НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОЙТЕЙ И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебно-методическое пособие
по курсу «Теория вероятностей и основы математической статистики»
для студентов физико-технического факультета
направлений подготовки 161700 – Баллистика и гидраэродинамика,
223200 –Техническая физика, 151600 – Прикладная механика, 221000 –
Мехатроника и робототехника

Томск
2014

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией физико-технического факультета

Протокол №3 от «27» ноября 2014 г.

Председатель МК ФТФ В.А. Скрипняк

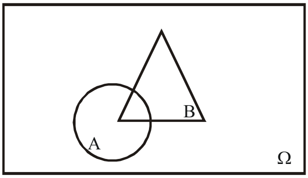
Пособие составлено в соответствии с программой курса «Теория вероятностей и основы математической статистики» для студентов физико-технического факультета направлений подготовки 161700 – Баллистика и гидраэродинамика, 223200 –Техническая физика, 151600 – Прикладная механика, 221000 – Мехатроника и робототехника. Рассмотрены вопросы, связанные с базовыми понятиями дисциплин теория вероятностей и математическая статистика. Пособие содержит теоретический материал, методические указания, примеры решение основных типов задач, задачи для аудиторной и самостоятельной работы студентов.

СОСТАВИТЕЛИ: Е.И. Борзенко, И.В. Еремин.

Содержание

1. Случайные события

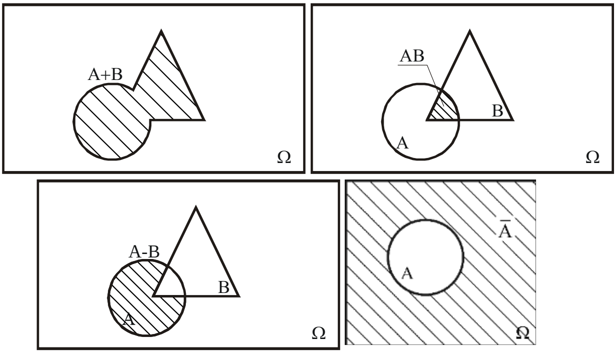
§ 1. Первоначальные понятия теории вероятностей



Под *элементарным событием* будем понимать появление или непоявление того или иного исхода испытания (выпадение «решки» при подбрасывании монеты, получение оценки «отлично» на экзамене).

Множество **Ω**, каждому элементу которого соответствует один исход испытания, называют *пространством элементарных событий (ПЭС)*. Подмножество пространства элементарных событий называют *случайным событием* (выпадение четного числа на верхней грани игрального кубика, попадание в мишень).

Случайное событие называется *достоверным* V, если оно заведомо произойдет в результате данного испытания и *невозможным* U, если оно заведомо не может произойти. Два случайных события называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно при одном и том же исходе испытания.



Суммой событий A и B есть событие $C=A+B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B. *Произведение* событий A и B есть событие $C=AB$, состоящее в наступлении обоих событий A и B одновременно. *Разность* событий A и B есть событие $C=A\text{-}B$, состоящее в том, что A происходит и B не происходит. *Противоположенным* событию A называют событие $\bar{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие А.

Говорят, что события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны $\left(H_i H_j = \varnothing, i \neq j\right)$ и их объединение эквивалентно достоверному событию $\left(H_1 + H_2 + ... + H_n = \Omega\right)$.

Пример 1. Упростить выражения $A = (B+C)(B+\bar{C})(\bar{B}+C)$.

Решение. Вначале перемножим вторую и третью скобку и воспользуемся некоторыми элементарными свойствами.

$$A = (B+C)(B\bar{B} + \bar{C}\bar{B} + BC + \bar{C}C) = (B+C)(\varnothing + \bar{C}\bar{B} + BC + \varnothing) =$$
$$= (B+C)(\bar{C}\bar{B} + BC)$$

Теперь проведем аналогичные действия с оставшимися скобками.

$$A == B\bar{C}\bar{B} + C\bar{C}\bar{B} + BBC + CBC = \varnothing + \varnothing + BC + BC = BC$$

Пример 2. Доказать, что $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$ (соотношение де-Моргана).

Решение. События $\bar{A}$ и $\bar{B}$ означают непоявление событий *A* и *B* соответственно, а их произведение – непоявление их одновременно. Сумма событий *A*+*B* есть событие, состоящие в наступление хотя бы одного из них. Противоположенное событие $\overline{A+B}$ означает непоявление обоих одновременно.

1.1. На десяти жетонах выбиты числа 1, 2, 3, …, 10. Наудачу извлекается один жетон. В каких вариантах указаны все возможные исходы испытания:

а) {четное, нечетное};

б) {простое, 4, 6, 8, 9, 10};

в) {четное, 1, 3, 5};

г) {не более трех, не менее четырех}?

1.2. Какие из следующих пар событий являются несовместными:

а) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 100 включительно: делится на 10, делится на 11;

б) нарушение в работе первого двигателя, нарушение в работе второго двигателя летящего самолета;

в) попадание, промах при одном выстреле;

г) выигрыш, проигрыш в шахматной партии;

д) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 25 включительно является: четным, кратным трем?

1.3. В каких из следующих примеров события образуют ПЭС:

а) выигрыш, проигрыш в шахматной партии;

б) выпадение (в указанном порядке) герба-герба, герба-решки, решки-решки при двукратном подбрасывании монеты;

в) попадание, промах при одном выстреле;

г) появления 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при однократном бросании кости?

1.4. Укажите ПЭС для следующих испытаний:

а) производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов;

б) проводиться турнирный футбольный матч между двумя командами;

в) наудачу извлекается одна кость из полного набора домино.

1.5. Сколько элементарных исходов содержит каждое из следующих случайных событий:

а) сумма двух наудачу выбранных однозначных чисел равна 12;

б) наудачу выбрана кость из полного набора домино – «дубль»;

в) число очков, выпавшее на верхней грани игрального кубика, нечетное;

г) наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует тридцатому числу;

д) наудачу выбранное слово из множества A={тор, куб, квадрат, гипотенуза, событие, перпендикуляр, ромб} содержит не менее двух гласных.

1.6. Укажите какие из следующих событий являются случайными, достоверными, невозможными:

а) выигрыш по одному из билетов лотереи;

б) извлечение из урны цветного шара, если в ней находиться 3 синих и 5 красных шаров;

в) получение абитуриентом 25 баллов на вступительных экзаменах в университет при сдаче четырех экзаменов, если применяется пятибальная шкала оценок;

г) извлечение «дубля» из полного набора домино;

д) выпадение не более 6 очков на верхней грани игрального кубика.

1.7. Что означает событие $A+A$ и AA?

1.8. Когда возможно $AB=A$, $AB=B$?

1.9. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями радиуса r_k (k=1, 2, … , 10), причем $r_1<r_2<\ldots<r_{10}$. Событие A_k – попадание в круг радиуса r_k. Что означают события

$$B=\sum_{k=1}^{6} A_k,\ C=\prod_{k=5}^{10} A_k\ ?$$

1.10. События A,B и C означают, что взято хотя бы по одной книге из трех различных собраний сочинений, каждое из которых содержит, по крайней мере, три тома. События A_s и B_k означают соответственно, что из первого собрания сочинений взято s, а из второго k томов. Что означают события а) $A+B+C$; б) ABC; в) A_1+B_2; г) $A_3 B_1+A_1B_3$.

1.11. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие A – выбранное число делится на 5, событие B – данное число оканчивается нулем. Что означают события A-B и AB.

1.12. Событие A – хотя бы одно из имеющихся четырех изделий бракованное, событие B – бракованных изделий среди них не менее двух. Что означают противоположенные события $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

1.13. Найти случайное событие X из равенства $\overline{X+A}+\overline{X+\bar{A}}=B$.

1.14. Доказать, что $A\bar{B}+\bar{A}B+\bar{A}\bar{B}=\overline{AB}$. Доказательство провести графически и аналитически.

1.15. Совместны ли события A и $\overline{A+B}$.

1.16. Доказать, что события A, $\bar{A}B$, $\overline{A+B}$ образуют полную группу. Доказательство провести графически и аналитически.

1.17. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. События: A_k (k=1, 2) – исправен k-й блок первого типа, B_j (j=1, 2, 3) – исправен j-й блок второго типа. Прибор исправен, если исправен хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа. Выразить событие C, означающего исправность прибора, через A_k и B_j.

1.18. Из 25 студентов группы 20 человек увлекается спортом (событие A), 9 музыкой (событие B), 6 – музыкой и спортом. Построить диаграмму Эйлера-Венна, показать и объяснить, что означают события $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ и $\overline{A+B}$.

1.19. Среди студентов, сдавших экзамен по теории вероятностей выбирают одного наудачу. Пусть следующие события означают, что выбранный студент: A – старше 20 лет, событие B – получил «отлично» на экзамене, C – живет в общежитии.

а) Опишите событие $\bar{A}BC$.

б) При каких условиях имеет место равенство ABC=A.

в) Будет ли иметь место событие $\bar{A}B$, если девятнадцатилетний Саша Петров получил на экзамене оценку «отлично».

§ 2. Элементы комбинаторики

Согласно классическому определению подсчет вероятности события A сводиться к подсчету числа благоприятных ему исходов. Делают это обычно комбинаторными методами, которые основаны на двух правилах.

Правило умножения: если из некоторого конечного множество первый объект x можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект y можно выбрать n_2 способами, то оба объекта x и y в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами. Этот принцип, очевидно, распространяется на случай трех и более объектов.

Пример 1. Турист планирует поездку из Чикаго в Саутгемптон через Нью-Йорк и обратно тем же маршрутом. При этом он решает воспользоваться услугами одной из шести авиалиний между Нью-Йорком и Чикаго и одной из четырех морских линий между Нью-Йорком и Саутгемптоном. Сколькими способами он может совершить эту поездку при условии, что не воспользуется никакой линией дважды?

Решение. Поездку из Чикаго в Нью-Йорк можно совершить шестью разными способами, после чего поездку в Саутгемптон можно совершить четырьмя способами. Затем обратную поездку из Саутгемптона в Нью-Йорк можно совершить тремя способами и из Нью-Йорка в Чикаго – пятью. Используя принцип умножения, получаем, что общее количество способов совершить всю поездку равно n=6×4×3×5=360.

Правило суммы: если некоторый объект x можно выбрать n_1 способами, а объект y можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов x или y можно выбрать n_1+n_2 способами.

Пример 2. В лаборатории работают три аналитика, десять программистов и 20 инженеров. Для сверхурочной работы в праздничный день заведующий должен выделить одного сотрудника. Сколько способов существует у начальника управления?

Решение. Заведующий лабораторией может отобрать одного аналитика $n_1 = 3$ способами, одного программиста – $n_2 = 10$ способами, а одного инженера – $n_3 = 20$ способами. Поскольку по условию задачи можно выделить любого сотрудника, согласно правилу суммы существует $n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 10 + 20 = 33$ различных способа выбрать сотрудника для сверхурочной работы.

Схема выбора без возвращений.

Размещением из n элементов по m элементов (A_n^m) называется любое упорядоченное подмножество данного множеств, содержащие m элементов. То есть размещения – это выборки, отличающиеся друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Перестановкой из n элементов (P_n) называются размещения из n элементов по n элементов. Перестановки – это выборки, отличающиеся только порядком следования элементов.

$$P_n = n!$$

Последовательность длины n, составленная из k разных элементов, первый из которых повторяется n_1 раз, второй - n_2 раз, …, k-й - n_k раз (где $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$) называется *перестановкой с повторениями* из n элементов.

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Сочетанием из n элементов по m элементов (C_n^m) называется любое подмножество, которое содержит m элементов данного множества. То есть сочетания – это выборки, отличающиеся друг от друга только составом элементов.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Ниже приведены формулы вычисления числа *размещений* и *сочетаний* для схемы выбора с возвращением:

$$\bar{A}_n^m = n^m,\ \bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Указания. Решение задач на вычисления числа комбинаций рекомендуется проводить по следующей схеме:

1. Выяснить, упорядочены ли выборки (если да, то используем размещения или перестановки, иначе – сочетания).

2. Определить выборка с возвращением элементов или нет.

3. Подсчитать число элементов n основного множества.

4. Подсчитать число элементов m, входящих в выборку.

Пример 1. Составить различные размещения по 2 из элементов множества $D = \{a, b, c\}$; подсчитать их число.

Решение. Из трех элементов можно образовать следующие размещения по два элемента: $(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$. С другой стороны согласно формуле $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Пример 2. Составить различные сочетания по 2 из элементов множества $D = \{a, b, c\}$; подсчитать их число.

Решение. Из трех элементов можно образовать следующие сочетания по два элемента: $(a, b), (a, c), (b, c)$. С другой стороны согласно формуле $C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$.

