Министерство образования и науки Российской Федерации
Национальный исследовательский
Томский государственный университет

А.Ю. Крайнов, К.М. Моисеева

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Scientific & Technical Translations
STT
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Томск – 2016

УДК 519.62
ББК 22.194
К78

К78 **Крайнов А.Ю., Моисеева К.М.** Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие. – Томск : STT, 2016. – 44 с.

ISBN 978-5-93629-560-7

Представлены численные методы решения краевых задач для линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены алгоритмы реализации численных методов, примеры численного решения задач, а также примеры программных реализаций. Учебное пособие составлено для студентов четвертого курса, изучающих «Численные методы в технической физике» по программе подготовки бакалавров по направлениям 16.03.01 - Техническая физика, 24.03.03 – Баллистика и гидроаэродинамика на физико-техническом факультете ТГУ.

УДК 519.62
ББК 22.194

Учебное пособие разработано при финансовой поддержке Гранта Президента МК 5959.2016.8 и частично при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 10.1329.2014/К.

Рецензенты:

Васенин И.М. – докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета;

Носков М.Д. – докт. физ.-мат. наук, профессор, заместитель руководителя по НР и МД СТИ НИЯУ МИФИ.

ISBN 978-5-93629-560-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Пособие посвящено изложению численных методов решения двухточечных задач, которые встречаются во всех областях науки и техники. Для таких задач граничные условия задаются в двух точках, а дифференциальные уравнения часто нелинейны, так что получить аналитическое решение не возможно и поэтому для получения решения необходимо использовать численные методы.

Численные методы решения таких задач делятся на два типа – итерационные и неитерационные. Для линейных задач решение можно получить без использования итераций, при решении нелинейных задач без итерационных методов не обойтись. Однако следует отметить, что существует несколько способов, позволяющих исключить итерации, в результате чего существенно сокращается время счета. В пособии изложены как итерационные методы – метод Эйлера, метод линейной интерполяции, метод конечных разностей, так и безитерационные методы – метод прогонки, метод суперпозиции.

1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Математическое моделирование задач механики, физики и других отраслей науки и техники сводятся к дифференциальным уравнениям. В связи с этим решение дифференциальных уравнений является одной из важнейших математических задач. В вычислительной математике изучаются численные методы решения дифференциальных уравнений, которые особенно эффективны в сочетании с использованием вычислительной техники. Прежде чем обсуждать методы решения дифференциальных уравнений, напомним некоторые сведения из курса дифференциальных уравнений [1], и в особенности те, которые понадобятся при дальнейшем изложении.

Дифференциальные уравнения делятся на две категории в зависимости от числа переменных: обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие одну независимую переменную, и уравнения с частными производными, содержащие несколько независимых переменных. Данный раздел посвящен методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции $y = y(x)$. Их можно записать в виде

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1.1)$$

где x – независимая переменная.

Наивысший порядок n входящей в уравнение (1.1) производной называется порядком дифференциального уравнения. В частности, запишем уравнения первого и второго порядков:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0, \qquad\qquad F\left(x, y, y', y''\right) = 0.$$

Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение, линейное относительно искомой функции $y(x)$ и ее производных. Например, $y' - x^2 y = \sin x$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Решением дифференциального уравнения (1.1) называется всякая n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая после ее подстановки в исходное дифференциальное уравнение превращает его в тождество.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка (1.1) содержит n произвольных постоянных C_1, C_2,… C_n:

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) \qquad (1.2)$$

где (1.2) является решением уравнения (1.1) при любых значениях C_1, C_2,… C_n, а любое решение уравнения (1.1) можно представить в виде (1.2) при некоторых C_1, C_2,… C_n.

Частное решение дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения. Для уравнения первого порядка общее решение зависит от одной произвольной постоянной:

$$y = \varphi\left(x, C\right). \qquad (1.3)$$

Для заданного значения постоянной, $C = C_0$, частное решение уравнения (1.3) имеет вид: $y = \varphi(x, C_0)$.

Для выделения частного решения из общего нужно задавать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных в общем решении, т. е. каков порядок уравнения. В качестве дополнительных условий могут задаваться значения искомой функции и ее производных при некоторых значениях независимой переменной, т. е. в некоторых точках.

Если дополнительные условия задаются в одной точке, $t = t_0$, то такая задача называется задачей Коши. Дополнительные условия называются начальными условиями, а точка, в которой они задаются, – начальной точкой. Для уравнения первого порядка дополнительное условие одно, поэтому в этом случае может быть сформулирована только задача Коши.

Если же для уравнения порядка $n > 1$ дополнительные условия задаются в более чем одной точке, т. е. при разных значениях независимой переменной, то такая задача называется краевой. Сами дополнительные условия называются при этом граничными (или краевыми) условиями. На практике обычно граничные условия задаются в двух точках $x = a$ и $x = b$, являющихся границами отрезка, на котором рассматривается дифференциальное уравнение.

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно разбить на следующие группы: графические, аналитические, приближенные и численные.

Мы будем рассматривать численные методы решения дифференциальных уравнений, которые в настоящее время являются основным инструментом при исследовании научно-технических задач, описываемых дифференциальными уравнениями.

1.1. Метод Эйлера

Простейшим численным методом решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения является метод Эйлера. Рассмотрим уравнение

$$y' = f\left(x, y\right) \tag{1.4}$$

в окрестностях узлов $x = x_i, \left(i = 0, 1, ...\right)$ и заменим в левой части производную y' правой разностью. При этом значения функции y в узлах x_i заменим значениями сеточной функции $y\,(x_i) = y_i$:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = f\left(x_i, y_i\right). \tag{1.5}$$

Говорят, что уравнение (1.5) аппроксимирует исходное уравнение (1.4) с первым порядком, так как погрешность аппроксимации определяется, как $O\,(h_i)$.

Рассмотрим равномерную сетку, с узлами, равноотстоящими друг от друга, $h_i = x_{i+1}$-$x_i = h = const$, ($i = 0,\ 1,\ \ldots$). Тогда из равенства (1.5) получаем

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right), \quad i = 0,1,\ldots \tag{1.6}$$

Заметим, что из уравнения (1.5) при $h \to 0$ следует

$$y'\left(x_i\right) = f\left(x_i, y\left(x_i\right)\right) = f\left(x_i, y_i\right).$$

Уравнение (1.6) позволяет приближенно определить значение функции y в точке x_{i+1} при помощи разложения в ряд Тейлора с отбрасыванием членов второго и более высоких порядков. Другими словами, приращение функции полагается равным ее дифференциалу.

Полагая i = 0, с помощью соотношения (1.6) можно определить значение сеточной функции y при $x = x_1$, y_1:

$$y_1 = y_0 + hf\left(x_0, y_0\right).$$

Требуемое здесь значение y_0 задано начальным условием $y\ (x_0)\ =\ y_0$.Аналогично могут быть определены значения сеточной функции в других узлах:

$$\begin{aligned} &y_2 = y_1 + hf\left(x_1, y_1\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n = y_{n-1} + hf\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1.7}$$

Построенный алгоритм называется методом Эйлера. Разностная схема этого метода представлена соотношениями (1.6), (1.7). Они имеют вид реккурентных формул, с помощью которых значение сеточной функции y_{i+1} в любом узле x_{i+1} вычисляется по ее значению y_i в предыдущем узле x_i. В связи с этим метод Эйлера относится к одношаговым методам.

Рассмотрим вопрос о погрешности метода Эйлера. Погрешность δ_i в точке x_i равна разности между точным значением искомой функции $y\ (x_i)$

и значением сеточной функции y_i: $\delta_i = y(x_i) - y_i$. Подставим $\delta_i = y(x_i) - y_i$ и $\delta_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$. в (1.6). Имеем

$$y_{i+1} - \delta_{i+1} = y(x_i) - \delta_i + hf(x_i, y(x_i) - \delta_i). \quad (1.8)$$

Разложим функцию f в ряд в окрестности точки $(x_i, y(x_i))$:

$$f(x_i, y(x_i) - \delta_i) = f(x_i, y(x_i)) - \frac{\partial f}{\partial y}\delta_i + O(\delta_i^2) =$$
$$= f(x_i, y(x_i)) + O(\delta_i).$$

Используя полученное разложение, выразим δ_{i+1} из (1.8):

$$\delta_{i+1} = \delta_i + y(x_{i+1}) - y(x_i) - hf(x_i, y(x_i)) + hO(\delta_i).$$

Учитывая, что $y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + O(h^2)$, получаем

$$\delta_{i+1} = \delta_i + O(h^2) + hO(\delta_i). \quad (1.9)$$

Таким образом, погрешность δ_{i+1} отличается от погрешности δ_i на два слагаемых: $O(h^2)$ есть следствие погрешности аппроксимации (1.5), а $hO(\delta_i)$ есть следствие неточности значения y_i.

