системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = f(r, \varphi); \quad (5.11)$$

Разностный аналог уравнения (5.11) имеет вид:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \alpha_2 \cdot u_{i+1,j}^{(k)} + \alpha_1 \cdot u_{i-1,j}^{(k+1)} + \beta \cdot \left( u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} \right) + \gamma \cdot f_{i,j} \quad (5.12)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{r_{i-0.5}}{r_i} \alpha; \quad \alpha_2 = \frac{r_{i+0.5}}{r_i} \alpha.$$

$$\alpha = \frac{r_i^2 \cdot h_\varphi^2}{2 \cdot (r_i^2 \cdot h_\varphi^2 + h_r^2)}; \quad \beta = \frac{h_r^2}{2 \cdot (r_i^2 \cdot h_\varphi^2 + h_r^2)}; \quad \gamma = -\frac{r_i^2 \cdot h_r^2 \cdot h_\varphi^2}{2 \cdot (r_i^2 \cdot h_\varphi^2 + h_r^2)}.$$

В случае краевых условий *второго* рода значения функций на границах находятся из следующих уравнений:

для левой границы,  $1 \leq j \leq M$

$$u_{0,j}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha \cdot u_{1,j}^{(k)} + \beta \cdot \left( u_{0,j-1}^{(k+1)} + u_{0,j+1}^{(k)} \right) + \gamma \cdot f_{0,j} - 2 \cdot \alpha_1 \cdot h_x \cdot q_1(c + j \cdot h_y),$$

для правой границы,  $1 \leq j \leq M$

$$u_{N,j}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha \cdot u_{N-1,j}^{(k+1)} + \beta \cdot \left( u_{N,j-1}^{(k+1)} + u_{N,j+1}^{(k)} \right) + \gamma \cdot f_{N,j} + 2 \cdot \alpha_2 \cdot h_x \cdot q_2(c + j \cdot h_y)$$

для нижней границы,  $1 \leq i \leq N$

$$u_{i,0}^{(k+1)} = \alpha_1 \cdot u_{i-1,0}^{(k+1)} + \alpha_2 \cdot u_{i+1,0}^{(k)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{i,1}^{(k)} + \gamma \cdot f_{i,0} - 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_3(a + i \cdot h_x)$$

для верхней границы,  $1 \leq i \leq N$

$$u_{i,M}^{(k+1)} = \alpha_1 \cdot u_{i-1,M}^{(k+1)} + \alpha_2 \cdot u_{i+1,M}^{(k)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{i,M-1}^{(k+1)} + \gamma \cdot f_{i,M} + 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_4(a + i \cdot h_x)$$

В угловых точках значения находятся из уравнений:

$$u_{0,0}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha \cdot u_{1,0}^{(k)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{0,1}^{(k)} + \gamma \cdot f_{0,0} - 2 \cdot \alpha_1 \cdot h_x \cdot q_1(c) - 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_3(a)$$

$$u_{0,M}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha \cdot u_{1,M}^{(k)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{0,M-1}^{(k+1)} + \gamma \cdot f_{0,M} - 2 \cdot \alpha_1 \cdot h_x \cdot q_1(c) + 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_4(a)$$



$$u_{N,0}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha \cdot u_{N-1,0}^{(k+1)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{N,1}^{(k)} + \gamma \cdot f_{N,0} + 2 \cdot \alpha_2 \cdot h_x \cdot q_2(c) - 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_3(b)$$

$$u_{N,M}^{(k+1)} = 2 \cdot \alpha \cdot u_{N-1,M}^{(k+1)} + 2 \cdot \beta \cdot u_{N,M-1}^{(k+1)} + \gamma \cdot f_{N,M} + 2 \cdot \alpha_2 \cdot h_x \cdot q_2(d) + 2 \cdot \beta \cdot h_y \cdot q_4(b)$$

## 5.5. Пример решения гиперболического уравнения методом конечных разностей

Решить краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (5.13)$$

Граничные условия:

$$u(x, 0) = 100; \quad u(x, 1) = 100;$$

$$u(0, y) = 400; \quad u(1, y) = 400.$$

Решение уравнение (5.13) будем находить с помощью разностной схемы (5.3) - (5.5). Область решения покрывается разностной сеткой из  $N \times M = 400$  точек, координаты которых будут вычисляться по формулам:  $x_i = h_x i$ ,  $y_j = h_y j$ ,  $0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq M$ , где  $h_x = l/N$ ,  $h_y = l/M$ .