Пример 3. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никому из них не будет поставлена неудовлетворительная оценка.

Решение. Общее число проставляемых оценок равно четырем (n=4). Каждый из студентов может получить любую из оценок: «отлично», «хорошо», удовлетворительно». Значит, рассматриваемое подмножество состоит из трех различных элементов (m=3). При этом порядок расстановки отметок существенен и оценки могут повторятся. Следовательно, необходимо составить размещения с повторениями из трех элементов по четырем $\overline{A}_3^4 = 3^4$.

2.1. Сколько различных «слов», состоящих из трех букв, можно образовать из букв слова БУРАН? А если «слова» содержат не менее трех букв.

2.2. Группа студентов изучает 10 различных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписания занятий в понедельник, если в этот день должно быть 4 разных занятия.

2.3. Из 10 мальчиков и 10 девочек спортивного класса для участия в эстафете надо составить три команды, каждая из которых состоит из мальчика и девочки. Сколькими способами это можно сделать.

2.4. Сколько можно составить четырехзначных чисел так, чтобы любые две соседние цифры были различны?

2.5. Сколькими способами можно разложить в два кармана 9 монет различного достоинства?

2.6. У одного школьника 7 различных книг для обмена, а у другого – 16. Сколькими способами они могут осуществить обмен: книгу на книгу? Две книги на две книги?

2.7. В урне 12 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 5 шаров, чтобы среди них было: а) 5 черных; б) 3 белых и два черных?

2.8. Сколькими способами можно распределить 15 выпускников по трем районам, если в одном из них имеется 8, в другом - 5 и в третьем - 2 вакантных места.

2.9. Сколькими способами можно составить набор из 6 пирожных, если имеется 4 различных сорта.

2.10. Сколькими способами можно выбрать из слова ЛОГАРИФМ две согласных и одну гласную буквы?

2.11. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове: а) ГОРА, б) ИНСТИТУТ.

2.12. Правильная игральная кость при бросании с равными шансами падает на любую из граней 1, 2, 3, 4, 5 или 6. В случае бросания двух костей сумма выпавших чисел заключается между 2 и 12. Как 9, так и 10 из чисел 1, 2, …, 6 можно получить двумя разными способами: 9=3+6=4+5 и 10=4+6=5+5. В задаче с тремя костями и 9, и 10 получаются шестью способами. Почему тогда 9 появляется чаще, когда бросают две кости, а 10, когда бросают три.

2.13. Сколько можно составить двузначных или трехзначных чисел из нечетных чисел при условии, что ни одна цифра не повторяется.

2.14. В проектном отделе завода работают восемь человек. Сколько существует способов распределить между ними три премии: а) одинакового размера; б) разных размеров, известных заранее?

2.15. В Петиной библиотеке есть 5 романов, 8 детективов и 4 сборников стихов, у Маши — 8, 2 и 9 соответственно. Сколькими способами Петя и Маша могут обменяться тремя романами, двумя детективами и одном сборником стихов?

2.16. Группу из 20 рабочих нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

2.17. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

2.18. Каких чисел от 1 до 1 000 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?

§ 3. Непосредственный подсчет вероятности. Геометрические вероятности

Пусть проводиться опыт с n исходами, которые можно представить в виде полной группы несовместных равновозможных событий. Такие исходы называются случаями, шансами, элементарными событиями, опыт – классическим. Случай ω, который приводит к наступлению события A, называется благоприятным ему.

Вероятностью события A называется отношения m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n случаев, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Наряду с обозначением $P(A)$ для вероятности события A используется обозначение p, т.е. $p = P(A)$. Из такого определения вероятности вытекают следующие свойства:

1. Вероятность любого события заключается между нулем и единицей ($0 \leq P(A) \leq 1$).
2. Вероятность невозможного события равна нулю ($P(V) = 0$).
3. Вероятность достоверного события равна единицы ($P(U) = 1$).
4. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий ($P(A + B) = P(A) + P(B)$, если $AB = V$).

Геометрическое определение вероятности может быть использовано в том случае, когда вероятность попадания случайной точки в любую часть области пропорциональна мере этой части области (длине, площади, объему и т.д.) и не зависит от ее расположения и формы.

Если геометрическая мера всей области равна S, а мера части области, попадание в которую благоприятствует данному событию, есть S_1, то вероятность события равна p=S/S_1.

Используемое при формулировке ряда задач требование равновозможности попадание точки в любую часть области (линейной, двумерной и т.д.) понимается в смысле применимости понятия геометрической вероятности.

Указания. Анализ и решение задач, в которых вероятность рассматриваемого события вычисляется по классической формуле, могут быть выполнены по следующей схеме:

1. Уясните, в чем состоит испытание, рассматриваемое в задаче.

2. Уясните, являются ли исходы испытаний несовместными и равновероятными.

3. Подсчитайте число всех возможных исходов испытания (n).
4. Подсчитайте, число всех исходов испытания, благоприятствующих рассматриваемому событию (m).

Пример 1. В урне находиться 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в извлечении белого шара. Ясно, что $n = 12 + 8 = 20$ – число всех равновозможных случаев (исходов опыта). Число случаев, благоприятствующих событию A, равно 12. Следовательно, по формуле имеем

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{20} = 0.6.$$

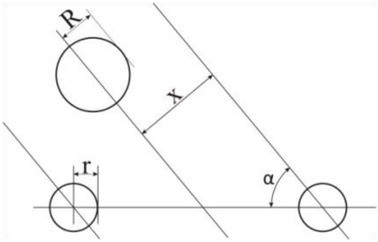
Пример 2. Группа туристов из 15 юношей и пяти девушек выбирают по жребию хозяйственную команду. Какова вероятность того, что в составе этой команды окажутся два юноши и две девушки.

Решение. Испытание состоит в том, что из 20 человек выбирают четверых. Так как выбор осуществляется по жребию, то все исходы испытания равновероятны и, кроме того, они не совместны. Число исходов испытания $n = C_{20}^4$, так как выборка состоит из 4 человек и порядок их расположения не учитывается. Событие A состоит в том, что в составе выбранных окажутся два юноши и две девушки. Двух юношей из 15 можно выбрать C_{15}^2 способами и после каждого такого выбора двух девушек из 5 можно выбрать C_5^2 способами. По правилу произведения событию A благоприятствует $m = C_{15}^2 C_5^2$ исходов испытания. Искомая вероятность вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{C_{15}^2 C_5^2}{C_{20}^4} = \frac{70}{323}.$$

Пример 3. На горизонтальной плоскости вдоль прямой AB через интервал l расположены оси одинаковых вертикальных цилиндров с радиусом основания r. Под углом α к прямой бросается шар радиуса R, при чем $R + r \le 0,5 l \sin\alpha$. Определить вероятность столкновения шара с цилиндром, если пересечение линии движения центра шара с прямой AB равновозможно в любой точке.

Решение. Пусть x – расстояние от центра шара до ближайшей линии, проходящей через центр цилиндра параллельно направлению перемещения центра шара.



Возможные значения x определяются условием $0 \le x \le 0,5l\sin\alpha$. Столкновение возможно в том случае если $0 \le x \le R+r$. Таким образом, искомая вероятность равна отношению длин отрезков на которых находятся благоприятствующие и всевозможные значения x. Поэтому

$$p = \frac{R+r}{0.5l\sin\alpha}.$$

3.1. Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую, также взятую наудачу кость, можно приставить к первой.

3.2. Даны числа от 1 до 30 включительно. Какова вероятность того, что наудачу выбранное цело число является делителем числа 30?

3.3. Цифровой замок содержит на общей оси пять дисков, каждый из которых разделен на шесть секторов с различными нанесенными на них цифрами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Определить вероятность открывания замка, если установлена произвольная комбинация цифр.

3.4. В лифт 9-этажного дома вошли 4 человека. Каждый из них независимо друг от друга может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Какова вероятность того, что все вышли: а) на разных этажах; б) на одном этаже; в) на 5 этаже?

3.5. В барабане револьвера 7 гнезд, из них в 5 заложены патроны. Барабан приводится во вращение, потом нажимается спусковой крючок. Какова вероятность того, что, повторив такой опыт два раза подряд, револьвер: а) оба раза не выстрелит; б) оба раза выстрелит; в) выстрелит хотя бы один раз?

3.6. Семь человек рассаживают на удачу на скамейке. Какова вероятность того, что два определенных человека будут сидеть рядом?

3.7. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7 ,8, 11, 12 и 13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

3.8. На десяти одинаковых карточках написаны различные числа от нуля до девяти. Определить вероятность того, что наудачу образованная с помощью данных карточек а) двухзначное число делиться на 18; б) трехзначное число делится на 36?

3.9. Из 10 билетов лотереи выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу 5 билетов: а) один выигрышный; б) оба выигрышных; в) хотя бы один выигрышный?

3.10. Имеются пять билетов стоимостью по одному рублю, три билета по три рубля и два билета по пять рублей. Наугад берется три билета. Определить вероятность того, что: а) хотя бы два из этих билета имеют одинаковую стоимость; б) все три билета стоят семь рублей.

3.11. В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 22 из Великобритании, 19 из Франции, остальные — из Германии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Германии.

3.12. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 3 спортсмена из Чехии, 4 спортсмена из Словакии, 4 спортсмена из Австрии и 9 — из Швейцарии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Австрии.

3.13. На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

3.14. В партии из 10 деталей 7 первого сорта, 2 второго и одна бракованная. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки 3 деталей: а) все первосортные; б) хотя бы одна второго сорта.

3.15. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 13 очков.

3.16. Во время грозы на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошёл обрыв провода. Считая, что обрыв одинаково возможен в любой точке, найти вероятность того, что обрыв расположен между 40-м и 45-м километрами.

3.17. В круге радиуса R проводятся хорды параллельно заданному направлению. Какова вероятность того, что длина наугад взятой хорды не более R, если равновозможны любые положения точек пересечения хорды с диаметром, перпендикулярным выбранному направлению?

3.18. Перед вращающемся с постоянной скоростью диском находиться отрезок длиной $2h$, расположенный в плоскости диска таким образом, что прямая, соединяющая середину отрезка с центром диска, перпендикулярна отрезку. По касательной к окружности в произвольный момент времени слетает частица. Определить вероятность попадания этой частицы на отрезок, если расстояние между отрезком и центром диска равно l.

3.19. Прямоугольная решетка состоит из цилиндрических прутьев радиуса r. Расстояние между осями прутьев равны соответственно a и b. Определить вероятность попадания шариком диаметра d в решетку при одном бросании без прицеливания, если траектория полета шарика перпендикулярна плоскости решетки.

3.20. Начерчены пять концентрических окружностей, радиусы которых равны соответственно kr (k=1, 2, 3, 4, 5). Круг радиуса r и два кольца с внешними радиусами $3r$ и $5r$ заштрихованы. В круг радиуса $5r$ наугад выбрана точка. Определить вероятность попадания этой тоски: а) в круг радиуса $2r$; б) в заштрихованную область.

3.21. Чтобы добраться в институт, Петя может воспользоваться автобусом одного из двух маршрутов. Автобусы первого маршрута следуют с интервалом в 18 мин, второго маршрута — с интервалом в 15 мин. Найти вероятность того, что Петя будет ждать автобуса не более 10 мин (задачу решить геометрически).

3.22. Задача Бюффона. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2l$ ($l < a$). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

3.23. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное y/x не больше двух.

§ 4. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Условной вероятностью $P(A|B)$ события A называется вероятность появления этого события, вычисленная в предположении, что имело место событие B. Два события называются *независимыми*, если появление одного из них не влияет на появление другого, т.е. $P(A|B) = P(A)$.

Следует обратить внимание на следующие факты, что из условия несовместности не следует условие независимости и наоборот.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

В частности, для независимых событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

т.е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятности этих событий.

Последнее равенство часто называют теоремой или правилом умножения вероятностей. Обобщим это правило на n событий

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)\ P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}).$$

Указания.

1. Уяснить в чем состоит рассматриваемое в задаче испытание, обращая внимание на ключевые слова и союзы.

2. Обозначить буквами события, рассматриваемые в условии задачи.

3. Записать через введенные обозначения событие, вероятность которого надо вычислить.

4. Выяснить зависим или независимы рассматриваемые события.

Пример1. В урне находится 2 белых и 7 черных шаров. Из нее последовательно вынимается два шара. Какова вероятность того, что второй шар белый, при условии что первый был черным.

Решение. Событие A – первый шар черны; B – второй шар белый. Так как событие A произошло, то в урне осталось 8 шаров, из которых 2 белых. Поэтому $P(A|B) = 2/8 = 0.25$.

Пример 2. В коробке находится 4 белых, 3 синих и 2 черных шара. Наудачу последовательно вынимается три шара. Какова вероятность того, что первый будет белый, второй – синий; третий – черный?