При нахождении y_1 начальное значение y_0 задается, как правило, точно: $\delta_0 = 0$. Отсюда

$$\delta_1 = O(h^2),\ \delta_2 = \delta_1 + O(h^2) + hO(h^2) = O(h^2)(2 + h) \approx O(h^2).$$

Отсюда видно, что последнее слагаемое в (1.9) можно отбросить. Уравнение примет вид:

$$\delta_{i+1} = \delta_i + O(h^2),$$

т. е. погрешность на каждом шаге увеличивается на величину $O(h^2)$.

При нахождении решения в точке x_n, отстоящей на конечном расстоянии L от точки x_0, погрешность состоит из n слагаемых $O(h^2)$. Если учесть, что $h = L/n$, то для погрешности δ_n получаем окончательное выражение:

$$\delta_n = nO\left(h^2\right) = \frac{L}{h}O\left(h^2\right) = O\left(h\right). \qquad (1.10)$$

Отсюда следует, что метод Эйлера имеет первый порядок точности.

1.2. Методы Рунге-Кутта

Рассмотренный метод Эйлера (1.5) является частным случаем методов первого и второго порядков, относящихся к классу методов Рунге-Кутта. Эти методы применяют для вычисления значения y_{i+1}, $(i = 0,\ 1,\ \ldots)$ через y_i и $f\,(x,\ y)$, определенных при некоторых специальным образом выбираемых значениях $x \in \left[x_i, x_{i+1}\right]$ и $y\,(x)$. На их основе могут быть построены разностные схемы разного порядка точности. Одним из наиболее часто используемых методов является метод Рунге-Кутта четвертого порядка. Алгоритм метода записывается в виде

$$\begin{gathered}
y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3\right),\ i = 0,1,..,\\
k_0 = hf\left(x_i, y_i\right),\\
k_1 = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_0}{2}\right),\\
k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1}{2}\right),\\
k_3 = hf\left(x_i + h,\ y_i + k_2\right).
\end{gathered} \qquad (1.11)$$

Данный метод требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части $f\,(x,\ y)$ уравнения (1.4). Суммарная погрешность этого метода есть величина $O\,(h^4)$.

Метод Рунге-Кутта (1.11) требует большего объема вычислений по сравнению с методом Эйлера, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге-Кутта (1.11).

Дополнительного повышения точности расчетов можно добиться, повысив порядок метода за счет увеличения количества операций на один шаг разностной сетки. Алгоритм расчета уравнения (1.4) для метода Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка представлен уравнениями (1.12).

$$
\begin{aligned}
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_0 + 4k_3 + k_4\right),\ i = 0,1,..,\\
&k_0 = hf\left(x_i, y_i\right),\\
&k_1 = hf\left(x_i + \frac{h}{3},\ y_i + \frac{k_0}{3}\right),\\
&k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{3},\ y_i + \frac{k_0}{6} + \frac{k_1}{6}\right),\\
&k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_0}{8} + \frac{3k_2}{8}\right),\\
&k_4 = hf\left(x_i + h,\ y_i + \frac{k_0}{2} - \frac{3k_2}{2} + 2k_3\right).
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Суммарная погрешность метода равна $O(h^5)$.

В случае длительных расчетов, требующих большого количества вычислений, можно сократить время расчета за счет использования переменного шага разностной сетки h. При использовании переменного шага в расчетах контролируется разность между соседними значениями сеточной функции $\Delta = (y_i - y_{i+1})$. В случае превышения Δ заданной погрешности ε шаг сетки уменьшается в два раза, при малых значениях Δ шаг увеличивается в два раза. Условия автоматического выбора шага сетки представлены уравнениями (1.13).

$$
h_{i+1} = \begin{cases} 2\cdot h_i, \Delta \le \dfrac{5}{32}\varepsilon;\\ 0.5\cdot h_i, \Delta \ge 5\varepsilon;\\ h_i, \dfrac{5}{32}\varepsilon < \Delta < \varepsilon\cdot 5. \end{cases}
\tag{1.12}
$$

Условия (1.12) позволяют существенно сократить время расчета задачи, сохранив точность решения.

В таблице 1.1 приведены результаты расчета дифференциального уравнения

$$y' + y = 3\exp\left(2x\right),\ x \in \left[0, 1\right].$$

точное решение которого имеет вид:

$$y\left(x\right) = \exp\left(2x\right).$$

В таблице представлены результаты расчета на сетке, состоящей из 5 равноотстоящих узлов. Для сравнения решение выполнено методами Эйлера, Рунге-Кутта 4-го порядка и Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка.

Таблица 1.1

Результаты расчета

x_i	$y_{ан}(x_i)$	y_i (метод Эйлера)	y_i (метод Рунге-Кутта)	y_i (метод Рунге-Кутта-Мерсона)
0	1	1	1	1
0.2	1.49183	1.4	1.49186	1.49184
0.4	2.22554	2.0151	2.22563	2.22557
0.6	3.32012	2.9474	3.32028	3.32017
0.8	4.95303	4.34999	4.95329	4.95313
1	7.38906	6.45181	7.38946	7.38921

Из таблицы видно, что методы Рунге-Кутта 4-го порядка и Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка дают результаты, близкие аналитическому решению, даже на сетке, состоящей из 5 точек.

Стоит заметить, что результаты, полученные методом 5-го порядка точнее результатов, полученных с помощью метода 4-го порядка.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

2.1. Постановка краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

На практике приходится часто решать задачи, когда условия задаются при двух значения независимой переменной (на концах рассматриваемого отрезка). Такие задачи называются краевыми, получаются при решении уравнений высших порядков или систем уравнений.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \rho\left(x\right)\frac{dy}{dx} + q\left(x\right)y + f\left(x\right) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{2.1}$$

Краевые условия в общей форме запишем в виде:

$$-\alpha_1 \frac{dy\left(0\right)}{dx} + \beta_1 y\left(0\right) = \gamma_1, \tag{2.2}$$

$$\alpha_2 \frac{dy\left(l\right)}{dx} + \beta_2 y\left(l\right) = \gamma_2. \tag{2.3}$$

Здесь x – независимая переменная, изменяющаяся от $x = 0$ до $x = l$; $y = y\ (x)$ – искомая функция; $\rho\ (x)$, $q\ (x)$ и $f\,(x)$ – заданные функции, которые чаще всего на промежутке $x \in \left[0,\ l\right]$ являются непрерывными; α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 – заданные числа, определяющие вид граничных условий (2.2) – (2.3). Требуется найти такое решение $y\ (x)$ уравнения (2.1), которое при стремлении x к точке $x = 0$ справа удовлетворяло бы граничному условию (2.2), а при стремлении x к правой границе $x = l$ слева (изнутри области) – удовлетворяло бы правому граничному условию (2.3).

Существуют различные частные случаи граничных условий (2.2) – (2.3). Так, например, если $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, то говорят, что задано граничное условие первого рода: $y\ (0) = \gamma_1$; если, например, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$, то говорят, что на границе $x = l$ задано граничное условие второго рода $y'\ (l) = \gamma_2$. Если, например, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, то говорят, что на границе $x = 0$ задано граничное условие третьего рода. В этом случае при корректной постановке задачи коэффициенты при y и y' в левом граничном условии должны быть различных знаков, а в правом – одного и того же знака, что и отражено в записи граничных условий (2.2) – (2.3).

Численные методы решения краевых задач (2.1) – (2.3) делятся на две группы. Отнесем условно к первой группе такие методы, когда решение краевой задачи сводится к решению нескольких (двух) задач Коши. Известно, что решение задач Коши можно реализовать с любой заданной точностью различными методами.

Ко второй группе методов решения краевых задач относится метод конечных разностей. При этом дифференциальные операторы заменяются разностными (чаще всего, на равномерной сетке), и задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. При этом точность результатов оценивается путем двойного расчета при различных шагах сетки (часто при h и $h/2$).

2.2. Методы решения краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

2.2.1. Метод стрельбы

Дана краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y + f(x) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{2.4}$$

С граничными условиями в виде

$$y(0) = a, \tag{2.5}$$

$$y(l) = b\,. \tag{2.6}$$

Приведем задачу (2.4) – (2.6) к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого введем обозначение $y' = z$, тогда уравнение 2.4 перепишется в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -p(x)z - q(x)y - f(x). \end{cases} \tag{2.7}$$

Исходное дифференциальное уравнение второго порядка (2.4) превратилось в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка (2.7). Для решения (2.7) необходимо два начальных условия. В случае, если будут определены начальные условия, задача (2.7) с двумя начальными условиями будет являться задачей Коши. Одно начальное условие для системы уравнений (2.7) задано в исходной постановке уравнением (2.5). Для разрешимости (2.7) необходимо второе условие, соответствующее функции $z\ (x)$ в координате $x = 0$.

$$y(0) = a \tag{2.8}$$

$$z(0) = ? \tag{2.9}$$

Задача (2.7) – (2.9) есть задача Коши для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка.