В соответствие со схемой (5.3)-(5.4) функция во внутренних точках области на  $k+1$  итерации будет определяться по формуле:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \left[ \left( u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} \right) \alpha + \left( u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} \right) \beta \right] \omega + u_{i,j}^{(k)} (1 - \omega),$$

а в граничных точках по формулам:

$$u_{i,0}^{(k+1)} = 100; \quad u_{i,M}^{(k+1)} = 100;$$

$$u_{0,j}^{(k+1)} = 400; \quad u_{N,j}^{(k+1)} = 400.$$

Ниже приведены примеры программ для численного решения поставленной задачи, написанной на языке Паскаль, а также реализованной для системы Mathcad.

### 5.5.1. Программа на языке Паскаль

```
Program Two_Therm_Dirichle;
Uses Crt;
Const
```

```

N=20; M=20;
u01=100; u02=400;
u03=100; u04=400;
u00=100;
Omega=1.75;
{Вычисление шага разностной сетки}
Hx=1.0/N; Hy=1.0/M;
Type
  Arr2=Array [0..N,0..M] of real;
  ArrX=Array [0..N] of real;
  ArrY=Array [0..M] of real;
Var u0,u1,u:Arr2;
  X:ArrX;
  Y:ArrY;
  i,j,N_iter:integer;
  Alfa,Betta,Gamma,Delta:real;
  f:text;
Begin
{ClrScr;      }
{Задание краевых условий}
  for i:=1 to N-1 do begin u[i,0]:=u01;u[i,M]:=u03 end;
  for j:=1 to M-1 do begin u[0,j]:=u04;u[N,j]:=u02 end;
{Задание начального приближения}
  for i:=1 to N-1 do
  for j:=1 to M-1 do u[i,j]:=u00;
{Вычисление координат сетки}
  for i:=0 to N do X[i]:=i*Hx;
  for j:=0 to M do Y[j]:=j*Hy;
  Alfa :=0.5/(1.0+Sqr(Hx/Hy));
  Betta:=0.5/(1+Sqr(Hy/Hx));
  Gamma:=0.5*Sqr(Hx)/(1.0+Sqr(Hx/Hy));
  N_iter:=0;
  repeat
{Присваивание значения температуры на k-ой итерации}
  for j:=0 to M do
  for i:=0 to N do u0[i,j]:=u[i,j];
{Вычисление значения температуры на k-ой итерации}
  for j:=1 to M-1 do
  for i:=1 to N-1 do
    u[i,j]:=((u[i+1,j]+u[i-1,j])*Alfa+
    (u[i,j+1]+u[i,j-1])*Betta)*Omega+u0[i,j]*(1-Omega);
{Вычисление критерия останова итерационного процесса}
  Delta:=0;

```

```

for j:=1 to M-1 do
  for i:=1 to N-1 do Delta:=Delta+abs(u[i,j]-u0[i,j]);
Delta:=Delta/(M-1)/(N-1);
N_iter:=N_iter+1;
until delta<1e-5;
{Запись результатов на диск}
writeln(Omega:6:2,' ',N_iter);
Assign(f,'result.dat');
Rewrite(f);
for j:=0 to M do
  for i:=0 to N do writeln(f,X[i],y[j],u[i,j]);
close(f);
End.

```

Результаты расчетов по приведенной программе – изолинии температуры внутри пластины приведены на рисунке 14.