Решение. Пусть A_1 – первый вытащили белый, A_2 – второй – синий, A_3 – третий – черный. Тогда интересующие нас событие A выразится в виде $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. По правилу умножение вероятностей $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2)$. Но $P(A_1) = \frac{4}{9}, P(A_2|A_1) = \frac{3}{8}$, так как в коробке осталось 8 шаров, а благоприятствующих исходов 3, $P(A_3|A_1 \cdot A_2) = \frac{2}{7}$. Следовательно $P(A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$.

4.1. Слово МАШИНА состоит из букв разрезанной азбуки. Наудачу друг за другом извлекаются четыре буквы и выкладываются последовательно в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ШИНА?

4.2. В экзаменационные билеты включено по два теоретических вопроса и одной задаче. Всего составлено 28 билетов, содержащих разные вопросы и задачи. Студент подготовил только 50 теоретических вопросов и сможет решить задачи к 22 билетам. Какова вероятность того, что, вынув наудачу один билет, студент ответит на все вопросы и решит задачу?

4.3. Вероятность сдачи студентом зачета равна 0,8. Если зачет сдан, то студент допускается к экзамену, вероятность сдачи которого равна 0,9. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет и экзамен?

4.4. Вероятность поражения первой мишени для данного стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна ½. Определить вероятность поражение второй мишени.

4.5. Два стрелка, для которых вероятности попадание в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8, произвели по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

4.6. Сколько нужно взять чисел из таблицы случайных чисел, чтобы с вероятностью не менее 0,9 быть уверенным, что среди них хотя бы одно число четное?

4.7. На участке AB для мотоциклиста-гонщика имеется 12 препятствий, вероятность остановки на каждом из которых равна 0,1. Вероятность того, что от пункта B до конечного пункта C мотоциклист проедет без остановки, равна 0,7. Определить вероятность того, что на участке AC не будет ни одной остановки.

4.8. Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условием неприятия всей партии является наличие хотя бы одной дефектной детали среди четырех проверяемых. Какова вероятность того, что данная партия не будет принята, если она содержит 3% дефектных деталей?

4.9. Урна содержит 3 белых шара и 4 черных шара. Три человека один за другим вынимают по одному шару, не возвращая их в урну. Тот, кто первый вытаскивает белый шар, выигрывает. Каковы соответственные шансы победить первого, второго и третьего игроков? (Они продолжают игру до тех пор, пока кто-то не выиграет.)

4.10. Из корзины, содержащей три красных яблока и семь зелёных, вынимают сразу два яблока. Найти вероятность того, что оба они будут красными.

4.11. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что оба раза появится одно и то же число очков.

4.12. В мешке содержится 10 одинаковых кубиков с номерами от 1 до 10. Наудачу извлекаются по одному три кубика. Найти вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2, 3, если кубики извлекаются: а) без возвращения, б) с возвращением (извлеченный кубик возвращается в мешок).

4.13. В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу по одному извлекаются три шара без возвращения. Найти вероятность следующих событий: а) последовательно извлекаются шары с номерами 1, 4, 5; б) извлеченные шары будут иметь номера 1, 4, 5 независимо от того, в какой последовательности они появились.

4.14. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только один сигнализатор; б) хотя бы один сигнализатор

4.15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

4.16. Брошены две игральные кости. Событие A={выпадение шестерки на первой кости}. Событие B={сумма выпавших очков равна 7}. Являются ли события A и B независимыми?

§ 5. Теорема сложения вероятностей

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий. Например, для трех совместных событий

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

Вероятность наступления события A, состоящего в появлении *хотя бы* одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположенных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$:

$$P(A)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i).$$

Указания.

1. Уяснить в чем состоит рассматриваемое в задаче испытание.

2. Обозначить буквами события, рассматриваемые в условии задачи.

3. Записать через введенные обозначения событие, вероятность которого надо вычислить.

4. Выяснить совместны или несовместны рассматриваемые события.

Пример 1. Определить вероятность того, что партия из 100 изделий, среди которых пять бракованных, будет принята при испытании наудачу выбранной половины всей партии, если условиями приема допускается бракованных изделий не более одного из пятидесяти.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что при испытании не получено ни одного бракованного изделия, через B – событие, состоящее в том что получено только одно бракованное изделие. Искомая вероятность $P(A+B)$. События A и B несовместны. Поэтому $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Из 100 изделий 50 можно выбрать C_{100}^{50} способами. Из 95 набракованных изделий 50 можно выбрать C_{95}^{50}.

Поэтому $P(A)=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}$. Аналогично $P(B)=\frac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}$. Тогда $P(A+B)=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}+\frac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}=\frac{47\cdot 37}{99\cdot 97}\approx 0.181$.

Пример 2. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающих независимо друг от друга. Вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}15$ и $p_3=0{,}2$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

Решение. Элементы включены последовательно, поэтому тока в цепи не будет (событие A), если откажет *хотя бы* один из элементов. Поэтому искомая вероятность равна

$$P(A)=1-\bar{p}_1\cdot\bar{p}_2\cdot\bar{p}_3=1-(1-0{,}1)(1-0{,}15)(1-0{,}2)=0{,}388\,.$$

5.1. Бросается две игральные кости. Какова вероятность появление хотя бы одной шестерки?

5.2. Ученик забыл последнюю цифру даты Куликовской битвы и поэтому называет ее наудачу. Определить вероятность того, что до правильного ответа ему придется отвечать не более трех раз.

5.3. Три орудия стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель каждого равна 0.6. Найти вероятность попадания в цель а) ровно одного орудия, б) хотя бы одного орудия.

5.4. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называется валет, дама или король)?

5.5. Две одинаковые монеты радиуса r расположены внутри круга радиуса R, в который на удачу бросается точка. Определить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если монеты не пересикаются.

5.6. Известны вероятности событий A, B и AB. Найти вероятность события $A\bar{B}$ и условную вероятность $P(\bar{B}|\bar{A})$.

5.7. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета.

5.8. Вероятность получения билета, у которого равны суммы трех первых и трех последних цифр шестизначного номера, равна 0.05525. Какова вероятность иметь такой билет среди двух взятых наудачу, если оба билета: а) имеют последовательные номера; б) получены не зависимо друг от друга?

5.9. В ящике имеется 10 монет по 20 коп., 5 монет по 15 коп. и 2 монеты по 10 коп. Наугад берутся шесть монет. Какова вероятность того, что в сумме они составят не более одного рубля?

5.10. Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента K или двух элементов K_1 и K_2, которые выходят из строя независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0,3, 0,2 и 0,2. Определить вероятность разрыва электрической цепи.

5.11. Выполненная контрольная работа состоит из задачи и примера. Вероятность того, что в наудачу выбранной работе правильно решена задача, равна 0,8, а того, что получен хотя бы один правильный ответ, – 0,9. Найти вероятность того, что правильно решен пример?

5.12. Надежность (т.е. вероятность безотказной работы) прибора равна 0,7. Для повышения надежности прибора он дублируется n-1 другими такими же приборами. При этом все n приборов соединены параллельно. Сколько приборов надо взять, что бы повысить надежность до 0,95.

5.13. Доказать формулу $\mathrm{P}\left\{\mathrm{A} \mid \mathrm{B}\right\}+\mathrm{P}\left\{\overline{\mathrm{A}} \mid \mathrm{B}\right\}=1$.

5.14. Чтобы подбодрить сына, делающего успехи в игре в теннис, отец обещает ему приз, если он выиграет подряд по крайней мере две теннисные партии подряд против своего отца и клубного чемпиона по одной из схем: отец - чемпион - отец или чемпион - отец - чемпион по выбору сына. Чемпион играет лучше отца. Какую схему следует выбрать сыну?

5.15. Даны три попарно независимых события A, B, C, которые, однако, все три вместе произойти не могут. Предполагая, что все они имеют одну и ту же вероятность p, найти наибольшее возможное значение p. (*Указания: оценить вероятность событий, каждое из которых является произведением трех простых событий*).

5.16. Охотник стреляет в лося с расстояния 100м и попадает в него с вероятностью 0,5. Если при первом выстреле попадания нет, то охотник стреляет второй раз, но с расстояния 150м. Если нет попадания и в этом случае, то он стреляет третий раз, причем в момент выстрела расстояние до лося составляет 200м. Считая что вероятность попадания обратно пропорциональна квадрату расстояния до цели, определить вероятность попадания в лося.

§ 6. Формула полной вероятности

Вероятность $P(A)$ появления события A, которое может произойти только с одним из событий H_1, H_2, …, H_n, образующими полную группу попарно несовместных событий (гипотез), определяется формулой полной вероятности
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i),$$
где
$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

Указания.

1. Уяснить последовательность испытаний, рассматриваемых в задаче.

2. Обозначить событие, вероятность наступления которого надо найти, какой-нибудь буквой, например A.

3. Составить множество попарно несовместных гипотез H_i. Проверить, что объединение гипотез совпадает с пространством элементарных событий проводимого испытания.

4. Вычислить вероятности каждой из гипотез и условные вероятности наступление события A при условии, что имела место соответствующая гипотеза.

5. Вычислить вероятность A по формуле полной вероятности.

Пример 1. Имеются три партии радиоламп, насчитывающих соответственно 20, 30 и 50 штук. Вероятности того, что радиолампа проработает заданное время, равны соответственно 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что наудачу выбранная лампа из 100 данных проработает заданное время?

Решение. Испытание состоит в том, что наудачу извлекается одна лампа из ста. Событие A, вероятность которого надо вычислить, состоит в том, что извлеченная лампа проработает заданное время. Пусть гипотезы H_1, H_2, H_3 означают соответственно, что наудачу выбранная радиолампа принадлежит первой, второй, третей партии. По формуле непосредственного подсчета вероятности $P(H_1)=0{,}2$, $P(H_2)=0{,}3$ и $P(H_3)=0{,}5$. По условию задачи $P(A|H_1)=0{,}7$, $P(A|H_2)=0{,}8$ и $P(A|H_3)=0{,}9$. По формуле полной вероятности находим вероятность события A, которая равна
$$P(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}5 = 0{,}83.$$

6.1. Имеются три одинаковые урны. В первой урне находятся 4 белых и 6 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные.

Наудачу выбирается урна и из нее наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар черный?

6.2. Из полного набора костей домино наудачу выбрана одна кость, которая в игру не возвращается. Какова вероятность того, что наудачу выбранную вторую кость можно приставить к первой?

6.3. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

6.4. Ученик пришел на экзамен, зная 25 билет из 30. Перед ним был взят только один билет. Какова вероятность того, что ученик знает наудачу вытянутый билет? Как изменится эта вероятность, если ученик будет тянуть билет первым.

6.5. На карточках написаны буквы, образующие слово *комбинаторика*, но две карточки из этого набора утеряны. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что на ней окажется гласная буква?

6.6. Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего вынимается изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

6.7. В ящике находится 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

6.8. В правом кармане имеется три монеты по 10 рублей и четыре монеты по 5 рублей, а в левом – шесть по 10 рублей и три по 5 рублей. Из правого кармана в левый наудачу перекладывается 5 монет. Определить вероятность извлечения из левого кармана после перекладывания монеты номиналом 10 рублей, если она берется наудачу.

6.9. В вычислительной лаборатории имеются шесть клавишных автоматов и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

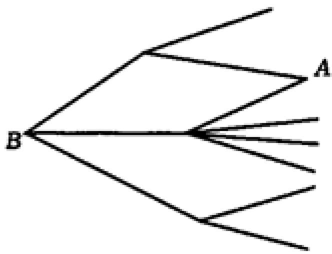
6.10. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет два выстрела из наудачу взятой винтовки.

6.11. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

6.12. Отмеченный шар с вероятностью p и $1\text{-}p$ может находиться в первой или второй урне. Вероятность извлечь отмеченный шар из урны, в которой он находится, равна P ($P\neq 1$). Как следует распорядиться правом n раз извлекать шары из урны, чтобы вероятность извлечения отмеченного шара хотя бы один раз была наибольшей, если шар после извлечения возвращается в урну?

6.13. Для поисков пропавшего самолета выделено 10 вертолетов, каждый из которых может быть использован для поисков в одном из двух возможных районов, где самолет может находиться с вероятностями 0,8 и 0,2. Как следует распределить вертолеты по районам поисков, что бы вероятность обнаружения самолета была наибольшей, если каждый вертолет обнаруживает находящийся в районе поиска самолет с вероятностью 0,2? Поиск осуществляется каждым вертолетом независимо от других. Найти вероятность обнаружения самолета при оптимальной процедуре поиска.

6.14. Путник должен попасть из пункта В в пункт А в соответствии со схемой дорог изображенной на рисунке. Выбор любой дороги в любом пункте равновозможен. Найдем вероятность события А – достижения путником намеченной цели.