По смыслу значение функции $z\ (0)$ определяет тангенс угла наклона функции $y\ (x)$ при $x = 0$. Если в качестве начального значения функции $z\ (x)$ задать произвольное значение $z\ (0) = \lambda$, и решить задачу (2.7) – (2.9) численно, одним из методов, описанных в главе 1, то в координате $x = l$ будет вычислено некоторое значение $y\ (l) = y_n$. Очевидно, что при случайном выборе $z\ (0) = \lambda$ величина $y\ (l) = y_n \neq b$, что противоречит начальному условию (2.6) исходной задачи. При изменении параметра λ для граничного условия $z\ (0) = \lambda_1$ решение задачи (2.7) дает отличное от предыдущего значение исходной функции на правой границе, $y\ (l) = y_{n,1}$. Исходя из этого, используется следующий алгоритм расчета. Вычисляются значения $y\ (l)$ при $z\ (0) = \lambda$ и $z\ (0) = \lambda_1$. Проводится анализ, как при изменении величины λ, изменилась величина y_n: стала ли она «ближе» к величине b, или «дальше». По результатам анализа определяется новая величина параметра λ и повторяется расчет. Многократным заданием величины λ добиваемся совпадения вычисленной величины y_n с величиной b с заданной точностью расчета.

Такой метод расчета называется методом «стрельбы». Название пошло из баллистики артиллерийский снарядов, когда путем выстрелов с «недолетом» и «перелетом» третьим выстрелом цель (в нашем случае это величина функции $y\ (l) = y_n$) поражается.

В случае, когда на левой границе ($x = 0$) задано условие второго рода ($y'\ (0) = a$), в качестве начальных условий (2.8) – (2.9) выступают уравнения: $y\ (0) = \lambda$, $z\ (0) = a$,. Варьируемой величиной является значение исходной функции на границе $x = 0$. Алгоритм расчета при этом не меняется. В случае, когда на правой границе ($x = l$) задано значение производной ($y'\ (l) = b$), в расчетах с величиной b необходимо сравнивать полученное для разных величин λ значение z_n.

Пример программы для граничных условий третьего рода:

$$-\alpha_1 \frac{dy(0)}{dx} + \beta_1 y(0) = \gamma_1, \quad \alpha_2 \frac{dy(l)}{dx} + \beta_2 y(l) = \gamma_2.$$

приведен в приложении 1.

2.2.2. Метод линейной интерполяции (метод хорд)

Рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y + f(x) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{2.10}$$

Граничные условия возьмем в виде

$$y(0) = a, \tag{2.11}$$

$$y'(l) + \alpha\, y(l) = b. \tag{2.12}$$

Здесь a, b, α – заданные числа, определяющие вид граничных условий

Решать численно краевые задачи можно как слева направо (от $x = 0$ к $x = l$), так и, наоборот, $x = l$ до $x = 0$.

Рассмотрим сначала порядок расчета слева направо. При переходе от задачи (2.10) к системе двух дифференциальных уравнений (2.7) требуется дополнить систему двумя граничными условиями. Так как мы выбрали расчет слева направо, то для решения задачи требуются граничные условия слева, уравнение (2.11). Согласно (2.11) на левой границе задано значение функции $y\ (0) = a$, но не задано значение производной. Введем для производной условие $y'\ (0) = \lambda$ (λ – неизвестная величина). Значение «недостающего» начального условия λ нужно найти так, чтобы выполнилось правое граничное условие (2.12). Оказывается, что это можно сделать за две попытки. Выберем любые два значения $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ и решим две задачи Коши для уравнения (2.7) с начальными условиями:

$$\begin{aligned} &y_1(0) = a, \ \ y_1'(0) = \lambda_1; \\ &y_2(0) = a, \ \ y_2'(0) = \lambda_2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Полученные решения обозначим как $y = y_1\ (x)$ и $y = y_2\ (x)$. Найдем соответствующие значения левых частей в граничном условии (2.12). Пусть

$$y_1'(l) + \alpha y_1(l) = b_1,$$
$$y_2'(l) + \alpha y_2(l) = b_2.$$

Здесь значения b_1 и b_2 получены в результате численного решения двух задач Коши (2.7) с граничными условиями (2.13). Теперь искомое значение недостающего начального условия $y'(0) = \lambda$ можно найти с помощью линейной интерполяции:

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{b - b_1}{b_2 - b_1}, \text{ т.е. } \lambda = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{b - b_1}{b_2 - b_1}. \quad (2.14)$$

Полученное значение λ и будет являться недостающим начальным условием. Объясняется это линейностью задачи. Как известно, дифференциальное уравнение (2.10) имеет общее решение

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + y_н(x),$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – линейно-независимые решения однородного уравнения (при $f(x) \equiv 0$), а $y_n(x)$ – какое-либо решение неоднородного уравнения (частное решение неоднородного уравнения). Удовлетворяя левому граничному условию (2.11), в общем решении останется одна неизвестная постоянная, которая входит в выражение для $y(x)$ линейным образом. Проведя в плоскости (λ, b) прямую, проходящую через две точки (λ_1, b_1) и (λ_2, b_2) при заданном значении b мы однозначно найдем точное значение λ.

Теперь таблицу значений функции $y(x)$ (и ее производной) можно найти интерполяцией $y(x) = y_1(x) + \left[y_1(x) - y_1(x)\right] \cdot \dfrac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

Однако на практике, жертвуя машинным временем, обычно проводят третий расчет задачи Коши с условиями

$$y(0) = a, \quad y'(0) = \lambda.$$

В случае расчета справа налево от точки $x = l$ до $x = 0$ алгоритм расчета меняется. Рассмотрим задачу (2.10) с начальными условиями:

$$y(l) = \lambda,$$
$$y'(l) = b - \alpha\lambda.$$

Решая две задачи Коши для $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ при $x = 0$ получим некоторые значения $y_1(0) = a_1$ и $y_2(0) = a_2$. Недостающее начальное условие получится с помощью линейной интерполяции

$$\lambda = \lambda_1 + \left(\lambda_2 - \lambda_1\right) \cdot \frac{a - a_1}{a_2 - a_1}.$$

<u>Замечание.</u> На практике обычно выбирают простейшие значения λ, например $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$. При этом, если само уравнение (2.10) является однородным, т.е. $f(x) \equiv 0$, и граничное условие так же однородное, $y(0) = 0$, то решение имеет вид $y_2(x) \equiv 0$, $b_2 = 0$. Тогда второй расчет (при $\lambda_2 = 0$) нет необходимости производить и формула (2.14) даст ответ в виде

$$\lambda = \lambda_1 \frac{b}{b_1}.$$

Поэтому, если предложено решить однородное уравнение, то следует посмотреть, есть ли однородное граничное условие и если оно есть, то начинать расчет следует от этой границы! Эта рекомендация остается в силе и для других методов решения краевых задач.

<u>Пример.</u> Решить краевую задачу:

$$y'' + \left(1 - 4x\right)y' + 8y = 5, \;\; 0 < x < 1;$$
$$y'\left(0\right) - y\left(0\right) = 0; \;\; y\left(1\right) = 0.$$

Будем проводить расчет слева направо (от $x = 0$ до $x = 1$). Выберем начальные условия, удовлетворяющие левому граничному условию:

$$y_1\left(0\right) = \lambda_1; \;\; y_1'\left(0\right) = \lambda_1;$$
$$y_2\left(0\right) = \lambda_2; \;\; y_2'\left(0\right) = \lambda_2.$$

Чтобы показать универсальность метода, в расчете были выбраны, наверное, совсем неподходящие значения $\lambda_1 = 20$ и $\lambda_2 = 10$.

Таблица 2.1

x	y_1	y_1'	y_2	y_2'	y	y'
0.00	20.000	20.000	10.000	10.000	1.000	1.000
0.10	21.140	2.961	10.582	1.718	1.080	0.600
0.20	20.622	-13.198	10.358	-6.146	1.120	0.200
0.30	18.529	-28.511	9.366	-13.611	1.120	-0.200

0.40	14.947	-42.979	7.649	-20.674	1.080	-0.600
0.50	9.963	-56.567	5.245	-27.321	1.000	-1.000
0.60	3.666	-69.201	2.200	-33.516	0.880	-1.400
0.70	-3.842	-80.758	-1.441	-39.201	0.720	-1.800
0.80	-12.444	-91.051	-5.621	-44.287	0.520	-2.200
0.90	-22.000	-99.797	-10.274	-48.641	0.280	-2.600
1.00	-32.338	-106.573	-15.318	-52.061	0.000	-3.000

В таблице 2.1 приведены результаты расчета. В первом столбце выданы значения x с шагом $h = 0.1$. Затем в двух столбцах выданы значения $y_1\ (x)$ и $y_1{}'\ (x)$, в следующих двух – $y_2\ (x)$ и $y_2{}'\ (x)$, в двух последних столбцах – решение краевой задачи. В результате интерполяции по формуле (2.14) получено значение $\lambda = 1$.

<u>Обсудим результаты</u>. Заслуживает внимание последний столбец (для $y'\ (x)$). Нетрудно заметить, что значение $y'\ (x)$ от одной точки к соседней изменяются на постоянную величину – 0.4. Это означает, что функция $y'\ (x)$ – линейная (многочлен первой степени). Значит, точное решение $y\ (x)$ – многочлен второй степени и, следовательно, можно найти в аналитической форме точное решение задачи. Оно имеет вид $y = ax^2 + bx + c$. Коэффициенты a, b и c можно найти подстановкой найденного выражения $y\ (x)$ в дифференциальное уравнение и в граничные условия. Рекомендуем проделать эти выкладки и получить точное решение.