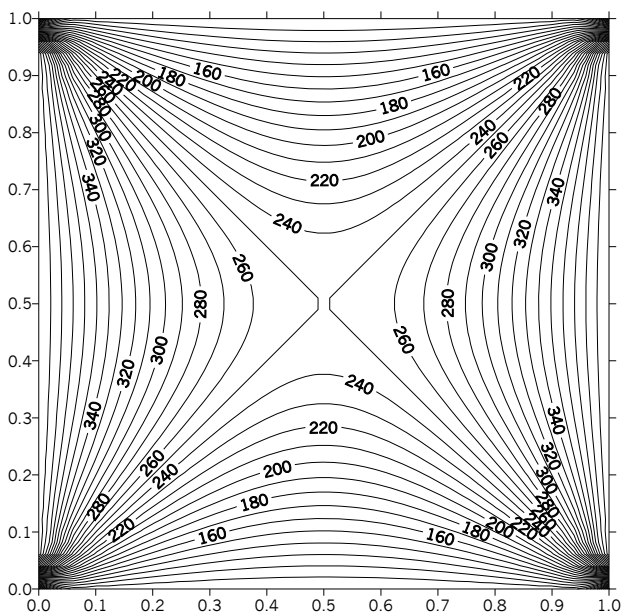


Рис. 14. Изолинии функции  $u(x, y)$

### 5.5.2. Программа для системы Mathcad

Значение функции на нулевой итерации

$$u_{00} = 100$$

Значение функции на границах

$$u_{01} = 100 \quad u_{02} = 400 \quad u_{03} = 100 \quad u_{04} = 400$$

Число точек, на которые разбивается область

вдоль оси x

вдоль оси y

$$N = 20$$

$$M = 20$$

Шаг разностной сетки

вдоль оси x

вдоль оси y

$$h_x = \frac{1}{N}$$

$$h_y = \frac{1}{M}$$

Итерационный параметр

$$1.75$$

Присвоение значений ранжированным переменным

$$i = 0 \dots N \quad j = 0 \dots M$$

Задание начального приближения

$$u_i = u_{00}$$

Задание граничных условий

$$u_{i0} = u_{01} \quad u_{iM} = u_{03} \quad u_{0j} = u_{04} \quad u_{Nj} = u_{02}$$

Вычисление вспомогательных величин

$$\frac{0.5 h_y^2}{h_x^2 h_y^2}$$

$$\frac{0.5 h_x^2}{h_x^2 h_y^2}$$

Процедура вычисления значения функции на новой итерации

```

iterU(T)
  for i = 0 : M
    for j = 0 : N
      T0(i,j) = T(i,j)
    for j = 1 : M - 1
      for i = 1 : N - 1
        T(i,j) = T0(i,j) * (1 - ) + T(i-1,j) + T(i+1,j) + T(i,j-1) + T(i,j+1)
      end
    end
  end
  T

```

Процедура нахождения решения стационарного уравнения

```

U_rez(T)
  x = 1
  while x > 10^-5
    T1 = iterU(T)
    x = 0
    for j = 1 : M - 1
      for i = 1 : N - 1
        x = x + |T1(i,j) - T(i,j)|
      end
    end
    x = x / ((M - 1) * (N - 1))
  end
  T = T1
  T

```

Изолинии функции

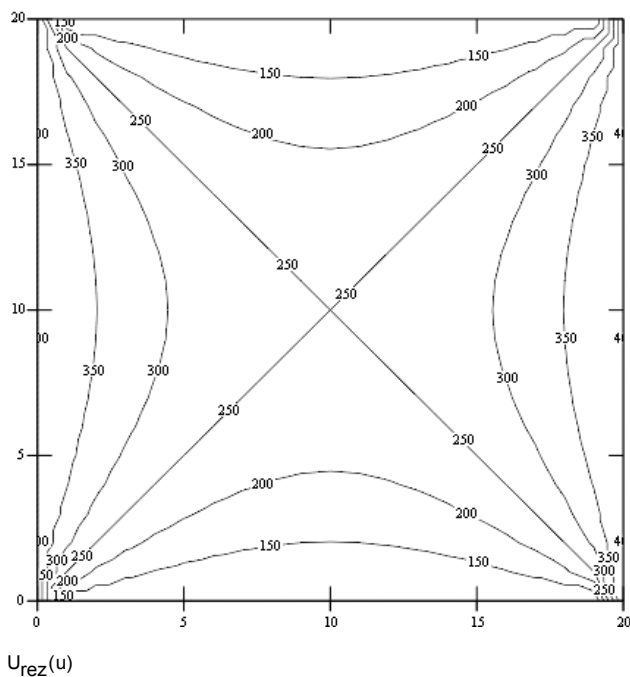


Рис. 15. Изолинии функции  $u(x, y)$

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. «ПРОПИСНЫЕ ИСТИНЫ» НАЧИНАЮЩЕГО ВЫЧИСЛИТЕЛЯ

Решение задачи численными методами занятие достаточно сложное, требующее внимательности и усидчивости.

Решение задачи можно разделить на несколько этапов.

### 1. Постановка задачи.

На этом этапе определяется задача исследования, записывается математическая модель моделируемого физического явления, устанавливаются условия однозначности решения задачи: определяются геометрия области, внутри которой происходит исследуемый физический процесс, записываются условия на границах области (граничные условия), определяются начальные условия, определяются значения физических вели-

чин, используемых в математической модели. При анализе математической постановки задачи возможно выделить параметры подобия и записать систему уравнений математической модели в безразмерных переменных и параметрах.

### *2. Выбор численного метода.*

Для различных задач физики и математической физики возникают уравнения и системы уравнений: алгебраические, трансцендентные, обыкновенные дифференциальные уравнения или их системы, уравнения в частных производных первого, второго порядка или их системы. Для решения таких задач естественно применяются соответствующие численные методы. В зависимости от типа уравнений выбирается численный метод для их решения.