§ 7. Вычисление вероятностей после испытаний (формула Байеса)

Следствием формулы полной вероятности является формула Байеса или теорема гипотез. Она позволяет переоценить вероятность гипотез H_k, принятых до опыта и называемых априорными по результатам уже проведенного опыта, то есть найти условные вероятности $P(H_k \mid A)$, которые называются апостериорными.

Вероятность $P(H_k \mid A)$ гипотезы H_k после того как имело место событие A, определяется формулой

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{P(A)},$$

где $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)$, а гипотезы H_i (i=1, 2, …, n) составляют полную группу событий.

Указания.

1. Уяснить суть основного события задачи A и гипотез H_i.

2. Вычислить вероятность события A по формуле полной вероятности.

3. Если из условия задачи известно, что событие A уже произошло, то формуле Байеса необходимо вычислить апостериорную вероятность гипотезы.

Пример 1. В условие примера предыдущего параграфа внесено изменение: считается известным, что наудачу выбранная радиолампа проработала заданное время. Какова вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии.

Решение. Из условия задачи известно, что наудачу выбранная радиолампа проработала заданное время, то есть событие A уже произошло. После получения этой дополнительной информации надо определить, как изменилась вероятность гипотезы. Требуется вычислить вероятность гипотезы H_1 при условии, что событие A произошло. По формуле Байеса

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,7}{0,83} = \frac{14}{83}$$

т.е. вероятность того, что лампа принадлежит первой партии, после опыта уменьшилась и стала равной 14/83.

7.1. Имеется 10 одинаковых урн, из которых в девяти находятся по два белых и два черных шара, а в одной – пять белых и один черный шар. Из урны взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность, что шар извлечен из урны, содержащей пять белых шаров?

7.2. Имеется k_1 урн, в каждой из которых m_1 белых и n_1 черных шаров, и k_2 урн, содержащих по m_2 белых и n_2 черных шаров. Извлеченный из наудачу выбранной урны шар оказался белым. Какова вероятность, что данный шар извлечен из первый группы урн.

7.3.. Из партии в пять изделий наудачу взято одно изделии, оказавшиеся бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?

7.4. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно и 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на 20 вопросов, хорошо подготовленный на 16, посредственно - на 10, плохо – на 5. Вызванный на удачу студент ответил на три вопроса. Найти вероятность, что этот студент подготовлен: а) отлично, б) плохо.

7.5. Определить вероятность того, что среди 1000 лампочек нет ни одной неисправной, если из взятых наудачу 100 лампочек все оказались исправны. Предполагается, что число неисправных лампочек из 1000 равновозможно от 0 до 5.

7.6. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0.8, 7 – с вероятностью 0.7, 4 – с вероятностью 0.6 и 2 – с вероятностью 0.5 Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежит стрелок?

7.7. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 4/5, 3/4, 2/3. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

7.8. Трое охотников одновременно выстрелили по вепрю, который был убит одной пулей. Определить вероятности того, что вепрь убит первым, вторым или третьим охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0.2, 0.4, 0.6.

7.9. Попадание точки в любое место области 5 равновозможно, область 5 состоит из четырех частей, составляющих соответственно 50, 30, 12 и 8% всей области. При испытании имело место событие A, которое происходит только при попадании случайной точки в одну из этих частей с вероятностями 0.01, 0.05, 0.2 и 0.5. В какую из частей области 5 вероятнее всего произошло попадание?

7.10. В техникуме n студентов, из которых n_k $(k = 1,2,3)$ учится k-ый год. Среди двух наудачу выбранных студентов оказалось, что один из них учится больше другого. Какова вероятность того, что этот студент учится третий год.

7.11. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что в среднем искажаются 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в соотношении 5 к 3. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если: а) принят сигнал точка, б) принят сигнал «тире».

7.12. Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично из той же партии наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

7.13. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2; 0,4 и 0,3.

7.14. Две из четырех независимо работающих ламп прибора отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и вторая лампы, если вероятности отказа первой, второй, третьей и четвертой ламп соответственно равны: 0.1, 0.2, 0.3 и 0.4.

7.15. В группе спортсменов лыжников в 2 раза больше, чем бегунов, а бегунов в 3 раза больше, чем велосипедистов. Вероятность выполнить норму для лыжника 0,9, для бегуна 0,75, для велосипедиста - 0,8. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнивший норму является бегуном.

§ 8. Повторные независимые испытания с двумя исходами

Последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некое событие A (его называют успехом) с вероятностью $P(A) = p$ или противоположенное ему событие $\overline{A}$ (его называют неудачей) с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p$, называется *схемой Бернулли*.

Формула Бернулли. Вероятность того, что событие A наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждое из которых имеет два исхода, вычисляется по формуле

$$P_n(m) = p_{n,m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Вероятность того, что событие A при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз вычисляется по формуле

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$$

Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события A при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Теорема Пуассона. Если число испытаний неограниченно увеличивается ($n \to \infty$) и вероятность p наступления события A в каждом испытании неограниченно уменьшается ($p \to 0$), но так что их произведение np остается постоянной величиной ($np = a = \text{const}$), то вероятность $P_n(m)$ удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{n \to \infty} P_n(m) = \frac{a^m e^{-a}}{m!}.$$

Для вычисления интеграла пользуются специальными таблицами распределения Пуассона (*см. Приложение 1*)

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ может быть вычислена по приближенной формуле

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в *приложении 2*; для отрицательных значений *x* пользуются этой же таблицей с учётом того, что функция $\varphi(x)$ четная, следовательно, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

Интегральная терема Муавра—Лапласа.

Если вероятность *р* наступления события *А* в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m_1 \le m \le m_1)$ может быть вычислена по приближенной формуле

$$P_n(m_1 \le m \le m_1) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{, где } t_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, t_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Для вычисления интеграла пользуются специальными таблицами нормированной функции Лапласа (*см. Приложение 2*)

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Эта функция нечетная, т.е. Ф(-*x*)=-Ф(*x*). Формула для вычисления вероятности может быть записана следующим образом:

$$P_n(m_1 \le m \le m_1) \approx \Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1)$$

Указания.

1. Прежде всего, необходимо уяснить, что рассматриваемый эксперимент удовлетворяет схеме Бернулли, т.е. необходимо проверить: проводимые испытания независимы, каждое испытание имеет два исхода, вероятность появления события в каждом испытании постоянна.

2. После этого вводятся соответствующее обозначение события.

3. Если число испытаний *n* мало, то для вычисления вероятности появления события *m* раз используется формула Бернулли. В этом случае не возникает вычислительных трудностей.

4. Если число испытаний *n* достаточно велико, а вероятность наступления события в каждом испытании отлична от 0 и 1, то для вычисления вероятности $P_n(m)$ применяется формула Лапласа.

5. Если число испытаний *n* достаточно велико, а вероятность наступления события в каждом испытании мала, то для вычисления вероятности $P_n(m)$ применяется формула Пуассона.

Пример 1. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 0,2. Какова вероятность того, что из шести приобретенных билетов два окажутся выигрышными.

Решение. Эксперимент состоит в том, что последовательно проверяются 6 билетов, т.е. проводится 6 независимых испытаний (n=6). Каждое испытание имеет два исхода: билет выигрышный, билет невыигрышный. Вероятность выигрыша в каждом испытании постоянна. Следовательно, схема Бернулли выполняется. Пусть событие A состоит в том, что два билета оказались выигрышными (m=2). Тогда по формуле Бернулли:

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^4 \approx 0,246 .$$

Пример 2. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,7. Стрелок произвел 200 выстрелов. Найти следующие вероятности а) мишень поражена 160 раз, б)в мишени оказалось от 130 до 150 пробоин.

Решение. Указанный эксперимент удовлетворяет схеме Бернулли, при этом n=200, m=160, p=0,7. Учитывая, что n достаточно велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа.

а) $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{160-200\cdot 0,7}{\sqrt{200\cdot 0,7\cdot 0,3}} \approx 3,09$, $P_{200}(160) \approx \dfrac{1}{\sqrt{42}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{3,09^2}{2}} \approx 0,0005$.

б) Для вычисления вероятности $P_{200}(130 \le m \le 150)$ воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа.

$$t_1 = \frac{m_1-np}{\sqrt{npq}} = \frac{130-200\cdot 0.7}{\sqrt{42}} \approx -1,54,\ t_2 = \frac{m_2-np}{\sqrt{npq}} = \frac{150-200\cdot 0.7}{\sqrt{42}} \approx 1,54$$

$$P_n(130 \le m \le 150) \approx \Phi_0(1,54) - \Phi_0(-1,54) = 2\cdot\Phi_0(1,54) \approx 0,8764$$

8.1. Для данного участники игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке, если броски считать независимыми.

8.2. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

8.3. В семье десять детей. Считая вероятность рождения мальчика и девочки равными 0,5, определить вероятность того, что в данной семье: а) пять мальчиков, б) мальчиков не менее трех и не более восьми.

8.4. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся машины не содержит: а) цифры пять, б) двух и более пятерок, в) ровно двух пятерок. Известно, что все номера трехзначные, неповторяющиеся равновозможные (считается возможным номер 000).

8.5. Производится четыре независимых опыта, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,3. Событие B наступает с вероятностью равной 1, если событие A произошло не менее двух раз; не может наступить, если событие A не имело место; наступает с вероятностью 0,6, если событие A имело место один раз. Определить вероятность появления события B.

8.6. Вероятность хотя бы одного появления события A при четырех независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления события A при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

8.7. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,2. Сколько нужно произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 попасть в 10 хотя бы один раз.

8.8. За один цикл автомат изготавливает 10 деталей. За какое количество циклов вероятность изготовления хотя бы одной бракованной детали будет не менее 0,8, если вероятность того, что любая деталь бракованная равна 0,01.

8.9. При высаживании непикированной рассады помидоров только 80% растений приживаются. Найдите вероятность того, что из десяти посаженных кустов помидоров приживется не менее девяти.

8.10. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,85. Стрелок сделал 25 независимых выстрелов. Найдите наивероятнейшее число попаданий

8.11. Известно, что вероятность прорастания семян данной партии пшеницы 0,95. Сколько семян следует взять из этой партии, чтобы наивероятнейшее число взошедших семян равнялось 100?

8.12. Контрольная работа состоит из шести задач, причем для успешного выполнения ее необходимо решить любые четыре задачи. Если студент будет решать в течение отведенного времени лишь четыре задачи, то вероятность правильного решения любой из них равна 0,8. Если он попробует решить пять задач, то вероятность правильного решения любой из них равна 0,7, а если он возьмется за решение всех шести задач, то эта вероятность снизится до 0,6. Какой тактики должен придерживаться студент, чтобы иметь наибольшие шансы успешно выполнить работу?

8.13. Найдите вероятность того, что при десяти независимых испытаниях событие A произойдет 4 раза, если вероятность его появления при каждом испытании равна 1/3. Вычисление выполните, используя теорему Бернулли и локальную теорему Лапласа. Найдите относительную ошибку полученного результата.

8.14. Какова вероятность того, что при 80 бросаниях игральной кости шестерка выпадет 10 раз?

8.15. Упаковщик укладывает 900 деталей, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероятность того, что деталь помечена личным клеймом, равна 0,1. Найдите вероятность того, что среди них окажется от 100 до 120 деталей с личным клеймом.

8.16. Электростанция обслуживает сеть с 6000 лампочек, вероятность включения каждой из которых за время t равна 0,8. Найдите вероятность того, что одновременно будет включено не менее 4750 ламп.

8.17. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,005. Найдите вероятность того, что из 600 проверяемых изделий не выдержат испытания а) два изделия, б) хотя бы одно изделие, в) более двух изделий.

8.18. С торговой базы в магазин отправлено n доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна p, причем n велико, а p мало. Известно, что вероятность получения магазином четырех изделий, получивших дефекты, равна вероятности получения магазином пяти изделий с дефектами. Найдите вероятность того, что магазин получит семь изделий с дефектами.

8.19. Монета брошена $2N$ раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет на $2m$ раз больше, чем надпись.

8.20. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз?

8.21. Вероятность выхода из строя каждого мотора самолета равна q, причем моторы портятся независимо один от другого. Самолет может продолжать полет в том случае, если работают не менее половины его моторов. Для каких значений q двухмоторный самолет следует предпочесть четырехмоторному? (Вероятность того, что мотор не выйдет из строя, равна p=1-q.)

§ 9. Производящая функция

В предыдущем параграфе этой главы рассматривались испытания с одинаковыми вероятностями появления события. Рассмотрим испытания, в которых вероятности появления события различны. Пусть производится n независимых испытаний, причем в первом испытании вероятность появления события A равна p_1, во втором – p_2, …, в n-м испытании – p_n; вероятности непоявления события A соответственно равны q_1, q_2, …, q_n; $Pn(k)$ вероятность появления события A в n испытаниях ровно к раз.