Можно поступить и проще. Найдем по таблице y''.

$$y'' = \frac{y_1{}' - y_0{}'}{h} = \frac{0.6 - 1}{0.1} = -4.$$

Откуда $y'\left(x\right) = -4x + 1$; $y\left(x\right) = -2x^2 + x + 1$. При интегрировании использовались начальные условия $y'\ (0) = 1$, $y\ (0) = 1$. Рекомендуем проверить, что найденное решение действительно удовлетворяет заданному уравнению, и граничным условиям. Вот так численный счет помог найти аналитическое решение задачи!

2.2.3. Метод суперпозиции

Рассмотрим простейшую первую краевую задачу для уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y + f(x) = 0, \quad a < x < b. \tag{2.15}$$

На концах промежутка заданы граничные условия

$$y(a) = \alpha, \tag{2.16}$$

$$y(b) = \beta . \tag{2.17}$$

Здесь $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – заданные функции на промежутке $a < x < b$; a, b, α, β – заданные числа, определяющие граничные условия. Сущность метода суперпозиции состоит в представлении общего решения уравнения (2.15) в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Удовлетворяя одному из граничных условий, например, левому (2.16), найдем связь между произвольными постоянными, входящими в общее решение однородного уравнения. Проведем реализацию метода следующим образом:

Будем искать решение краевой задачи (2.15) – (2.17) в виде

$$y(x) = cu(x) + v(x) \tag{2.18}$$

И потребуем, чтобы это выражение удовлетворяло уравнению (2.15) и граничному условию (2.16) при любом значении постоянной c. Подставляя (2.18) в (2.15), получим

$$c\left[u'' + pu' + qu\right] + v'' + pv' + qv = f.$$

Чтобы это равенство имело место при любом значении постоянной c, необходимо выражение в квадратных скобках приравнять нулю. В результате получаем два дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} &u'' + p(x)u' + q(x)u = 0, \\ &v'' + p(x)v' + q(x)v = f(x). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Подстановка (2.18) в граничное условие (2.16) дает

$$cu(a) + v(a) = \alpha,$$

откуда имеем

$$u(a) = 0, \; v(a) = \alpha. \tag{2.20}$$

Чтобы получить задачу Коши для системы (2.19), необходимо задать значения производных $u'(a)$ и $v'(a)$. Эти значения можно задать любыми, но обычно выбирают простейшими. Так, уравнение для $u(x)$ – однородное, первое граничное условие (2.20) – однородное, и поэтому, чтобы получить нетривиальное решение $u(x)$, берут условие

$$u'(a) = 1. \tag{2.21}$$

Наоборот, уравнение для $v(x)$ – неоднородное, и нетривиальное решение $v(x)$ получится даже при условии

$$v'(a) = 0. \tag{2.22}$$

Решая задачу Коши (2.19) – (2.22) , найдем в конечной точке $x = b$ значения $u(b)$ и $v(b)$. Теперь осталось удовлетворить правому граничному условию (2.17) $cu(b) + v(b) = \beta$, откуда определяется постоянная

$$c = \frac{\beta - v(b)}{u(b)}. \tag{2.23}$$

Окончательно, имея таблицу значений функций $u(x)$ и $v(x)$ и, зная постоянную c из (2.23), по формуле (2.18) можем пересчитать таблицу значений искомого решения $y(x)$.

<u>Замечание 1.</u> Заметим, что пересчет решения $y(x)$ по формуле (2.18) не всегда является удобным, т.к. требует накопления больших массивов $u(x)$ и $v(x)$, поэтому иногда, жертвуя машинным временем, заново рассчитывают задачу Коши для исходного уравнения (2.15), т.к. недостающее начальное условие для этого уравнения оказалось уже найденным $y'(a) = cu'(a) + v'(a) = c \cdot 1 + 0 = c$.

<u>Замечание 2.</u> Рассмотренный алгоритм остается в силе с небольшими изменениями и при других линейных граничных условиях. Например, если заданы граничные условия третьего и второго рода:

$$-y'(a) + hy(a) = \alpha; \quad y'(b) = \beta, \tag{2.24}$$

подстановка (2.18) в левое граничное (2.24) дает

$$c\left[-u'(a) + hu(a)\right] - v'(a) + hv(a) = \alpha$$

и можно выбрать

$$u\left(a\right)=1;\ \ u'\left(a\right)=h;$$
$$v\left(a\right)=0;\ v'\left(a\right)=-\alpha,$$

при этом

$$c=\frac{\beta-v'\left(b\right)}{u'\left(b\right)},$$

и

$$y\left(a\right)=c,\quad y'\left(a\right)=ch-\alpha.$$

Замечание 3. Расчет краевой задачи несколько упрощается, если исходное дифференциальное уравнение (2.15) является однородным ($f\ (x)\equiv 0$) и одно из граничных условий также однородное. Например

$$y''+p\left(x\right)y'+q\left(x\right)y=0,$$
$$y'\left(a\right)=\alpha;\quad y'\left(b\right)=0.$$

В этом случае следует проводить расчет справа налево (от точки $x=b$ к точке $x=a$) и можно обойтись расчетом одного уравнения. В самом деле, ищем решение в виде $y=cu.$ Тогда задача (2.15) – (2.17) принимает вид:

$$u''+pu'+qu=0;\quad u'\left(b\right)=0.$$

Выбирая, например, условие $u\ (b)=1$, проводим расчет (с отрицательным шагом) до точки $x=a$ и из левого граничного условия находим $cu'\left(a\right)=\alpha$, откуда

$$c=\frac{\alpha}{u'\left(a\right)}=y\left(b\right).$$

2.2.4. Метод дифференциальной прогонки

Суть метода прогонки заключается в следующем. Основываясь на форме граничного условия в начальной точке, выводится обыкновенное дифференциальное уравнение, порядок которого на единицу меньше порядка заданного дифференциального уравнения и коэффициенты которого включают неизвестные функции. Количество таких неизвестных функций равно порядку исходного уравнения. Если выведенное уравнение продифференцировать, то новое уравнение будет иметь тот же порядок, что и заданное. Приравнивая коэффициенты этих двух уравнений, получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка, интегрированием которой можно получить неизвестные коэффициенты. В частности, решения в конечной точке совместно с граничными условиями в этой точке составляют полый набор уравнений для нахождения всех граничных значений. Этот этап называется прямой прогонкой. Зная полный набор граничных условий в конечной точке, исходное уравнение можно проинтегрировать как задачу Коши от начальной до конечной точки. Таким образом удается избежать итераций.

Рассмотрим граничную задачу, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\left(x\right)y + q\left(x\right), \tag{2.25}$$

и граничными условиями

$$\frac{dy\left(a\right)}{dx} = \alpha_{00}y\left(a\right) + \alpha_{10}, \tag{2.26}$$

$$\frac{dy\left(b\right)}{dx} = \beta_{00}y\left(b\right) + \beta_{10}, \tag{2.27}$$

где $p\ (x)$ и $q\ (x)$ – непрерывные функции; α_{00}, β_{00}, α_{10}, β_{10} – константы, определяющие вид граничных условий.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_0\left(x\right)y\left(x\right) + \alpha_1\left(x\right), \tag{2.28}$$

и выберем $\alpha_0\ (x)$ и $\alpha_1\ (x)$ так, чтобы $y\ (x)$ удовлетворяло уравнению (2.25). Продифференцировав (2.28) по x, получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(d\alpha_0 / dx\right)y + d\alpha_1 / dx + \alpha_0 dy / dx\,. \tag{2.29}$$

Заменив здесь dy/dx выражением, стоящим в правой части уравнения (2.28) получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(d\alpha_0 / dx + \alpha_0^2\right)y + d\alpha_1 / dx + \alpha_0\alpha_1. \tag{2.30}$$

Из сравнения с (2.25) получаем следующие уравнения:

$$d\alpha_0(x)/dx + \alpha_0^2 = p(x), \tag{2.31}$$

$$d\alpha_1(x)/dx + \alpha_0(x)\alpha_1(x) = q(x). \tag{2.32}$$

В качестве первого шага проинтегрируем на отрезке $a < x < b$ уравнения (2.31) и (2.32) как задачу Коши, приняв в качестве начальных значений

$$\alpha_0(a) = \alpha_{00}, \qquad \alpha_1(a) = \alpha_{10},$$

получим значения $\alpha_0(b)$ и $\alpha_1(b)$. Подставив найденные значения в (2.28), получим

$$dy(b)/dx = \alpha_0(b)y(b) + \alpha_1(b). \tag{2.33}$$

С другой стороны, граничное условие (2.27) при $x = b$ дает

$$dy(b)/dx = \beta_{00}y(b) + \beta_{10}. \tag{2.34}$$

Так как теперь $\alpha_0(b)$ и $\alpha_1(b)$ – известные величины, уравнения (2.33) и (2.34) можно разрешить относительно $y(b)$ и $dy(b)/dx$ и получить

$$y(b) = \left[\beta_{10} - \alpha_1(b)\right] / \left[\alpha_0(b) - \beta_{00}\right], \tag{2.35}$$

$$dy(b)/dx = \left[\beta_{00}\alpha_1(b) - \beta_{10}\alpha_0(b)\right] / \left[\beta_{00} - \alpha_0(b)\right]. \tag{2.36}$$

Теперь задачу Коши, определяемую уравнением (2.25) и начальными условиями (2.35) и (2.36), можно проинтегрировать назад от $x = b$. Другая возможность заключается в том, чтобы проинтегрировать (2.28), используя (2.35) в качестве начального условия.