### *3. Построение разностной схемы.*

Для решения уравнения или системы уравнений математической модели строится разностная схема. Можно построить множество вариантов разностных схем для решения одной и той же задачи. Однако не всякой разностной схемой возможно решить поставленную задачу. Разностная схема должна аппроксимировать исходную дифференциальную задачу, должна быть устойчивой (Теорема сходимости).

### *4. Разработка алгоритма решения задачи.*

Алгоритм это последовательность действий приводящая к конкретному результату. Алгоритм численного решения задачи это последовательность арифметических действий и вычислений, а также необходимых логических действий, приводящих к конкретному и однозначному результату решения задачи. При построении сложных логических цепочек в алгоритме нужно быть внимательным и проверять результативность алгоритма.

### *5. Написание программы.*

После выбора разностной схемы и разработки алгоритма решения задачи можно приступать к написанию программы. Перед написанием программы необходимо определить имена идентификаторов соответствующих обозначениям, принятым в математической модели. Для читаемости программы имена идентификаторов выбираются созвучными обозначениям, принятым в математической модели и разностной схеме. Если используются массивы, то их длину удобнее определять задаваемой константой. (Тогда изменением только одной величины можно сделать увеличение количества точек сетки и уменьшить шаг по пространству). При написании программы полезно комментировать все переменные, их зна-

чения, и некоторые логические действия, заложенные в алгоритм. Это помогает при отладке программы. А также это важно, когда вы через неделю (или через год) возвращаетесь к расчетам по этой программе, и естественно забыли какая буква что обозначает, а комментарии помогут вспомнить!

Программа должна быть хорошо читаемой иначе очень трудно бывает понять что в ней написано (убедительно?).

Для читаемости программы:

- каждый оператор пишут с новой строки;
- **begin** и соответствующий ему **end** пишут с одинаковым отступом от начала строки (это облегчает поиск в тексте программы этих соответствий);
- вложенные блоки (между **begin** и **end**) пишут с отступом от соответствующих **begin** и **end** на два пробела;
- комментарии располагают справа от переменных или в начале соответствующего логического блока.

В п. 2.2.18 представлен текст программы, написанный в соответствии с вышеизложенными рекомендациями.

#### *6. Тестирование программы.*

После написания программы в электронном виде и исправления неизбежных синтаксических ошибок необходимо убедиться в правильности результатов решения задачи, получаемых в процессе вычислений по созданной программе.

*Любой вычислитель должен руководствоваться принципом «В разрабатываемой программе ошибки есть» и «В разработанной программе ошибки, скорее всего есть, но они до сих пор не проявились».*

Для любой программы, составленной для решения уравнения или системы уравнений математической постановки задачи, существует стандартный набор тестов, которые необходимо проводить.

а) У любого уравнения или системы уравнений существует тривиальное решение. Получите его численно! (Например в задачах теплопроводности при однородном распределении температуры и отсутствии тепловых возмущений от границы и внутренних источников эта температура не будет меняться).

б) При записи уравнения математической модели (или системы) в него закладывается закон природы (сохранения массы, импульса или энергии). Для замкнутой системы он должен (они должны) выполняться при численном решении. Убедитесь в том, что при численном решении зако-



ны сохранения выполняются! (Например, в задачах теплопроводности для замкнутой системы, когда нет потерь тепла в окружающую среду за счет теплообмена, количество тепла в теле остается постоянным, выполняется закон сохранения энергии.) в) Получение аналитических решений линейных задач.

Для некоторых уравнений, или систем уравнений математической модели при небольших упрощениях можно получить аналитические решения. Если такие аналитические решения получены, то решив упрощенную задачу численно, сравнивайте решения! Если есть отличия, то ищите ошибку в программе.

г) получение стационарных решений

Для некоторых уравнений, или систем уравнений математической модели можно получить стационарные решения. Если такие решения получены, то решив задачу численно до установления стационарного решения, сравнивайте решения! Если есть отличия, то ищите ошибку в программе.

*7. Исследование сеточной сходимости.*

Для получения численного решения поставленной задачи с заданной точностью необходимо проводить исследование сходимости решения при уменьшении величины шага по пространству. Для этого проводится решение задачи на разных разностных сетках (с разными шагами по пространству  $h, h/2, h/4, \dots$ ). По мере уменьшения величины шага по пространству решения задачи (значения зависимых переменных задачи в один и тот же момент времени в различных точках пространства) должны отличаться на все меньшую и меньшую величину. Когда отличие этих значений составит малую величину, то для расчетов выбирается соответствующий этому шаг по пространству.