Производящей функцией вероятностей φ_n(z) называют функцию, определяемую равенством

$$\varphi_n(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2)...(p_n z + q_n).$$

Вероятность $Pn(k)$ того, что в n независимых испытаниях событие А появится ровно k раз, равна коэффициенту при z^k в разложении производящей функции по степеням z.

Пример 1. Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятности безотказной работы элементов (за время t) соответственно равны: 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того, что за время t будут работать безотказно: а) все элементы; б) два элемента; в) один элемент; г) ни один из элементов.

Решение. Вероятности безотказной работы элементов соответственно равны: p_1=0,7; p_2=0,8; p_3==0,9, поэтому вероятности того, что элементы откажут, q_1=0,3; q_2=0,2; q_3=0,1.

Составим производящую функцию:

$$\varphi_n(z) = (0.7z + 0.3)(0.8z + 0.2)...(0.9z + 0.1) =$$
$$= 0,504z^3 + 0,3982z^2 + 0,092z + 0,006.$$

а) Вероятность того, что три элемента будут работать безотказно, равна коэффициенту при z^3: $P_3(3)$=0,504.

б) Вероятность того, что два элемента будут работать безотказно, равна коэффициенту при z^2: $P_3(2)$=0,398.

в) Вероятность того, что один элемент будет работать безотказно, равна коэффициенту при z^1: $P_3(1)$=0,092.

г) Вероятность того, что ни один из элементов не будет работать безотказно, равна свободному члену: $P_3(0)=0,006$.

Контроль: 0,504+0,398+0,092+0,006=1.

9.1. Из двух орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,8, для второго - 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) два попадания в цель; б) одно попадание; в) ни одного попадания; г) не менее одного попадания.

9.2. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,8, для второго - 0,85, для третьего - 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

9.3. Четыре элемента вычислительного устройства работают независимо. Вероятность отказа первого элемента за время t равна 0,2, второго - 0,25, третьего - 0,3, четвертого - 0,4. Найти вероятность того, что за время t откажут: а) 4 элемента; б) 3 элемента; в) 2 элемента; г) 1 элемент; д) ни один элемент; е) не более двух элементов.

9.4. Две батареи по 3 орудия каждая производят залп по цели. Цель будет поражена, если каждая из батарей даст не менее двух попаданий. Вероятности попадания в цель орудиями первой батареи равны 0,4; 0,5; 0,6, второй - 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность поражения цели при одном залпе из двух батарей.

9.5. Последовательно послано четыре сигнала. Вероятность приема каждого из них не зависит от того, приняты ли остальные сигналы, и соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3; 0,4. Определить вероятность приема: а) ни одного сигнала; б) одного; в) двух; г) трех; д) четырех.

2 Случайные величины

§ 10. Ряд, многоугольник и функция распределения дискретной случайной величины

Под *случайной величиной X* понимают величину, которая в результате опыта принимает то или иное значение, причем неизвестное заранее, какое именно. Случайная величина, принимающая конечное или счетное множество значений, называется *дискретной (д.с.в.)*.

Рядом распределения называется совокупность всех возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей $p_i=P\{X=x_i\}$. Ряд распределения может быть задан в виде таблицы или формулы.

Так как события $\{X=x_1\}$, $\{X=x_2\}$, … несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единицы, т.е. $\sum_i p_i = 1$.

Закон распределения можно задать графически, если на оси абсцисс отложить возможные значения случайной величины, а на оси ординат – вероятности этих значений. Ломаную, соединяющею последовательность точек $(x_1,\ p_1)$, $(x_2,\ p_2)$, … называют многоугольником (или полигоном) распределения.

Функцией распределения (интегральным законом распределения) случайной величины X называется функция $F(x)$, которая равна вероятности того, что случайная величина будет меньше значения x

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_i < x} p_i \,.$$

Указания.

1. Уяснить, что является случайной величиной в рассматриваемой задаче.

2. Перечислить все возможные значения случайной величины.

3. Из условия задачи установить закон распределения вероятностей случайной величины.

4. Используя соответствующею формулу, найти вероятности появления возможных значений случайной величины.

5. Составить таблицу распределения вероятностей и проверить равенство $\sum_i p_i = 1$.

Пример 1. Производится залп из шести орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объест из каждого орудия равна 0,6. Построить ряд распределения случайного числа X попаданий в объект. Построить многоугольник распределения и найти функцию распределения.

Решение. Так как число попаданий в объект может быть целым числом в пределах от 0 до 6 включительно, то возможные значения x_i случайной величины X равны:

$$x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=4,\ x_5=5,\ x_6=6.$$

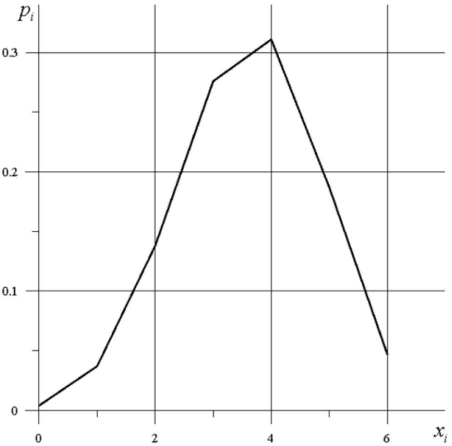
Вероятность $P\{X=x_i\}$ определяется по формуле Бернулли

$$p_i = C_6^i\, 0,6^i (1-0,6)^{6-i}.$$

В результате расчетов по данной формуле с точностью до 0,001 получаем

$$p_0=0,004,\ p_1=0,037,\ p_2=0,138,\ p_3=0,276,\ p_4=0,311,\ p_5=0,187,\ p_1=0,047.$$

Используя для проверки равенство $\sum_{i=0}^{6} p_i = 1$ убеждаемся, что расчеты проведены верно. По полученным данным строим многоугольник распределения вероятностей.



Далее будем задавать различные значения x и находить для них $F(x)= P\{X<x\}$:

– если $x\le 0$, то очевидно $F(x)= P\{X<0\}=0$;
– если $0< x\le 1$, то $F(x)= P\{X<1\}=0,004$;
– если $1< x\le 2$, то $F(x)= P\{X<2\}=0,004+0,037=0,041$;
– если $2< x\le 3$, то $F(x)= P\{X<3\}=0,041+0,138=0,179$;
– если $3< x\le 4$, то $F(x)= P\{X<4\}=0,179+0,276=0,455$;

– если $4 < x \le 5$, то $F(x) = P\{X<5\}=0{,}455+0{,}311=0{,}766$;

– если $5 < x \le 6$, то $F(x) = P\{X<6\}=0{,}766+0{,}187=0{,}953$;

– если $6 < x$, то $F(x) = P\{X>6\}=0{,}953+0{,}047=1$.

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ если\ x \le 0; \\ 0{,}004,\ если\ 0 < x \le 1; \\ 0{,}041,\ если\ 1 < x \le 2; \\ 0{,}179,\ если\ 2 < x \le 3; \\ 0{,}455,\ если\ 3 < x \le 4; \\ 0{,}766,\ если\ 4 < x \le 5; \\ 0{,}953,\ если\ 5 < x \le 6; \\ 1,\ если\ x > 6. \end{cases}$$

10.1. Какие из перечисленных ниже величин являются дискретными: а) число попаданий в мишень при десяти независимых выстрелах б) отклонение размера обрабатываемой детали от стандарта; в) число нестандартных деталей, оказавшихся в партии из 100 деталей; г) число очков выпавшее на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

10.2. Постройте ряд распределения вероятностей числа попаданий в мишень при трех независимых выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2.

10.3. Монета подбрасывается 4 раза. Для случайного числа появлений герба составьте ряд распределения и постройте многоугольник распределения вероятностей.

10.4. Кольца набрасываются на колышек либо до первого попадания, либо до полного израсходования всех колец, число которых равно пяти. Составьте ряд распределения случайного числа брошенных колец, если вероятность набрасывания кольца на колышек при каждом испытании постоянна и равна 0,9. Используя полученные данные, найти $P\{X<4\}$.

10.5. Производится последовательные независимые испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения и функцию распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9.

10.6. Независимые опыты продолжаются до первого положительного исхода, после чего они прекращаются. Найти для случайного числа опытов: а) ряд распределения, б) многоугольник распределения, в) наивероятнейшее число опытов, если вероятность положительного исхода при каждом опыте равна 0,5.

10.7. Имеются 6 билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Наудачу берут три билета. Составьте ряд распределения вероятностей числа билетов первого ряда, оказавшихся в выборке. Используя полученные данные, найдите $P\{X<3\}$.

10.8. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов.

10.9. В магазине имеется 15 автомобилей определенной марки. Среди них 7 черного цвета, 6 серого и 2 белого. Представители фирмы обратились в магазин с предложением о продаже им 3 автомобилей этой марки, безразлично какого цвета. Составьте ряд распределения числа проданных автомобилей черного цвета при условии, что автомобили отбирались случайно.

10.10. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Составить закон распределения числа промахов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7.

§ 11. Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины

Случайная величина X, для которой функция распределения вероятностей $F(x)$ непрерывна, называется *непрерывной (н.с.в.)*. Напомним, что *функция распределения* $F(x)$, где x – произвольное действительное число, дает вероятность того, что случайная величина X окажется меньше x, т.е. $F(x)=P\{X<x\}$.

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$;
2) $P\{a<X<b\}=F(b)-F(a)$;
3) $F\{x_1\} \le F\{x_2\}$, если $x_1<x_2$;
4) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$;
5) $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x)=F(x_0)$.

Плотностью распределения $f(x)$ вероятностей непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения, т.е. $f(x)=F'(x)$. Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1) $f(x) \ge 0$,
2) $P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)dx$,
3) $F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt$,
4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$.

Модой M_0X случайной величины X называется точка максимума плотности распределения $f(x)$. Если мода единственна, то распределение называется унимодальным, в противном случае – полимодальным.

Квантилем уровня p случайной величины X называется решение уравнения

$$F(x_p)=p,$$

где p – некое число, $0<p<1$. Квантиль уровня 0,5 называется *медианой*.

Пример 1. Плотность вероятностей случайной величины равна

$$f(x)=ax^2e^{-kx} \quad (k>0,\ 0 \le x<\infty).$$

Требуется а) найти коэффициент a; б) найти функцию распределения; в) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $(0,1/k)$.

Решение. а) Коэффициент a определяется с помощью четвертого свойства плотности распределения

$$\int_0^\infty ax^2 e^{-kx}dx = 1.$$

Двукратное интегрирование по частям левой части равенства дает

$$-\frac{ax^2e^{-kx}}{k}\Bigg|_0^\infty + \frac{2a}{k}\int_0^\infty xe^{-kx}dx = 0 + \frac{2a}{k}\left(-\frac{xe^{-kx}}{k}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-kx}dx\right) =$$

$$= \frac{2a}{k}\left(0 - \frac{1}{k^2}e^{-kx}\Big|_0^\infty\right) = \frac{2a}{k^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{k^3}{2}.$$

б) Функция распределения определяется с помощью третьего свойства

$$F(x) = \int_0^x at^2e^{-kt}dt = a\left[-\frac{t^2e^{-kt}}{k} + \frac{2}{k}\left(-\frac{te^{-kt}}{k} + \frac{1}{k^2}e^{-kt}\right)\right]_0^x = 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2}e^{-kx}.$$

в) Вероятность попадания случайной величины в отмеченный интервал найдем с помощью второго свойства функции распределения

$$P\left\{0 < X < \frac{1}{k}\right\} = F\left(\frac{1}{k}\right) - F(0) = F\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{5}{2e} \approx 0{,}08.$$

11.1. Функция распределения годовых доходов лиц, облагаемых налогом, имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^\alpha & при\ x \ge x_0, \\ 0 & при\ x < x_0. \end{cases}$$

Определить размер готового дохода, который для случайно выбранного налогоплательщика может быть превзойден с вероятностью 0,5.

11.2. Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид (экспоненциальный закон распределения)

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{T}\right), \ (x \ge 0).$$

Найти: а)вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T, б)плотность вероятностей $f(x)$.

11.3. Случайная величина эксцентриситета детали характеризуется функцией распределения Рэлея

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \ (x \geq 0).$$

Найти: а) плотность вероятностей $f(x)$, б) моду и медиану распределения.

11.4. Функция распределения Вейбулла

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^m}{x_0}\right), \ (x \geq 0)$$

в ряде случаев характеризует срок работы элементов электроаппаратуры. Найти: а) плотность вероятностей $f(x)$, б) квантиль распределения порядка р, в)моду распределения.

11.5. Случайное время простоя радиоэлектронной аппаратуры в ряде случаев имеет плотность вероятностей

$$f(x) = \frac{M}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\lg x - \lg x_0)^2}{2\sigma^2}\right), \ (x \geq 0),$$

где $M=\lg e$ (логарифмически нормальный закон распределения). Найти а) моду распределения при $x_0=1$ и $\sigma = \sqrt{5M}$, б) функцию распределения.