<u>Пример</u>: Рассмотрим решение следующей граничной задачи

$$d^2y/dx^2 = -y + x\cos x, \tag{2.37}$$

$$dy(0)/dx = 3y(0) + 2, \quad dy(\pi/2)/dx = -5y(\pi/2) + 2 \cdot$$

Известно точное решение этой задачи

$$y = -0.73\cos x - 0.441\sin x + (1/4)(x^2\sin x + x\cos x),$$

откуда

$$y(\pi/2) = 0.175 \quad \text{и} \quad dy(\pi/2)/dx = 1.122.$$

Теперь найдем эти граничные значения, решая задачу методом прогонки.

Сравнивая уравнения (2.37) и (2.25) получаем

$$p(x) = -1, \qquad q(x) = x\cos x, \tag{2.38}$$

так, что уравнения (2.31) и (2.32) записываются в виде

$$\begin{aligned} d\alpha_0(x)/dx &= -1 - \alpha_0^2(x), \\ d\alpha_1(x)/dx &= x\cos x - \alpha_0(x)\alpha_1(x). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Граничные условия таковы:

$$\alpha_0(0) = 3, \qquad \alpha_1(0) = 2.$$

Уравнения (2.39) можно проинтегрировать от $x = 0$ до $x = .\pi/2$

Так как

$$dy(x)/dx = \alpha_0(x)y(x) + \alpha_1(x),$$

мы имеем

$$dy(\pi/2)/dx = \alpha_0(\pi/2)y(\pi/2) + \alpha_1(\pi/2).$$

Учитывая, кроме того, граничное значение во второй точке

$$dy(\pi/2)/dx = -5y(\pi/2) + 2. \tag{2.40}$$

Можно разрешить систему уравнений (2.39), (2.40) относительно $y(\pi/2)$ и $dy(\pi/2)/dx$:

$$y(\pi/2) = \left[2 - \alpha_1(\pi/2)\right] / \left[5 + \alpha_0(\pi/2)\right] = 0.176, \tag{2.41}$$

$$dy(\pi/2)/dx = -5y(\pi/2) + 2 = 1.122, \tag{2.42}$$

что согласуется с точным решением.

2.3. Методы решения краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Дифференциальные уравнения, содержащие неизвестные функции и их производные в степени выше первой или определенные каким-либо более сложным образом, называются нелинейными. Многие дифференциальные уравнения, описывающие физические явления, обычно линейны лишь в первом приближении. Детальное и более точное исследование физических явлений, как правило, приводит к нелинейным уравнениям. Решения нелинейных уравнений зачастую очень сложны, и их трудно представить простыми формулами. Значительная часть современной теории решения нелинейных дифференциальных уравнений посвящена качественному анализу их поведения. Теория направлена на разработку методов, позволяющих, не решая уравнения, сказать нечто существенное о характере решений в целом: например, что все они ограничены, или имеют периодический характер, или определенным образом зависят от коэффициентов.

Приближенные решения нелинейных дифференциальных уравнений могут быть найдены численными методами. Именно при решении таких уравнений применяются итерационные методы.

2.3.1. Метод Ньютона

Рассмотрим краевую задачу, определяемую дифференциальным уравнением второго порядка

$$d^2y/dx^2 = f\left(x, y, dy/dx\right) \tag{2.43}$$

и граничными условиями

$$y\left(0\right) = 0 \tag{2.44}$$

$$y\left(l\right) = A \tag{2.45}$$

Запишем уравнение (2.43) в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} dy/dx = u, \\ du/dx = f\left(x, y, u\right). \end{cases} \tag{2.46}$$

Обозначим недостающее начальное значение производной через s:

$$dy\left(0\right)/dx = u\left(0\right) = s. \tag{2.47}$$

Задача заключается в том, чтобы найти такое значение s, при котором решение задачи Коши (2.46) с граничными условиями (2.44), (2.47) удовлетворяет граничному условию (2.45). Иначе говоря, если решение задачи Коши обозначить через $y\ (x,\ s)$ и $u\ (x,\ s)$, то требуется найти такое значение s, что

$$y\left(l, s\right) - A = \varphi\left(s\right) = 0. \tag{2.48}$$

В методе Ньютона итерационная формула для s задается в виде

$$s^{(n+1)} = s^{(n)} - \frac{\varphi\left(s^{(n)}\right)}{d\varphi\left(s^{(n)}\right)/ds},$$

или

$$s^{(n+1)} = s^{(n)} - \frac{y\left(l, s^{(n)}\right) - A}{\partial y\left(l, s^{(n)}\right)/\partial s}. \qquad (2.49)$$

Чтобы найти производную y по s, продифференцируем систему (2.46) с граничными условиями (2.44) и (2.47) по s и получим

$$dY/dx = U, \quad dU/dx = \left(\partial f/\partial y\right)Y + \left(\partial f/\partial u\right)U \qquad (2.50)$$

и

$$Y(0) = 0, \; U(0) = 1, \qquad (2.51)$$

где

$$Y = \partial y/\partial s, \qquad U = \partial u/\partial s. \qquad (2.52)$$

Решение системы уравнений (2.46), удовлетворяющее граничным условиям (2.44), (2.45) может быть получено следующими действиями.

1. Выбирается значение s для недостающего начального значения производной (2.47). Это приближенное значение s обозначается через $s^{(1)}$.
2. Интегрируется задача Коши (2.46) с граничными условиями заданными в виде (2.44), (2.47) от $x = 0$ до $x = l$.
3. Интегрируются уравнения (2.50) с начальными условиями (2.51) от $x = 0$ до $x = l$.
4. Значения $y(l, s^{(1)})$ и $Y(l, s^{(1)})$, подставляются в формулу (2.49), что дает

$$s^{(2)} = s^{(1)} - \left[y\left(l, s^{(1)}\right) - A\right]/Y\left(l, s^{(1)}\right),$$

следующее приближение $s^{(2)}$ для недостающего начального значения производной.

5. Шаги 2 – 4 повторяются до тех пор, пока величина s не будет найдена с заданной точностью.

2.3.2. Метод квазилинеаризации

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = f\left(x, y, y'\right) \tag{2.53}$$

С граничными условиями

$$y\left(0\right) = 0, \qquad y\left(L\right) = A, \tag{2.54}$$

где символами y' и y'' обозначены соответственно dy/dx и d^2y/d^2x.

Перепишем уравнение (2.53) в виде

$$\varphi\left(x, y, y', y''\right) = y'' - f\left(x, y, y'\right) = 0. \tag{2.55}$$

Чтобы получить рекуррентное соотношение, обозначим *n* - ю и (*n*+1) - ю итерации через y_n и y_{n+1} и потребуем, чтобы для итераций выполнялось условие $\varphi = 0$. Это позволяет написать для *n* - й итерации

$$y''_n - f\left(x, y, y'\right) = 0. \tag{2.56}$$

Для (*n*+1) - й итерации получаем

$$\begin{aligned}\varphi\left(x_{n+1}, y_{n+1}, y'_{n+1}, y''_{n+1}\right) &= \varphi\left(x_n, y_n, y'_n, y''_n\right) + \\ &+ \left(\partial\varphi/\partial y\right)_n \left(y_{n+1} - y_n\right) + \left(\partial\varphi/\partial y'\right)_n \left(y'_{n+1} - y'_n\right) + \\ &+ \left(\partial\varphi/\partial y''\right)_n \left(y''_{n+1} - y''_n\right) + \ldots = 0,\end{aligned} \tag{2.57}$$

или

$$-\left(\partial f/\partial y\right)_n \left(y_{n+1} - y_n\right) - \left(\partial f/\partial y'\right)_n \left(y'_{n+1} - y'_n\right) + y''_{n+1} - y''_n = 0. \tag{2.58}$$

Подставляя в (2.58) выражение y''_n из (2.56) получаем

$$\begin{aligned}y''_{n+1} - \left(\partial f/\partial y'\right)_n y'_{n+1} - \left(\partial f/\partial y\right)_n y_{n+1} &= \\ = f\left(x, y_n, y'_n\right) - \left(\partial f/\partial y\right)_n y_n - \left(\partial f/\partial y'\right)_n y'_n.&\end{aligned} \tag{2.59}$$

Граничные условия имеют вид

$$y_{n+1}\left(0\right) = 0, \quad y_{n+1}\left(L\right) = A. \tag{2.60}$$

Уравнение (2.59) с граничными условиями (2.60) – это линейная граничная задача, решение которой может быть получено одним из методов, применимых для решения линейных краевых задач (раздел 2.2).