*8. Проведение расчетов (параметрические исследования).*

В большинстве математических постановок задач существуют параметры, от которых зависит решение. При проведении исследований физических процессов проводится численное решение задачи при различных значениях определяющих решение параметров задачи. Результаты расчетов фиксируются и накапливаются в виде файлов для дальнейшей обработки и анализа.

*9. Обработка результатов расчетов.*

Числовая информация, полученная после проведения параметрических расчетов, обрабатывается с использованием графических средств

dos или Windows в графическом виде, а также в виде таблиц и других данных.

#### *10. Описание результатов решения задачи.*

Полученные результаты анализируются, и выявленные закономерности моделируемого физического явления описываются.

И еще несколько советов начинающим вычислителям:

Решение одной и той же задачи разными методами должно давать один результат.

Компьютер он послушный – что ему скажешь, то он и сделает. Говорите правильно!

При решении задач достаточно часто используются «Лекарские приемы», чтобы обеспечить успешность алгоритма решения задачи. Не бойтесь их применять, но применяйте их с умом!

В процессе работы файлы данных и файлы вариаций одной и той же программы множатся. Систематизируйте результаты, и файлы с программами. Подписывайте вариации программы соответствующими комментариями в начале текста программы.

При поиске вычислительных ошибок используйте Debug или печать значений переменных участвовавших в арифметических действиях, приведших к авосту. Контролируйте задание исходных значений переменных, используемых в программе. Не допускайте выхода за границы массивов при проведении вычислений.

### **Контрольные вопросы**

1. Понятие аппроксимации. Определение порядка аппроксимации уравнения теплопроводности на трехточечном шаблоне.

2. Явная схема для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.

3. Неявная схема для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.

4. Схема с весами для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.

5. Явная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.

6. Неявная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.
7. Метод прогонки для численного решения уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности.
8. Аппроксимация неоднородных граничных условий II и III рода для задачи теплопроводности с порядком аппроксимации  $o(h)$  и  $o(h^2)$ .
9. Явная схема для уравнения конвекции-теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.
10. Неявная схема для уравнения конвекции-теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.
11. Неявная схема для уравнения конвекции-теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности с порядком аппроксимации  $o(h^2)$  (Преобразование Самарского).
12. Методы решения двухмерных уравнений теплопроводности. Продольно-поперечная прогонка.
13. Методы решения двухмерных уравнений теплопроводности. Схема переменных направлений.
14. Аппроксимация линейных правых частей (источников и стоков) в уравнении теплопроводности при использовании явных и неявных схем.
15. Методы решения уравнения Лапласа и Пуассона.
16. Реализация граничных условий при решении уравнений Лапласа и Пуассона.
17. Особенности построения разностной схемы для уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат.
18. Особенности построения разностной схемы для уравнения Лапласа в полярной системе координат.

## Индивидуальные задания

1. В задачах 1-10 численно решить задачу о распространении тепла в слое толщины  $l$ , которое описывается уравнением

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\alpha}{R_0}(T - T_0) + Q(x, t)$$

при заданных начальных и граничных условиях и зависимости  $Q(x, t)$ .

Составить программу решения задачи по явной и неявной схеме. Провести ее тестирование. Задачу решать в безразмерных переменных, результаты расчета представить в размерных переменных для заданного материала слоя.

1.  $T(x, 0) = T_0, T(0, t) = T_1, T(l, t) = T_2, Q(x, t) = const.$

Материал стенки – сталь.  $\alpha = const.$

2.  $T(x, 0) = T_0, \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, T(l, t) = T_2, Q(x, t) = const.$

Материал стенки – сталь.  $\alpha = const.$

3.  $T(x, 0) = T_0, T(0, t) = T_1, \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = 0, Q(x, t) = const.$

Материал стенки – стекло.  $\alpha = const.$

4.  $T(x, 0) = T_0, T(0, t) = T_1, -\lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = \alpha(T(l, t) - T_0),$

$$Q(x, t) = const.$$

Материал стенки – медь.  $\alpha = const.$

5.  $T(x, 0) = T_0, \lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \alpha(T(0, t) - T_0), T(l, t) = T_2,$

$$Q(x, t) = const.$$

Материал стенки – алюминий.  $\alpha = const.$

6.  $T(x, 0) = T_0, \lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \alpha(T - T_0), \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = 0,$

$$Q(x, t) = const.$$

Материал стенки – стекло.  $\alpha = const$ .

$$7. \quad T(x, 0) = T_0, \quad \lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \alpha(T(0, t) - T_0), \quad \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = 0, \\ Q(x, t) = const.$$

Материал стенки – алюминий.  $\alpha = const$ .