11.6. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x) = c + b\, arctg \frac{x}{a}, \ (-\infty < x < +\infty) \ \text{(закон Коши).}$$

Определить а) постоянные c и b, б)плотность вероятностей, в) $P\{\alpha<x<\beta\}$.

11.7. Каково должно быть a, чтобы $f(x) = a/\left(1+x^2\right)$ являлась плотностью вероятностей случайной величины X, изменяющейся в бесконечных пределах? Найти а) функцию распределения, б) вероятность попадания случайной величины в интервал (-1,1).

11.8 Дана функция распределения непрерывной случайной величины X.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при\ x < 0, \\ 1 - ae^{-2x} при\ x \geq 0. \end{cases}$$

Найти значения параметров a. Построить график функции распределения. Найти вероятность $P\{-1 < X < 1\}$. Найти плотность распределения и построить ее график.

§ 12. Численные характеристики случайных величин

Математическим ожиданием (*м.о.* или *средним значением*) д.с.в. X, имеющей закон распределения $p_i=P\{X=x_i\}$, $i=1,2,3, \ldots, n$, называется число, равное сумме произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности, т.е.

$$M[X]=\sum_i x_i p_i .$$

Математическое ожидание н.с.в. X с плотностью вероятности $f(x)$, называется число

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx .$$

Дисперсией (*рассеянием*) случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от своего математического ожидания

$$D[X]=M[(X-M[X])^2] .$$

Из определения дисперсии следуют формулы для ее вычисления:

$$D[X]=\sum_i (x_i-M[X])^2 p_i$$ – для д.с.в. X,

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-M[X])^2 f(x)dx$$ – для н.с.в. X.

Выпишем свойства математического ожидания и дисперсии.

$M[c]=c$	$D[c]=0$
$M[cX]=c\,M[X]$	$D[cX]=c^2\,D[X]$
$M[X+Y]=M[X]+M[Y]$	$D[X+c]=D[X]$
$M[X-M[X]]=0$	

Математическое ожидание и дисперсия являются являются частными случаями моментов с.в. *Начальным моментом порядка* k с.в. X называется м.о. k-й степени этой величины. Для д.с.в и н.с.в. формулы для вычисления моментов имеют вид

$$\alpha_k=M[X^k]=\sum_i x_i^k p_i, \quad \alpha_k=M[X^k]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx.$$

Центральный моментом порядка k с.в. X называется м.о. величины $(X\text{-}M[X])^k$ и находится по следующим формулам:

$$\mu_k=\sum_i (x_i-M[X])^k p_i, \quad \mu_k=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-M[X])^k f(x)dx.$$

На практике дисперсию случайной величины удобно находить по формуле $D[X]=\alpha_2-\alpha_1^2$.

Средним квадратичным отклонением (или *стандартным отклонением*) с.в. называется квадратный корень из дисперсии

$$\sigma=\sqrt{D[X]}$$

Пример 1. В лотерее имеется 1000 билетов, из них выигрышных: 10 по 500р., 50 по 50р., 100 по 10р., 150 по 1р. Найти математическое ожидание и дисперсию выигрыша на один билет.

Решение. Запишем ряд распределения случайной величины X – суммы выигрыша на один билет

x_i	500	50	10	1	0
p_i	0,01	0,05	0,1	0,15	0,69

Находим значение $M[X]$ по определению

$$M[X]=\sum_i x_i p_i=500\cdot 0,01+50\cdot 0,05+10\cdot 0,1+1\cdot 0,15+0\cdot 0.69=8,65\text{руб.}$$

Отметим, что размерность математического ожидания совпадает с размерностью самой случайной величины. Вычислим значения дисперсии с помощью вспомогательной формулы. Для этого находим второй центральный момент

$$\alpha_2=\sum_i x_i^2 p_i=500^2\cdot 0,01+50^2\cdot 0,05+10^2\cdot 0,1+1^2\cdot 0,15+0^2\cdot 0.69=2635,15\text{руб}$$

$$D[X]=\alpha_2-\alpha_1^2=2635,15-8,65^2=2560,3275\text{руб}^2.$$

Очевидно, что дисперсия имеет размерность квадрата размерности с.в.

Пример 2. Случайная величина X задана плотностью вероятностей $f(x)=0.5x-5$ в интервале (10;12), вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X.

Решение. Вначале найдем математическое ожидание по определению

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{10}^{12} x(0.5x-5)dx=\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{2}x^2\right)\Bigg|_{10}^{12}=\frac{34}{3}.$$

Находим дисперсию

$$\alpha_2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{10}^{12} x^2(0.5x-5)dx=\left(\frac{1}{8}x^4-\frac{5}{3}x^3\right)\Bigg|_{10}^{12}=\frac{386}{9},$$

$$D[X]=\alpha_2-\alpha_1^2=\frac{386}{9}-\left(\frac{34}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$$

Вычислим стандартное отклонение

$$\sigma=\sqrt{D[X]}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

12.1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины *X*, заданной рядом распределения вероятностей:

x_i	2	3	6	7	8	10
p_i	0,1	0,2		0,2	0,15	0,1

Для выполнения задания вычислите вероятность того, что случайная величина примет значение $x=6$.

12.2. В апреле среднесуточная температура воздуха в некоторой местности удовлетворяет следующему закону распределения вероятностей.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$

Найти математическое ожидание среднесуточной температуры.

12.3. Производиться стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,25. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного числа произведенных выстрелов.

Указания. Вспомним выражение для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ 0<x<1.$$

Продифференцировав его по *x*, получим полезную формулу.

12.4. Спортсмен стреляет по мишени до первого попадания, имея в обойме пять патронов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,4. Определить математическое ожидание числа произведенных выстрелов.

12.5. Среди 10 изготовленных приборов 3 неточных. Составить закон распределения числа неточных приборов среды взятых наудачу четырех приборов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

12.6. Ряд распределения дискретной случайной величины состоит из двух неизвестных значений. Вероятность того, что случайная величина примет одно из этих значений, равно 0,8. Найти функцию распределения случайной величины, ее математическое ожидание равно 3,2, а дисперсия 0,16.

12.7. Контрольная работа состоит из трех вопросов. На каждый вопрос приведено 4 ответа, один из которых правильный. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

12.8. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 1/2l & \text{при } |x-a|\le l, \\ 0 & \text{при } |x-a|>l. \end{cases}$$

Определить: а) $M[X]$, б) $D[X]$.

12.9. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le -1, \\ a+b\arcsin x & \text{при } -1<x\le 1, \\ 1 & \text{при } x>1. \end{cases}$$

Определить постоянные a и b. Найти математическое ожидание и дисперсию.

12.10. Плотность вероятности случайной величины X задана в виде

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \dfrac{x^m}{m!}e^{-x} & \text{при } x\ge 0. \end{cases}$$

Определить $M[X]$ и $D[X]$.

12.11. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 1-\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^3 & \text{при } x\ge x_0 \ (x_0>0), \\ 0 & \text{при } x<x_0. \end{cases}$$

Найти $M[X]$ и $D[X]$.

12.12. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, плотность вероятности которой имеет следующий вид:

$$f(x)=0.5e^{-|x|}.$$

§ 13. Основные законы распределения дискретных случайных величин

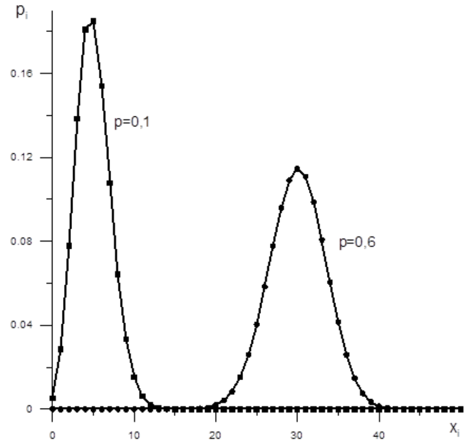
Биноминальный закон распределения. Дискретная с.в. X имеет биноминальное распределение, если она принимает значения 1,2,3, …, n с вероятностью

$$p_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $0 < p < 1, q = 1 - p, m = 0,1,2,...,n.$ Случайная величина X, распределенная по биноминальному закону, является числом успехов с вероятностью p в схеме Бернулли проведения n независимых опытов, а характеристики вычисляются по формулам

$$M[X] = np, \quad D[X] = npq.$$

На рисунке приведен многоугольник биноминального распределения в случае 50 опытов с вероятностью успеха в каждом 0,1 и 0,6.



Распределение Пуассона. Дискретная с.в. X имеет распределение Пуассона, если ее возможные значения 0,1,2, …, m, … (счетное множество значений), а соответствующие вероятности выражаются формулой Пуассона

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{a^m e^{-a}}{m!}$$

Распределение Пуассона является предельным для биноминального, когда $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np = a$ – постоянно. Отличительной особенностью этого распределения является то, параметр a равен одновременно математическому ожиданию и дисперсии

$$M[X]=D[X]=a.$$

Геометрическое распределение. Дискретная с.в. X имеет геометрическое распределение, если ее возможные значения: 1,2,3, …, а вероятность этих значений:

$$p_m = P\{X = m\} = q^{m-1} p\ .$$

Геометрическое распределение имеет с.в. X, равная числу опытов в схеме Бернулли, проведенного до первого успеха.

$$M[X]=1/p, \quad D[X]=q/p^2.$$

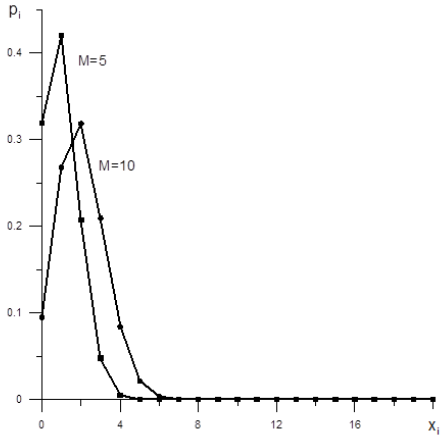
Гипергеометрический закон распределения. Дискретная с.в. X имеет гипергеометрическое распределение, если она принимает значения 0,1,2, …,m,…,min(n,M) а вероятность этих значений:

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}\ ,$$

где $m=0,1,...,\min(n,M),\ M \le N,\ m \le n,\ n \le N,\ n,M,N$ – натуральные числа. Гипергеометрическое распределение возникает в случаях, подобных следующему: в урне N шаров, из них M белых, а остальные черные. Из урны вынимается n шаров. Требуется найти вероятность того, что среди извлеченных шаров будет ровно m белых. Случайная величина X – число белых шаров среди извлеченных из урны. Математическое ожидание и дисперсия в случае гипергеометрического распределения определяются формулами

$$M[X]=n\frac{M}{N}, \quad D[X]=n\frac{M}{N-1}\frac{(N-M)(N-n)}{N^2}.$$

Следующий рисунок иллюстрирует многоугольники гипергеометрических законов распределения для схемы с параметрами N=100, n=20 и двух возможных M 5 и 10.



Пример 1. Производится 3 независимых выстрела по цели. Вероятность попадания при разных выстрелах одинакова и равна p=0,9. Найти математическое ожидания и дисперсию числа попаданий в мишень.

Решение. С.в. X имеет биноминальное распределение. Здесь n=3, p=0.9, q=0,1. Находим

$$M[X] = np = 3\cdot 0{,}9 = 2{,}7, \quad D[X] = npq = 3\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1 = 0{,}27.$$

Пример 2. В группе из 21 студентов 5 девушек. Из этой нее наудачу отбираются три студента. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа девушек попавших в выборку.

Решение. С.в. X – число девушек в выборке, распределена по гипергеометрическому закону с параметрами N=21, M=5, n=3. Тогда

$$M[X] = n\frac{M}{N} = 3\frac{5}{21} = \frac{5}{7},\ D[X] = n\frac{M}{N-1}\frac{(N-M)(N-n)}{N^2} = 3\frac{5}{20}\frac{16\cdot 18}{21^2} = \frac{24}{21^2},$$

$$\sigma = \sqrt{D[X]} = \frac{2\sqrt{6}}{21}.$$

13.1. Вероятность выигрыша по лотерее равна 0,1. Составить закон распределения числа выигравших билетов среди приобретенных 19. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду этой случайной величины.

13.2. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна 0,002. Необходимо: а) составить закон распределения отказавших за время t элементов; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины; в) определить вероятность того, что за время t откажет хотя бы один элемент.

13.3. Вероятность поражения цели равна 0,05. Производится стрельба по цели до первого попадания. Необходимо: а) составить закон распределения числа сделанных выстрелов; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины; в) определить вероятность того, что для поражения цели потребуется не менее 5 выстрелов.