3 РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Наиболее распространенным и универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений является метод конечных разностей. Основное содержание метода заключается в следующем. Область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек, называемых узлами. Эти узлы составляют разностную сетку. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется сеточной. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. При этом для входящих в уравнение производных используются соответствующие конечно-разностные соотношения. Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его аппроксимацией на сетке (или разностной аппроксимацией).

Решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки. Обоснованность замены дифференциального уравнения разностным, точность получаемых решений, устойчивость метода – важнейшие вопросы, которые требуют тщательного изучения.

Рассмотрим содержание метода на примере решения дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f\left(x, y, y'\right) \tag{3.1}$$

при заданных граничных условиях

$$y\left(0\right) = y_0, \;\; y\left(1\right) = y_1 \,. \tag{3.2}$$

Разобьем отрезок [0, 1] на n равных частей точками $x_i = ih$, ($i = 0, 1, \ldots, n$). Решение краевой задачи (3.1), (3.2) сведем к вычислению значений сеточной функции y_i в узловых точках x_i. Для этого воспользуемся уравнением (3.2) для внутренних узлов:

$$y''\left(x_i\right) = f\left(x_i, y\left(x_i\right), y'\left(x_i\right)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.3}$$

Заменим производные, входящие в эти соотношения, их конечно-разностными аппроксимациями:

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2),$$
$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2). \qquad (3.4)$$

Подставляя эти выражения в (3.2), получаем систему разностных уравнений

$$F(x_i, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad (3.5)$$

являющуюся системой (n-1) алгебраических уравнений относительно значений сеточной функции y_1, y_2, …, y_{n-1}. Входящие в данную систему y_0 (при i = 1) и y_n (при i = n-1) выбираются из граничных условий (3.2):

$$y_0 = y(0), \quad y_n = y(1).$$

На практике часто граничные условия задаются в более общем виде:

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = A,$$
$$\alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = B. \qquad (3.6)$$

В этом случае граничные условия также должны представляться в разностном виде путем аппроксимации производных $y'(0)$ и $y'(1)$ с помощью конечно-разностных соотношений. Если использовать односторонние разности (соответствующий шаблон показан на рис. 3.1 а), при которых производные аппроксимируются с первым порядком точности, то разностные граничные условия примут вид

$$\alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A,$$
$$\alpha_2 y_n + \beta_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \qquad (3.7)$$

Из этих соотношений легко находятся значения y_0 и y_n.

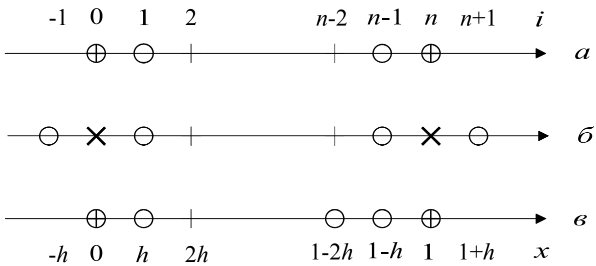

Рис. 3.1. Аппроксимация граничных условий

Однако, как правило, предпочтительнее аппроксимировать производные, входящие в (3.6), со вторым порядком точности с помощью центральных разностей

$$y'(0) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + O\left(h^2\right), \;\; y'(1) = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + O\left(h^2\right).$$

В данные выражения входят значения сеточной функции y_{-1} и y_{n+1} в так называемых фиктивных узлах $x = -h$ и $x = 1+h$, лежащих вне рассматриваемого отрезка (рис. 3.1 б). В этих узлах значения искомой функции также должны быть найдены. Следовательно, количество неизвестных значений сеточной функции увеличивается на два. Для замыкания системы привлекают еще два разностных уравнения (3.5) при $i = 0$ и $i = n$.

Аппроксимировать граничные условия со вторым порядком можно и иначе (рис. 3.1 в). В этом случае используются следующие аппроксимации:

$$y'(0) = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O\left(h^2\right),$$
$$y'(1) = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h} + O\left(h^2\right).$$

Таким образом, решение краевой задачи для дифференциального уравнения сведено к решению системы алгебраических уравнений вида (3.5). Эта система является линейной или нелинейной в зависимости от того, линейно или нелинейно, искомое дифференциальное уравнение.

Для нелинейной системы необходимо использовать специальные методы, в том числе итерационные.

Для решения линейной системы уравнений (3.5) используется метод прогонки.

Линейная система равнений (3.5) приводится к виду

$$\begin{cases} B_0 y_0 + C_0 y_1 = F_0, \\ A_i y_{i-1} + B_i y_i + C_i y_{i+1} = F_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ A_n \theta_{n-1} + B_n \theta_n = F_n. \end{cases} \tag{3.8}$$

Система уравнений (3.8) имеет ненулевые элементы матрицы коэффициентов только на трех диагоналях, так называемая трехдиагональная матрица.

$$\begin{vmatrix} B_0 & C_0 & & & & & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & & & & \\ & A_2 & B_2 & C_2 & & & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ & & & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} & \\ 0 & & & & & A_n & B_n \end{vmatrix}$$

Такую систему уравнений удобнее всего решать методом прогонки. Будем искать решение системы уравнений в виде:

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i . \tag{3.9}$$

Здесь α_k и β_k – неизвестные коэффициенты, обычно называемые в литературе «прогоночные коэффициенты» или «коэффициенты прогонки». Равенство (3.9) имеет место при всех i, поэтому можно записать

$$y_{i-1} = \alpha_{i-1} y_i + \beta_{i-1} . \tag{3.10}$$

Подставим (3.10) в (3.8), получим:

$$A_i \left(\alpha_{i-1} y_i + \beta_{i-1} \right) + B_i y_i + C_i y_{i+1} = F_i$$

И перепишем его в форме (3.9):

$$y_i = -\frac{C_i}{A_i \alpha_{i-1} + B_i} y_{i+1} + \frac{F_i - A_i \beta_{i-1}}{A_i \alpha_{i-1} + B_i} . \tag{3.11}$$

Сравнение (3.11) и (3.9) дает рекуррентные соотношения для определения прогоночных коэффициентов α_i и β_i:

$$\alpha_i = -\frac{C_i}{A_i \alpha_{i-1} + B_i}, \; \beta_i = \frac{F_i - A_i \beta_{i-1}}{A_i \alpha_{i-1} + B_i}, \; i = 1..n-1 . \tag{3.12}$$

Недостающие коэффициенты α_0 и β_0 определяются из первого граничного условия (3.8):

$$y_0 = -\frac{C_0}{B_0} y_1 + \frac{F_0}{B_0} = \alpha_0 y_1 + \beta_0 .$$

Откуда

$$\alpha_0 = -\frac{C_0}{B_0}, \ \beta_0 = \frac{F_0}{B_0}. \qquad (3.13)$$

Для точки $i = n$-1 справедливо уравнение

$$y_{n-1} = \alpha_{n-1} y_n + \beta_{n-1} . \qquad (3.14)$$

Привлекая второе граничное условие из (3.8)

$$A_n y_{n-1} + B_n y_n = F_n , \qquad (3.15)$$

решаем систему уравнений (3.14) (3.15) относительно y_n и находим

$$y_n = \frac{F_n - A_n \beta_{n-1}}{A_n \alpha_{n-1} + B_n} . \qquad (3.16)$$

Таким образом, схема решения системы уравнений (3.8) состоит в следующей последовательности действий:

1. По формулам (3.13) вычисляем α_0 и β_0.

2. По реккурентным формулам (3.12) вычисляем последовательно α_1, β_1, α_2, β_2, …, $\alpha_{n\text{-}1}$, $\beta_{n\text{-}1}$.

3. По формуле (3.16) определяем y_n.

4. По формуле (3.9) вычисляем $y_{n\text{-}1}$, $y_{n\text{-}2}$, …, y_0.

После выполнения действий 1 – 4 все значения y_i будут определены.