$$8. \quad T(x, 0) = T_0, \quad T(0, t) = T_1, \quad T(l, t) = T_2, \quad Q(x, t) = Ax + B.$$

Материал стенки – сталь.  $\alpha, A, B = const$ .

$$9. \quad T(x, 0) = T_0, \quad T(0, t) = T_1, \quad -\lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = \alpha(T - T_0), \\ Q(x, t) = \sin(Ax/l) + B.$$

Материал стенки – медь.  $\alpha, A, B = const$ .

$$10. \quad T(x, 0) = T_0, \quad T(0, t) = T_1, \quad -\lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = \alpha(T(l, t) - T_0), \\ Q(x, t) = \exp(Ax/l) + B.$$

Материал стенки – алюминий.  $\alpha, A, B = const$ .

II. Методом конечных разностей решить следующие краевые задачи. Построить график распределения функции  $u(x, t)$  вдоль  $x$  в момент времени  $t = 1$  и  $t = 2$ . Полученные результаты сравнить с аналитическим решением.

Решить уравнение $u_t = u_{xx} + g(x, t)$ с начальным условием $u _{t=0} = f(x)$					
№	$g(x, t)$	$f(x)$	Левое ГУ	Правое ГУ	Решение $u(x, t)$
1	-1	$x^2$	$u_x _{x=0} = 0$	$u_x _{x=1} = 2$	$x^2 + t$
2	$2 \cdot t - 2$	$x^2$	$u_x _{x=0} = 0$	$u _{x=1} = 1 + t^2$	$x^2 + t^2$
3	$x$	0	$-u_x + u _{x=0} = -t$	$u_x _{x=1} = t$	$x \cdot t$
4	$x^2 - 2 \cdot t$	0	$-u_x + u _{x=0} = 0$	$u _{x=1} = t$	$x^2 \cdot t$
5	$x \cdot \cos(t)$	0	$u _{x=0} = 0$	$u_x + u _{x=1} = 2 \cdot \sin(t)$	$x \cdot \sin(t)$

6	$\cos(t) + \sin(x)$	$\sin(x)$	$u_x _{x=0} = 1$	$u_x + u _{x=\pi} = -1 + \sin(t)$	$\sin(x) + \sin(t)$
7	$\sin(x) \cdot (\cos(t) - \sin(x))$	$\sin(x)$	$u_x _{x=0} = 0$	$u_x _{x=\pi} = -\cos(t)$	$\sin(x) \cdot \cos(t)$
8	$-x \cdot \sin(t)$	$x$	$-u_x + u _{x=0} = -\cos(t)$	$u_x + u _{x=1} = 2 \cdot \cos(t)$	$x \cdot \cos(t)$

Решить уравнение  $u_t = u_{xx} - u + g(x, t)$  с начальным условием  $u|_{t=0} = f(x)$

№	$g(x, t)$	$f(x)$	Левое ГУ	Правое ГУ	Решение $u(x, t)$
1	$(\cos(t) + \sin(t)) \cdot x$	0	$u_x _{x=0} = \sin(t)$	$u_x _{x=1} = \sin(t)$	$x \cdot \sin(t)$
2	$(1 + 2 \cdot t) \cdot \sin(x)$	0	$u_x _{x=0} = t$	$u_x _{x=\pi} = -t$	$t \cdot \sin(x)$
3	$(\cos(t) - \sin(t)) \cdot x$	$x$	$u_x _{x=0} = 0$	$u_x _{x=1} = \cos(t)$	$x \cdot \cos(t)$
4	$(1 + 2 \cdot t) \cdot \cos(x)$	0	$u_x _{x=0} = t$	$u_x + u _{x=\pi} = -t$	$t \cdot \cos(x)$
5	$\cos(x) \cdot (2 \cdot \cos(t) - \sin(t))$	$\cos(x)$	$u_x _{x=0} = 0$	$u_x + u _{x=\pi} = -\cos(t)$	$\cos(x) \cdot \cos(t)$
6	$-2 \cdot e^{-t}$	$x^2$	$-u_x + u _{x=0} = 0$	$u_x _{x=1} = e^{-t}$	$x^2 \cdot e^{-t}$
7	$e^{-t} \cdot \cos(x)$	$\cos(x)$	$-u_x + u _{x=0} = e^{-t}$	$u_x _{x=\pi} = 0$	$\cos(x) \cdot e^{-t}$
8	$e^{t+x}$	$e^x$	$-u_x + u _{x=0} = 0$	$u_x + u _{x=\ln(2)} = 4 \cdot e^t$	$e^{t+x}$

Решить уравнение  $u_t = \frac{1}{r}(r u_r)_r + g(r, t)$  с начальным условием  $u|_{t=0} = f(r)$