13.4. В магазине имеются 20 телевизоров, из них 7 имеют дефекты. Необходимо: а) составить закон распределения числа телевизоров с дефектами среди выбранных наудачу пяти; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины; в) определить вероятность того, что среди выбранных нет телевизоров с дефектами.

13.5. Аполлон Митрофанович очень любит ходить в казино, и если он туда зашёл, то не выходит, пока на рулетке не выпадет «зеро» (то есть число «ноль»). Каждый раз Аполлон Митрофанович ставит пять рублей на «зеро» и по одному рублю на «29» и на «32». После этого крупье вращает колесо рулетки, и шарик указывает на одно из чисел от 0 до 36. В случае, когда шарик указывает на число, соответствующее некоторой ставке Аполлона Митрофановича, последний получает свою ставку и выигрыш, в 35 раз больший, чем эта ставка, а те ставки Аполлона Митрофановича, которые не соответствуют выпавшему числу, теряются. Сколько раз играет в среднем Аполлон Митрофанович? Каков его средний выигрыш?

13.6. Пивной завод отправил в магазин 400 ящиков пива. Вероятность того, что ящик будет разбит при транспортировке в данных условиях, равна 0,005. По приезде в магазин экспедитор, перевозивший груз, заявил, что семь ящиков с пивом были разбиты при транспортировке. Размышляя, можно ли доверять экспедитору, директор магазина хочет найти вероятность разбить семь ящиков, вероятность разбить не менее семи ящиков, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение количества ящиков, разбитых при транспортировке, чтобы оценить возможность потерь, заявленных экспедитором.

13.7. В лотерее «Спортлото 6 из 45» денежные призы получают участники, угадавшие 3, 4, 5 и 6 видов спорта из отобранных случайно 6 видов из 45 (размер приза увеличивается с увеличением числа угаданных видов спорта). Найти закон распределения случайной величины X — числа угаданных видов спорта среди случайно отобранных шести. Какова вероятность получения денежного приза? Найти математическое ожидание и дисперсию X.

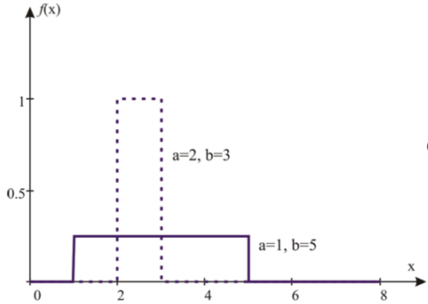
§ 14. Основные законы распределения непрерывных случайных величин

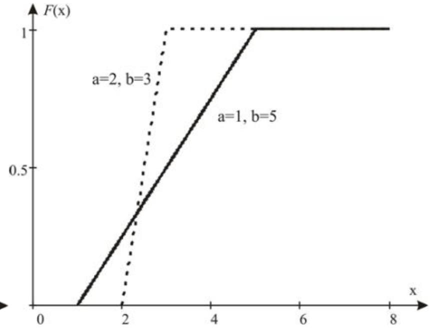
Равномерный закон распределения. Непрерывная с.в. X имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{при } x\in[a,b],\\ 0, & \text{при } x\notin[a,b].\end{cases}$$

Имеем следующие формулы для характеристик распределения:

$$M[X]=\frac{a+b}{2},\quad D[X]=\frac{(b-a)^2}{2}.$$



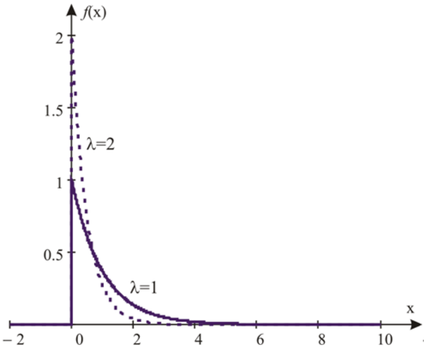


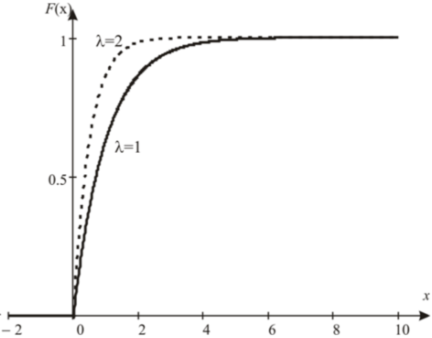
Показательный закон распределения. Непрерывная с.в. X имеет показательный (или экспоненциальный) закон распределения, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x\ge 0,\\ 0, & \text{при } x<0,\end{cases}$$

где $\lambda>0$ – параметр распределения. Математическое ожидание и дисперсия определяются выражениями

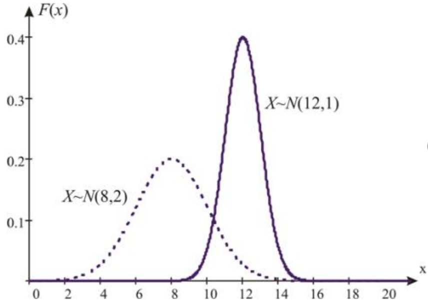
$$M[X]=\frac{1}{\lambda},\quad D[X]=\frac{1}{\lambda^2}.$$

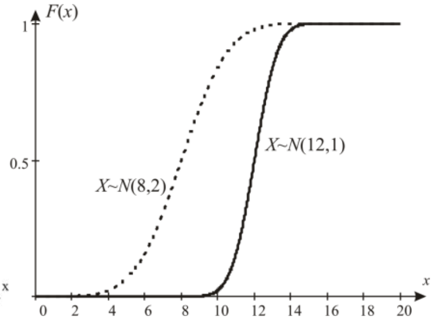




Нормальный закон распределения. Непрерывная с.в. X распределена по нормальному закону (закону Гаусса) с параметрами a и $\sigma > 0$, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in (-\infty, \infty).$$





Для таких величин a – математическое ожидание, σ – среднее квадратичное отклонение. График плотности вероятности нормального закона представлен на рисунку, называемый нормальной кривой или кривой Гаусса.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал (x_1, x_2) определяется по формуле Лапласа

$$P(x_1 < x < x_2) = \Phi_0\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – нормированная функция Лапласа. Значения функции Лапласа даны в таблице (Приложение 2).

Нормальному закону подчиняются ошибки измерений, рост человека, величина шума в радиоприемном устройстве, колебания курса акций, величина износа деталей в механизмах и т.д.

Пример 1. Случайная величина X – время работы радиолампы имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что лампа проработает не менее 800 часов, если среднее время работы радиолампы 400 часов.

Решение. Из условия задачи имеем $M[X]=400$, тогда $\lambda=1/400$. Искомая вероятность, находится по формуле

$$P\{800<X<\infty\}=\int_{800}^{\infty} f(x)dx=\int_{800}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{800}^{\infty}=e^{-800\lambda}=e^{-2}\approx 0{,}135$$

.

Пример 2. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиняющеюся нормальному закону распределения, с гарантией на 15 лет и средним квадратичным отклонением 3 года. Определить вероятность того, что прибор прослужит от 10 до 20 лет.

Решение. По условию задачи $a=15$, $\sigma=3$, $x_1=10$, $x_2=20$. Требуется найти $P(10<x<20)$. Применяя формулу Лапласа, получим

$$P(10<x<20)=\Phi_0\left(\frac{20-15}{3}\right)-\Phi_0\left(\frac{10-15}{3}\right)=2\Phi_0\left(\frac{5}{3}\right).$$

Из таблицы функции Лапласа находим, что $\Phi_0(1{,}67)=0{,}4525$. Следовательно $P(10<x<20)=0{,}905$.

Пример 3. Определить среднею квадратичную ошибку прибора, если систематических ошибок он не имеет, а случайные распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не превышают по абсолютному значению 20 метров.

Решение. Из условия задачи следует, что $P(-20<x<20)=0{,}8$ и $a=0$. Тогда можно записать следующие равенство:

$$P(-20<x<20)=\Phi_0\left(\frac{20}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{-20}{\sigma}\right)=2\Phi_0\left(\frac{20}{\sigma}\right)=0{,}8$$

.

Следовательно $\Phi_0\left(20/\sigma\right)=0,4$. Воспользовавшись таблицей, получаем

$$\frac{20}{\sigma}=1,2815 \Rightarrow \sigma=\frac{20}{1,2815}\approx 15,607$$

14.1. Случайная величина распределена равномерно в интервале от 0 до 100. Найти вероятности $P\{X > 10\}$, $P\{40 < X < 90\}$, $P\{X = 50\}$, а также математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Найти вероятность p того, что сумма значений случайной величины X в двух независимо проведённых опытах превысит 80 (решить графически).

14.2. При выяснении причин недостачи драгоценных металлов в ювелирном магазине установлено, что их взвешивание производится на весах, цена деления которых равна 0,1 г, а показания весов округляются при взвешивании до ближайшего деления их шкалы, причём округления на любые значения от – 0,05 до 0,05 равновероятны. Оценить возможность возникновения ошибки более, чем на 0,03 г, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение потерь.

14.3. Длительность времени X безотказной работы элемента имеет экспоненциальное распределение с параметром λ= 0,02$ч^{-1}$. Вычислите вероятность того, что за время t=100 ч элемент: а) выйдет из строя; б) будет исправно работать.

14.4. Среднее время безотказной работы прибора равно 80 ч. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти: а) выражение его плотности вероятности и функции распределения; б) вероятность того, что в течение 100 ч прибор не выйдет из строя.

14.5. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции: а) не выше 15,3 ден. ед.; б) не ниже 15,4 ден. ед.; в) от 14,9 до 15,3 ден. ед.

14.6. Цена некой ценной бумаги нормально распределена. В течение последнего года 20% рабочих дней она была ниже 88 ден. ед., а 75% — выше 90 ден. ед. Найти: а) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение цены ценной бумаги; б) вероятность того, что в день покупки цена будет заключена в пределах от 83 до 96 ден. ед.; в) с надежностью 0,95 определить максимальное отклонение цены ценной бумаги от среднего (прогнозного) значения (по абсолютной величине).

3. Элементы математической статистики

§ 15 Первоначальные понятия математической статистики

Совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех мыслимых наблюдений, производимых в независимых условиях над одним объектом, называется *генеральной совокупностью.*

Выборочной совокупностью (*выборкой*) называется совокупность объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности. Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлечена выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ объема n. Наблюдаемые значения x_i признака X называются *вариантами,* а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, - *вариационным рядом. Размахом выборки* называют число, равное разности между наибольшим и наименьшим вариантами ряда:

$$R = x_{\max} - x_{\min} .$$

Числа n_i, показывающие сколько раз встречаются варианты x_i в ряде, называются *частотами*. Сумма всех частот равна объему выборки n. *Относительная частота* вычисляется по формуле

$$p_i^* = \frac{n_i}{n} .$$

Сумма всех относительных частот равна единице.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им *частот* n_i или относительных частот p_i^*.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2), …, (x_k, n_k).

В случае, когда число вариантов x_i велико или признак является непрерывным (то есть когда случайная величина может принимать любое значение в некотором варианте), составляют *интервальный статистический ряд.* В первую строчку таблицы распределения вписывают частичные промежутки $[x_0, x_1)$, $[x_1, x_2)$, …, $[x_{k-1}, x_k)$, имеющие одинаковую длину $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_k - x_{k-1}$. Для определения значения длины интервала обычно используется формула Стерджеса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n},$$

где $x_{\max} - x_{\min}$ - размах выборки, $m = 1 + \log_2 n$ - число интервалов. За начало первого интервала рекомендуется брать число $x_{нач} = x_{\min} - 0.5h$. Во второй строчке статистического ряда вписывают количество наблюдений n_i, попавших в соответствующий интервал.

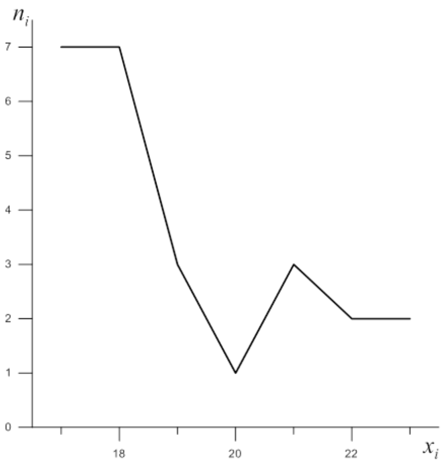
Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длинной h, а высоты равны отношению n_i / h (плотность частот).

Пример 1. Путем опроса получены следующие данные о возрасте (число полных лет) 25 студентов первого курса: 18, 21, 19, 18, 17, 23, 18, 17, 19, 17, 22, 18, 17, 17, 21, 18, 23, 17, 22, 18, 21, 20, 19, 18, 17. Составить статистическое распределение студентов по возрасту. Найти размах выборки. Построить полигон частот и составим ряд распределения относительных частот.