Пример программы для расчета краевой задачи методом конечных разностей приведен в Приложении.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Примеры программ для расчета краевой задачи $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y - \exp\left(4x\right) = 0, \ \ 0 < x < 1,$ с граничными условиями $\frac{dy\left(0\right)}{dx} - y\left(0\right) = 0.6, \ \ \frac{dy\left(1\right)}{dx} + y\left(1\right) = 4\exp(3) + \exp(4).$

Точное решение задачи имеет вид:

$y_{an}\left(x\right) = \exp\left(-x\right) + \exp(3x) + 0.2\exp(4x).$

1. Программы на языке PascalABS.net

<u>Метод конечных разностей</u>

```
const N=20; ax=0;  bx=1;
function y_an(x:real):real; begin y_an:=exp(-x)+exp(3*x)+0.2*exp(4*x); end;
function p(x:real):real; begin  p:=-2; end;
function q(x:real):real; begin  q:=-3; end;
function f1(x:real):real; begin f1:=exp(4*x); end;
var x,y,A,B,C,F,aa,bb:array [0..N] of real;  h,xx:real; i:integer;
begin
     h:=(bx-ax)/N;
     for i:=0 to N do x[i]:=ax+h*i;
     for i:=0 to N-1 do begin
          A[i]:=1/(h*h) - p(x[i])/(2*h);
          C[i]:=1/(h*h) + p(x[i])/(2*h);
          B[i]:=-2/(h*h)+q(x[i]);
          F[i]:=f1(x[i]);
     end;
     B[0]:=-h-1;  C[0]:=1;  F[0]:=0.6*h;
     B[N]:=1+h; A[N]:=-1;F[N]:=h*(4*exp(3)+exp(4));
     aa[0]:= -C[0]/B[0];                          bb[0]:= F[0]/B[0];
     for i:=1 to N do begin
          aa[i]:= -C[i]/(A[i]*aa[i-1] + B[i]);
          bb[i]:= (F[i] - A[i]*bb[i-1])/(A[i]*aa[i-1] + B[i]);
     end;
     y[n]:= (F[n] - bb[n-1]*A[n])/(B[n] + aa[n-1]*A[n]);
     for i:=n-1 downto 0 do  y[i]:= aa[i]*y[i+1] + bb[i];
     for i:=0 to N do writeln(x[i]:6:2,'   ',y[i]:10:6,y_an(x[i]):10:6);
     xx:=0;
     for i:=1 to N do xx:=xx+abs(y[i]-y_an(x[i]));
     writeln(xx/N);
      end.
```

Метод стрельбы

```
const N=20; ax=0;  bx=1;
function y_an(x:real):real; begin  y_an:=exp(-x)+exp(3*x)+0.2*exp(4*x); end;
function f(x,y,z:real):real; begin  f:=z; end;
function g(x,y,z:real):real; begin  g:=2*z+3*y+exp(4*x); end;
var  x,y,z:array [0..N] of real; h,xx,xx1,d:real; i:integer;
function shoot(ksi:real):real;
var y1,z1:real;i:integer;
begin
    y[0]:=ksi-0.6;z[0]:=ksi;
    for i:=0 to N-1 do begin
        y1:=y[i]+0.5*h*f(x[i],y[i],z[i]);   z1:=z[i]+0.5*h*g(x[i],y[i],z[i]);
        y[i+1]:=y[i]+h*f(x[i]+0.5*h,y1,z1); z[i+1]:=z[i]+h*g(x[i]+0.5*h,y1,z1);
    end;
    shoot:=z[n]+y[n]-(4*exp(3)+exp(4))
end;
begin
    h:=(bx-ax)/N;
    for i:=0 to N do x[i]:=ax+h*i;
    xx:=1;
    d:=1;
    while d>1e-3 do begin
        xx1:=xx-shoot(xx)*1e-4/(shoot(xx+1e-4)-shoot(xx));
        d:=abs(xx-xx1);
        xx:=xx1;
    end;
    writeln('  x[i]       y[i]        y_an(x[i])');
    for i:=0 to N do writeln(x[i]:6:2,'   ',y[i]:10:6,y_an(x[i]):13:6);
    xx:=0;
    for i:=1 to N do xx:=xx+abs(y[i]-y_an(x[i]));
    writeln(xx/N);
end.
```

2. Программы на языке Fortran.

Метод конечных разностей

```
program progonka
    implicit none
    integer, parameter:: N=20
    real, parameter:: aa=0
    real, parameter:: bb=1
    real y(N+1), x(N+1), y_an(N+1), alf(N+1), bet(N+1), A(N+1), B(N+1), C(N+1), F(N+1), h
    integer i
    h=(bb-aa)/N
    C(1)=1
    B(1)=-h-1
    F(1)=0.6*h
    A(N+1)=-1
```

```
        B(N+1)=1+h
        F(N+1)=(4*exp(3.0)+exp(4.0))*h
        alf(1)=-C(1)/B(1)
        bet(1)=F(1)/B(1)
        do i=1,N+1
                x(i)=(i-1)*h
        enddo
        do i=2,N
                A(i)=1/h/h+1/h
                B(i)=-2/h/h-3
                C(i)=1/h/h-1/h
                F(i)=exp(4*x(i))
                alf(i)=-C(i)/(A(i)*alf(i-1)+B(i))
                bet(i)=(F(i)-A(i)*bet(i-1))/(A(i)*alf(i-1)+B(i))
        enddo
        y(N+1)=(F(N+1)-bet(N)*A(N+1))/(B(N+1)+alf(N)*A(N+1))
        do i=N, 1, -1
                y(i)=alf(i)*y(i+1)+bet(i)
        enddo
        do i=1,N+1
                y_an(i)=exp(-x(i))+exp(3*x(i))+0.2*exp(4*x(i))
                write(*,*) x(i), y(i), y_an(i)
        enddo
end
```

Метод стрельбы

```
program strelba
        implicit none
        real, parameter:: aa=0
        real, parameter:: bb=1
        integer, parameter:: N=20
        real, parameter:: eps=1d-5
        real shoot,ksi, y(N+1), z(N+1), x(N+1), y_an(N+1),ksi_n,h
        integer i
        h=(bb-aa)/N
        do i=1,N+1
                x(i)=(i-1)*h
        enddo
        ksi_n=1
        ksi=10
        do while (abs(ksi-ksi_n)>=eps)
                ksi=ksi_n
                ksi_n=ksi-shoot(ksi)*eps/(shoot(ksi+eps)-shoot(ksi))
        end do
        y(1)=ksi-0.6
        z(1)=ksi
        do i=1,N
                y(i+1)=y(i)+h*z(i)
```

```
            z(i+1)=z(i)+h*(2*z(i)+3*y(i)+exp(4*x(i)))
        enddo
        do i=1,N+1
            y_an(i)=exp(-x(i))+exp(3*x(i))+0.2*exp(4*x(i))
            write(*,*) x(i), y(i), y_an(i)
        enddo
        write(*,*) 'ksi=',ksi
    end
    real function shoot(ksi)
    integer, parameter:: N=20
    real, parameter:: aa=0
    real, parameter:: bb=1
    real ksi, y(N+1), z(N+1), x(N+1),h
    integer i
    h=(bb-aa)/N
    do i=1,N+1
        x(i)=(i-1)*h
    enddo
    y(1)=ksi-0.6
    z(1)=ksi
    do i=1,N
        y(i+1)=y(i)+h*z(i)
        z(i+1)=z(i)+h*(2*z(i)+3*y(i)+exp(4*x(i)))
    enddo
    shoot=z(N+1)+y(N+1)-(4*exp(3.0)+exp(4.0))
    end function
```

Результаты расчета

x_i	$y_{ан}(x_i)$	y_i (*метод прогонки*)	y_i (*метод стрельбы*)
0.00	2.20	2.61	2.24
0.05	2.36	2.77	2.40
0.10	2.55	2.97	2.59
0.15	2.79	3.22	2.83
0.20	3.09	3.53	3.13
0.25	3.44	3.90	3.48
0.30	3.86	4.35	3.91
0.35	4.37	4.90	4.42
0.40	4.98	5.54	5.03
0.45	5.70	6.32	5.76
0.50	6.57	7.24	6.62
0.55	7.59	8.33	7.65
0.60	8.80	9.63	8.86
0.65	10.24	11.17	10.31
0.70	11.95	13.00	12.01
0.75	13.98	15.16	14.04
0.80	16.38	17.72	16.44

0.85	19.23	20.76	19.28
0.90	22.61	24.36	22.65
0.95	26.61	28.63	26.64
1.00	31.37	33.70	31.38

Контрольные вопросы

1. Разностная схема метода Эйлера, определение погрешности этого метода. Каков порядок точности метода Эйлера.
2. Алгоритм метода Рунге-Кутта.
3. Перечислите частные случаи граничных условий.
4. Итерационная формула метода Ньютона
5. В чем состоит сущность метода суперпозиции. Реализация этого метода (пошагово).
6. Суть метода прогонки
7. Суть метода конечных разностей. Порядок точности этого метода.
8. Разностная схема метода квазилинеаризации.
9. Чем объясняется лучшая сходимость метода Ньютона для решения нелинейных краевых задач по сравнению с методом квазилинеаризации. Итерационная формула метода Ньютона.