№	$g(r, t)$	$f(r)$	Левое ГУ	Правое ГУ	Решение $u(r, t)$
---	-----------	--------	----------	-----------	-------------------

1	$-e^t \cdot \left( r + \frac{e^r - 1}{r} \right)$	$e^r - r$	$u_r _{r=0} = 0$	$u_r + u _{r=1} = 2 \cdot e^t \cdot (e - 1)$	$(e^r - r) \cdot e^t$
2	$-e^t \left( r + \frac{\cos(r) - 1}{r} - 2 \sin \right)$	$\sin(r) - r$	$u_r _{r=0} = 0$	$u _{r=\pi} = -\pi \cdot e^t$	$(\sin(r) - r) e^t$
3	$r^2 \cdot \cos(t) - 4 \cdot \sin(t)$	0	$u_r _{r=0} = 0$	$u _{r=1} = 2 \cdot \sin(t)$	$r^2 \cdot \sin(t)$
4	$-\left( r \cdot \sin(t) + \frac{1}{r} \cos(t) \right)$	$r$	$-u_r + u _{r=1} = 0$	$u_r + u _{r=2} = 3 \cdot \cos(t)$	$r \cdot \cos(t)$

III. Методом конечных разностей решить следующие краевые задачи. Построить изолинии функции  $u(x, y)$ . Полученный результат сравнить с аналитическим решением.

Решить уравнение $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ со следующими краевыми условиями						
№	$f(x, y)$	Левое ГУ	Правое ГУ	Нижнее ГУ	Верхнее ГУ	Решение $u(x, y)$
1	0	$u_x _{x=0} = 0$	$u _{x=1} = y^2 - 1$	$u_y _{y=0} = 0$	$u _{y=1} = 1 - x^2$	$y^2 - x^2$
2	$2 \cdot (y^2 + x^2)$	$u _{x=0} = 0$	$u_x _{x=1} = 2 \cdot y^2$	$u_y _{y=0} = 0$	$u _{y=1} = x^2$	$y^2 \cdot x^2$
3	$-\cos(x \cdot y) \cdot (x^2)$	$u _{x=0} = 1$	$u _{x=1} = \cos(y)$	$u_y _{y=0} = 0$	$u_y _{y=1} = -x \cdot \sin(x)$	$\cos(x \cdot y)$
4	$-\sin(x \cdot y) \cdot (x^2)$	$u_x _{x=0} = y$	$u_x _{x=1} = y \cdot \cos(y)$	$u_y _{y=0} = 0$	$u _{y=1} = \sin(x)$	$\sin(x \cdot y)$
5	$-2 \cdot \sin(x + y)$	$u_x _{x=0} = \cos(y)$	$u _{x=\pi} = -\sin(y)$	$u _{y=0} = \sin(x)$	$u _{y=\pi} = -\sin(x)$	$\sin(x + y)$
6	$-2 \cdot \cos(x + y)$	$u _{x=0} = \cos(y)$	$u_x _{x=\pi} = \sin(y)$	$u _{y=0} = \cos(x)$	$u _{y=\pi} = -\cos(x)$	$\cos(x + y)$

7	0	$u _{x=0} = 0$	$u _{x=1} = y$	$u_y _{y=0} = x$	$u _{y=1} = x$	$x \cdot y$
8	$6 \cdot (y - x)$	$u _{x=0} = y^3$	$u _{x=1} = y^3 - 1$	$u _{y=0} = -x^3$	$u_y _{y=1} = 3$	$y^3 - x^3$

Решить уравнение $u_{zz} + \frac{1}{r}(r \cdot u_r)_r = f(r, z)$ со следующими краевыми условиями						
№	$f(r, z)$	Левое ГУ	Правое ГУ	Нижнее ГУ	Верхнее ГУ	Решение $u(r, z)$
1	$9 \cdot r \cdot z$	$u _{z=0} = 0$	$u _{z=1} = r^3$	$u_r _{r=0} = 0$	$u _{r=1} = z$	$z \cdot r^3$
2	$2 \cdot (r^2 + 2 \cdot z^2)$	$u _{z=0} = 0$	$u _{z=1} = r^2$	$u_r _{r=0} = 0$	$u_r _{r=1} = 2 \cdot z^2$	$z^2 \cdot r^2$
3	$-z \left( \frac{1}{r} \cdot \sin(r) + \cos(r) \right)$	$u_z _{z=0} = \cos(r)$	$u _{z=1} = \cos(r)$	$u_r _{r=0} = 0$	$u _{r=\pi} = -z$	$z \cdot \cos(r)$
4	$z \cdot \left( \frac{e^r - 1}{r} + e^r \right)$	$u _{z=0} = 0$	$u_z _{z=1} = e^r - r$	$u_r _{r=0} = 0$	$u _{r=1} = z \cdot (e - 1)$	$z \cdot (e^r - r)$
5	$-z \left( \frac{1 - \cos(r)}{r} + \sin(r) \right)$	$u _{z=0} = 0$	$u_z _{z=1} = \sin(r) - r$	$u_r _{r=0} = 0$	$u _{r=\pi} = -z \cdot \pi$	$z \cdot (\sin(r) - r)$
6	$\frac{z}{r} \cdot (1 + e^{-r} \cdot (r - 1))$	$u_z _{z=0} = r + e^{-r}$	$u _{z=1} = r + e^{-r}$	$u _{r=0} = z$	$u _{r=1} = z(1 - e^{-1})$	$z \cdot (e^{-r} + r)$