Индивидуальные задания

I. Решить краевую задачу двумя методами (метод стрельбы, метод хорд)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\left(x\right)\frac{dy}{dx} + q\left(x\right)y + f\left(x\right) = 0 \ , \ 0 \le x \le 1 \ ,$$

$$-A\,\frac{dy\left(0\right)}{dx} + By\left(x\right) = C \ , \ D\,\frac{dy\left(1\right)}{dx} + Ey\left(1\right) = F \ .$$

№	$p\ (x)$	$q\ (x)$	$f\ (x)$	A	B	C	D	E	F
1.	x	1	1	0	1	2	0	1	2
2.	x^2	2	x	1	0	1	1	0	1
3.	$\sin(x)$	x^2	x^2	0	1	2	0	1	2
4.	$sh(x)$	x	x	1	0	1	1	0	1
5.	$\sqrt{x}$	x^2	x	0	1	2	0	1	2
6.	$\cos(x)$	1	2	1	0	1	1	0	1

7.	$ch(x)$	2	1	0	1	2	0	1	2
8.	$\sqrt{x}$	2	x	1	0	1	1	0	1
9.	$sh(x)$	5	0	0	1	2	0	1	2
10.	x	x	x-3	1	0	1	1	0	1
11.	$x+1$	x-1	x - x^2	0	1	2	0	1	2
12.	$\cos(x)+x^2$	x^2	x	1	0	1	1	0	1
13.	$sh(x)$	x	1	0	1	2	0	1	2
14.	$\sqrt{x}$	x	2	1	0	1	1	0	1
15.	$\cos(x)$	2	x^2	0	1	2	0	1	2
16.	$ch(x)$	1	x	1	0	1	1	0	1
17.	$\sqrt{x}$	x	x^2	0	1	2	0	1	2
18.	$sh(x)$	0	1	1	0	1	1	0	1
19.	x	x-3	2	0	1	2	0	1	2
20.	x^2	x - x^2	2	1	0	1	1	0	1
21.	$\sin(x)$	x	5	1	0	1	1	0	1

II. Разработать решение задачи

1. Разработайте решение краевой задачи

$$\frac{d^2y}{dx^2}-xy=e^x,\ 0<x<1,\ \frac{dy(0)}{dx}=1,\ y(1)=2$$

методом хорд (линейной интерполяцией).

2. Разработайте решение краевой задачи методом суперпозиции.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-x^2y=x+1,\ 0<x<1,\ \frac{dy(0)}{dx}=0,\ \frac{dy(1)}{dx}+2y(1)=3.$$

3. Запишите разностную схему (с порядком аппроксимации $\sim h^2$) решения краевой задачи

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}-e^xy=0,\ 0<x<1,\ \frac{dy(0)}{dx}=0,\ y(1)=4.$$

4. Запишите разностную схему (с порядком аппроксимации $\sim h^2$) решения краевой задачи

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-x^2y=0,\ 0<x<1,\ y(0)=1,\ \frac{dy(1)}{dx}=0.$$

5. Опишите решение задачи о брахистохроне методом Ньютона. (Как можно обойтись без итераций?)

$$2u\frac{d^2u}{dx^2}+1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2=0,\ 0<x<l,\ \frac{du(0)}{dx}=0,\ u(l)=A$$

6. Опишите решение задачи о тепловом взрыве методом Ньютона. (Как можно обойтись без итераций?)

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}+\delta e^u=0,\ 0<x<1,\ \frac{du(0)}{dx}=0,\ u(1)=0$$

7. Опишите решение задачи о продольном ударе по вязкопластичному стержню методом Ньютона. (Как можно обойтись без итераций?)

$$\frac{d^2f}{dz^2}-az\left(\frac{df}{dz}\right)^b=0,\ 0<z<\infty,\ f(0)=0,\ f(\infty)=1$$

8. Опишите решение задачи о химическом реакторе

$$\frac{1}{p}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}-Ru^n=0,\ 0<x<1,\ \frac{du(0)}{dx}=0,\ \frac{1}{p}\frac{du(1)}{dx}+u(1)=1,$$

$$(p=1,\ n=2,\ R=5).$$

9. Опишите решение задачи для нелинейного уравнения диффузии

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{du}{dx}-\frac{au}{1+bu}=0,\ 0<x<1,\ \frac{du(0)}{dx}=0,\ \frac{du(1)}{dx}+c\big(u(1)-1\big)=0,$$

$$(a>0,\ b>0,\ c>0).$$

10. Запишите алгоритм решения краевой задачи о прогибе круговой мембраны

$$,\ 0<z<1,\ f(0)=0,\ \frac{df(1)}{dz}-\alpha f(1)=0,$$

$$(A=0{,}5,\ \alpha=2).$$

11. Запишите алгоритм решения краевой задачи об изгибе консольной балки

$$\frac{d^2f}{dz^2}+a\cos(f)=0,\ 0<z<1,\ f(0)=0,\ \frac{df(1)}{dz}=0,\ (a=3).$$

<u>III. Воспользовавшись данными из таблицы решить краевую задачу двумя методами</u>

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\rho(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y+f(x)=0,\quad 0<x<l.$$

$$-\alpha_1 \frac{dy(0)}{dx} + \beta_1 y(0) = \gamma_1,$$

$$\alpha_2 \frac{dy(l)}{dx} + \beta_2 y(l) = \gamma_2.$$

	α_1	α_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$
1	1	0	1	0	2	5	x^2+x	$x\sin(x)-\cos(x)$	x^2+x
2	0	1	0	1	3	6	$\sqrt{x^2+x}$	$\sin^2(x)+\cos(x)$	x^3-x^2+x
3	1	0	1	0	4	7	$x-x^2$	$\sqrt[3]{\sin^2(x)+\cos(x)}$	$x^3-x^2+\sqrt{x}$
4	0	1	0	1	5	8	$\sqrt{x-x^2}$	x^2+x	$x^3-\sqrt{x^2+x}$
5	1	0	1	0	6	9	$x\sin(x)+x^2$	$\sqrt{x^2+x}$	$\sqrt{x^3-x^2}+x$
6	0	1	0	1	7	1	$\sqrt{x\sin(x)+x^2}$	$x-x^2$	$\sqrt{x^3-x^2+x}$
7	1	0	1	0	8	2	$x\sin(x)+\cos(x)$	$\sqrt{x-x^2}$	$\left(x^3-x^2\right)\sin(x)$
8	0	1	0	1	9	3	$\sin(x)+\cos(x)$	$x\sin(x)+x^2$	$\left(x^3-x^2\right)\cos(x)$
9	1	0	1	0	1	4	$x^2\sin(x)+\cos(x)$	$\sqrt{x\sin(x)+x^2}$	$\sqrt[3]{\sqrt{x^3-x^2}+x}$
10	0	1	0	1	2	5	$x\sin(x)-\cos(x)$	$x\sin(x)+\cos(x)$	x^2+x
11	1	0	1	0	3	6	$\sin^2(x)+\cos(x)$	x^2+x	x^3-x^2+x
12	0	1	0	1	4	7	$\sqrt[3]{\sin^2(x)+\cos(x)}$	$\sqrt{x^2+x}$	$x^3-x^2+\sqrt{x}$
13	1	0	1	0	5	8	x^2+x	$x-x^2$	$x^3-\sqrt{x^2+x}$
14	0	1	0	1	6	9	$\sqrt{x^2+x}$	$\sqrt{x-x^2}$	$\sqrt{x^3-x^2}+x$
15	1	0	1	0	7	1	$x-x^2$	$x\sin(x)+x^2$	$\sqrt{x^3-x^2+x}$
16	0	1	0	1	8	2	$\sqrt{x-x^2}$	$\sqrt{x\sin(x)+x^2}$	$\left(x^3-x^2\right)\sin(x)$
17	1	0	1	0	9	3	$x\sin(x)+x^2$	$x\sin(x)+\cos(x)$	$\left(x^3-x^2\right)\cos(x)$
18	0	1	0	1	1	4	$\sqrt{x\sin(x)+x^2}$	$\sin(x)+\cos(x)$	$\sqrt[3]{\sqrt{x^3-x^2}+x}$
19	1	0	1	0	2	5	$x\sin(x)+\cos(x)$	$x^2\sin(x)+\cos(x)$	$x^3-x^2+\sqrt{x}$
20	0	1	0	1	3	6	$\sin(x)+\cos(x)$	$x\sin(x)-\cos(x)$	$x^3-\sqrt{x^2+x}$
21	1	0	1	0	4	7	$x^2\sin(x)+\cos(x)$	$\sin^2(x)+\cos(x)$	$\sqrt{x^3-x^2}+x$

Основная литература

1 *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения М. Наука, 1974. 331 с.

2 *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных задач. М. Мир, 1982. 296 с.

3 *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- массообмена. - М.: Наука. 1984. - 288 с.

4 *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. М.: Энергия. 1975. 488 с.

5 *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.

Дополнительная литература

1 *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 536 с.

2 *Боглаев Ю.П.* Вычислительная математика и программирование. – М.: Высшая школа, 1990. – 534 с.

3 *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. – 336 с.

4 *Арушунян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение ОДУ на Фортране. Изд-во МГУ. 1990.

5 *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение ОДУ. Нежесткие задачи. Изд-во Мир. 1990.

Учебное издание

Алексей Юрьевич Крайнов
Ксения Михайловна Моисеева

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Опубликовано в авторской редакции

Издательство "STT"
Россия, 634028, г. Томск, проспект Ленина, $15^{Б}$–1
Тел.: (3822) 421-455
E-mail: stt@sttonline.com

Усл. печ. л. 2,31. Уч.-изд. л. 1,08.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Подписано к печати 30.05.2016 г. Формат 60x84/$_{16}$
Тираж 100 экз. Заказ № 560.