Решить уравнение $\frac{1}{r}(r \cdot u_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} = f(r, z)$ со следующими краевыми условиями						
№	$f(r, \phi)$	Левое ГУ	Правое ГУ	Нижнее ГУ	Верхнее ГУ	Решение $u(r, \phi)$
1	0	$u _{\phi=0} = 0$	$u _{\phi=\frac{\pi}{2}} = -r^2$	$u_r _{r=1} = 2 \cos(2\phi)$	$u _{r=2} = 4 \cos(2\phi)$	$r^2 \cos(2\phi)$
2	0	$u _{\phi=0} = 0$	$u _{\phi=\frac{\pi}{2}} = -2 \cdot r^2$	$u_r _{r=1} = 2 \sin(2\phi)$	$u _{r=2} = 4 \sin(2\phi)$	$r^2 \sin(2\phi)$



3	0	$u _{\phi=0} = 0$	$u _{\phi=\frac{\pi}{4}} = r^{-2}$	$u_r _{r=1} = -2 \sin(2\phi)$	$u_r _{r=2} = -\frac{1}{4} \sin(2\phi)$	$r^{-2} \sin(2\phi)$
4	$-3r^{-1} \sin(\phi)$	$u _{\phi=0} = 0$	$u_\phi _{\phi=\frac{\pi}{2}} = -2r$	$u _{r=1} = \sin(2\phi)$	$u _{r=2} = 2 \sin(2\phi)$	$r \sin(2\phi)$
5	$3 \cdot \sin(\phi)$	$u _{\phi=0} = r^2$	$u _{\phi=\frac{\pi}{2}} = r^2$	$u_r _{r=1} = 2 \sin(\phi)$	$u _{r=2} = 4 \sin(\phi)$	$r^2 \sin(\phi)$
6	$3 \cdot \cos(\phi)$	$u _{\phi=0} = r^2$	$u_\phi _{\phi=\frac{\pi}{2}} = -r^2$	$u _{r=1} = \cos(\phi)$	$u_r _{r=2} = 4 \cos(\phi)$	$r^2 \cos(\phi)$

## Список литературы

- 1 *На. Ц.* Вычислительные методы решения прикладных задач. М. Мир, 1982. 296 с.
- 2 *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- массообмена. - М.: Наука. 1984. - 288 с.
- 3 *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 388с.
- 4 *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
- 5 *Андерсен Д., Таннехилл Дж., Плетчер. Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. М.: Мир. 1990. 728 с.
- 6 *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. М.: Энергия. 1975. 488.
- 7 *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
- 8 *Кутателадзе С.С.* Анализ подобия в теплофизике. Новосибирск: Наука. 1982. 280 с.

## Дополнительная литература

- 1 *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 536 с.
- 2 *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС. 2003. 784 с.
- 3 *Берковский Б.М., Ноготов Е.Ф.* Разностные методы исследования задач теплообмена. Минск: Наука и техника. 1976. 144 с.
- 4 *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 288 с.
- 5 *Годунов С.К. Рябенский В.С.* Разностные схемы. М.: Наука. 1973.



*Учебное издание*

**Алексей Юрьевич Крайнов  
Леонид Леонидович Миньков**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА**

Учебное пособие

*Опубликовано в авторской редакции*

Издательство "СТТ"  
Россия, 634028, г. Томск, проспект Ленина, 15<sup>Б</sup>-1  
Тел.: (3822) 421-455  
E-mail: stt@sttonline.com

Усл. печ. л. 4,83. Уч.-изд. л. 1,87.  
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.  
Подписано к печати 30.05.2016 г. Формат 60x84/16  
Тираж 100 экз. Заказ № 559.