Решение. Используя исходные данные, составим статистическое распределение выборки. Наименьший возможный вариант – 17, который встречается в наблюдаемом ряде 7 раз. Аналогично найдем частоты для всех остальных вариант.

x_i	17	18	19	20	21	22	23
n_i	7	7	3	1	3	2	2

Тогда размах выборки будет: $R = 23 - 17 = 6$. Чтобы построить полигон частот, отложим на оси абсцисс возможные значения признака x_i и из полученных точек восставим перпендикуляры высотой n_i. После этого последовательно соединим концы перпендикуляров отрезками.



Найдем относительные частоты значения признака *X*, разделив частоты на объем выборки (*n*=25). Затем составим ряд распределения относительных частот:

x_i	17	18	19	20	21	22	23
p_i^*	0,28	0,28	0,12	0,04	0,12	0,08	0,08

Пример 2. Измерили рост (с точностью до см).30 наудачу отобранных студентов. Результаты измерений таковы: 178, 160, 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155, 157, 175, 175, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169, 179, 165, 156, 179, 158, 171, 175, 173, 164, 172. Составить вариационный и статистический ряд распределения, построить гистограмму относительных частот

Решение: В данной задаче рост человека X – непрерывная случайная величина. Для удобства обработки данных проранжируем данные измерений:

153, 154, 155, 155, 156,157,158,159,160,163,164,165, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 171, 172, 173, 173, 175, 175, 178, 179, 179, 182, 183, 186.

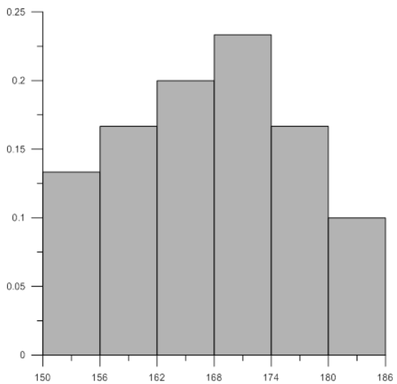
Найдем x_{min}=153, x_{max}=186, тогда по формуле Стерджеса вычислим длину интервалов и их количество

$$h = \frac{186-153}{1+\log_2 30} \approx 5.59,\ m = 1+\log_2 30 \approx 5,9.$$

Округлим значения до целых чисел, получаем h=6, m=6. Тогда $x_{нач}$=153-6/2=150. Далее составляем интервальный статистический ряд в виде таблицы, посчитав число студентов, попавших в каждый из полученных промежутков

Рост	[150-156)	[156-162)	[162-168)	[168-174)	[174-180)	[180-186)
Частота	4	5	6	7	5	3

Далее построим гистограмму частот, отложив по оси абсцисс интервалы, а по оси ординат соответствующие плотности частот.



15.1. Из 280 контрольных работ по математике 70 работ оценено на отлично». Найдите относительную частоту контрольных работ, оцененных на «отлично».

15.2. По цели произведено 40 выстрелов. Относительная частота попаданий в мишень оказалась равной 0,85. Найдите число попаданий в мишень.

15.3. Постройте полигон относительных частот по данным распределения студентов 1 курса по размерам обуви:

Размер обуви	35	36	37	38	39	40	41	42
Число студентов	3	5	6	13	10	7	4	2

15.4. Дана исходная таблица распределения тридцати абитуриентов по числу баллов, полученных ими на вступительных экзаменах: 12, 18, 12, 14, 15, 15, 19, 13, 16, 12, 20, 19, 13, 17, 13, 17, 14, 15, 12, 13, 16, 16, 16, 15, 15, 18, 13, 14, 16, 17. Построить статистическое распределение абитуриентов по числу полученных баллов. Найти размах выборки. Построить полигон частот.

15.5. Подбросьте 100 раз монету и найдите, сколько раз она упадет вверх гербом. Найдите относительную частоту появления этого события и сравните ее с вероятностью появления герба.

15.6. Подбросьте 100 раз игральную кость и найдите относительные частоты следующих событий: а) выпадение двух очков, б) выпадение шести очков, в) выпадение четного числа очков, г) выпадение числа очков, кратного трем. Сравните полученные относительные частоты с вероятностями появления этих событий.

15.7. Выберите отрывок текста, содержащий 200 букв. Найдите относительную частоту появления: 1) гласной буквы, 2) буквы «к», 3) буквы «а».

15.8. Имеются данные о количестве студентов в 30 группах физико-математического факультета: 26, 25, 25, 26, 25, 23, 23, 24,19, 23, 20, 19, 22, 24, 24, 23, 20, 23, 24, 19, 21, 18, 21, 18, 20, 18, 18, 21, 15, 15. Найдите вариационный и статистический ряды количества студентов в группах и размах варьирования.

15.9. Данные о посевных площадях картофеля (тыс. гектаров) в сельских хозяйствах области по районам следующие: 1.5, 1.5, 0.6, 1.3, 0.9, 0.9, 0.6, 1.3, 1.1, 0.6, 1.1, 0.9, 1.6, 1.3, 0.8, 0.4, 1.1. Найдите статистический ряд распределения посевных площадей и постройте гистограмму частот.

§ 16. Точечные оценки

Статистической оценкой Q^* неизвестного параметра Q теоретического распределения называют всякую функцию $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ от наблюдаемых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, с помощью которой судят о значении параметра Q.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $Q^* = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ – результаты n наблюдений над количественным признаком X (выборка).

Несмещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оценочному параметру при любом объеме выборки.

Несмещенной оценкой математического ожидания служит выборочная средняя

$$\overline{x}_в = \left(\sum_{i=1}^{n} n_i x_i \right) / n ,$$

где x_i – варианта выборки, n_i –частота варианты x_i, n – объем выборки. Если варианты выборки x_i – большие числа, то для упрощения расчетов целесообразно воспользоваться следующей формулой

$$\overline{x}_в = C + \left(\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - C) \right) / n ,$$

где C – произвольное число близкое в выборочной средней.

Смещенной оценкой дисперсии служит выборочная дисперсия

$$D_в = \left(\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x}_в)^2 \right) / n .$$

Более удобна формула

$$D_в = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i x_i}{n} \right]^2 .$$

Несмещенной оценкой дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x}_в)^2}{n-1} .$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле

$$s = \sqrt{S^2} .$$

Для небольших выборок, когда частота каждой варианты x_i равна единицы, расчетные формулы имеют вид

$$\overline{x}_в = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) / n , \; D_в = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_в)^2 \right) / n .$$

В случае интервального статистического ряда в качестве вариант выступают середины соответствующих интервалов.

Пример 1. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92, 94, 103, 105, 106. Найти: а) выборочную среднюю длину стержня; б) выборочную исправленную

Решение. а) Найдем выборочную среднюю, воспользовавшись вспомогательной формулой с произвольной константой $C = 92$

$$\overline{x}_в = 92 + \left(0 + 2 + 11 + 13 + 14\right) / 5 = 92 + 8 = 100.$$

б) Найдем выборочную дисперсию

$$D_в = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_в)^2 \right) / n = \left[\left(92 - 100\right)^2 + \left(94 - 100\right)^2 + \left(103 - 100\right)^2 \right] / 5 +$$

$$+ \left[\left(105 - 100\right)^2 + \left(106 - 100\right)^2 \right] / 5 = 170 / 5 = 34.$$

Найдем исправленную дисперсию:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{5}{4} \cdot 34 = 42.5$$

Пример 2. Ниже приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных ста студентов.

Рост	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов.

Решение. Воспользуемся вышеприведенной формулой, при этом в качестве вариант возьмем середины соответствующих интервалов, найдем выборочную среднюю:

$\overline{x}_в = (10\cdot 156 + 14\cdot 160 + 26\cdot 164 + 28\cdot 168 + 12\cdot 172 + 8\cdot 176 + 2\cdot 180)/100 =$
$= 16600/100 = 166.$

Аналогичным образом найдем выборочную дисперсию

$$D_в = \left[10(156-166)^2 + 14(160-166)^2 + 26(164-166)^2\right]/100 +$$
$$+\left[28(168-166)^2 + 12(172-166)^2 + 8(176-166)^2 + 2(180-166)^2\right]/100 =$$
$$= 3344/100 = 33.44$$

16.1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 60$:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Найти несмещенную оценку несмещенной средней.

16.2. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объема $n = 20$:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

16.3. В итоге четырех измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 8; 9; 11; 12. Найти: а) выборочную среднюю результатов измерений; б) выборочную и исправленную дисперсию ошибок прибора.

16.4. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 50$

x_i	0.1	0.5	0.6	0.8
n_i	5	15	20	10

16.5. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 100$

x_i	1250	1275	1280	1300
n_i	20	25	50	5

§17. Интервальные оценки

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал, который с заданной надежностью γ покрывает заданный параметр. Для симметричного доверительного интервала шириной 2ε выполняется условие

$$P\{|\theta-\theta^*|\le\varepsilon\}=\gamma ,$$

где θ^* – оценка параметра θ, а вероятность определяется законом распределения.

1. Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $\overline{x}_в$ при *известном* среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\overline{x}_в - t\sigma/\sqrt{n} < a < \overline{x}_в + t\sigma/\sqrt{n}$$

где $t\sigma/\sqrt{n}$ – точность оценки, n – объем выборки, t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$ (см. приложение 2), при котором $\Phi(t)=\gamma/2$; при *неизвестном* σ (и объеме выборки n<30)

$$\overline{x}_в - t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}$$

где s – «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение, t_γ – квантиль порядка γ распределения Стьюдента с n степенями свободы, находятся по таблице приложения 3.

2. Интервальной оценкой (с надежностью γ) среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака X по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s служит доверительный интервал

$$\sqrt{n-1}\cdot s/\chi_1 < \sigma < \sqrt{n-1}\cdot s/\chi_2,$$

где χ_1^2 и χ_2^2 – квантили χ^2 - распределения с n-1 степенями свободы порядка $(1-\gamma)/2$ и $(1+\gamma)/2$ соответственно, находится по таблице приложения 4.

Пример 1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma=5$, выборочная средняя $\overline{x}_в=14$ и объем выборки n=25.

Решение. Требуется найти доверительный интервал при известном среднем квадратическом отклонении. Все величины, кроме t, известны. Найдем t из соотношения $\Phi(t)$=0,95/2. По таблице приложения 2 получаем t=1,96. Подставив t, $\overline{x}_в$, σ, n в формулу окончательно получим искомый доверительный интервал $12{,}04<a<15{,}96$.

Пример 2. Произведено 11 равноточных измерений постоянной величины: 9.9, 12.5, 10.3, 9.2, 6, 10.9, 10.3, 11.8, 11.6, 9.8, 14. Ошибки измерений распределены по нормальному закону, систематические ошибки отсутствуют. Определить оценку измеряемой величины и доверительные границы с надежностью 0.99.

Решение. Выборочную среднюю и «исправленное» среднее квадратическое отклонение найдем соответственно по формулам:

$$\overline{x}_в=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)/\,n=10.57,\quad s=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_в)^2/(n-1)}=\sqrt{\frac{4.21}{10}}=2.05.$$

Найдем t_γ. Пользуясь таблицей приложения 3, по γ=0,99 и n=11 находим t_γ=3,17. Найдем искомый доверительный интервал:

$$10.57-3.17\frac{2.05}{\sqrt{11}}<a<10.57+3.17\frac{2.05}{\sqrt{11}}\Rightarrow 8.61<a<12.53.$$

Пример 3. По данным выборки объема n=16 из генеральной совокупности найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение s=1 нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение а с надежностью 0,95.

Решение. По данным γ=0,95 и $n=16$ по таблице приложения 4 найдем квантили χ_1=5,243 и χ_1=2,502. Воспользовавшись формулой, получим искомый доверительный интервал

$$\frac{\sqrt{16-1}\cdot 1}{5.243}<\sigma<\frac{\sqrt{16-1}\cdot 1}{2.502}\Rightarrow 0.739<\sigma<1.548.$$

17.1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\overline{x}_в$ и объем выборки n: а) $\sigma=4$, $\overline{x}_в=10.2$, $n=16$; б) $\sigma=5$, $\overline{x}_в=16.8$, $n=25$.

17.2. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась равной 1000 ч.

Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности a горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы 40ч. Предполагается, что продолжительность горения ламп распределена нормально.

17.3. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,95 точность оценки математического ожидания a генеральной совокупности по выборочной средней равна ε=0,3, если известно среднее квадратическое отклонение σ=1,2 нормально распределенной генеральной совокупности.

17.4. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x}_в = 30.1$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение s=6. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью γ=0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

17.5. Произведено 12 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем «исправленное» среднее квадратическое отклонение s случайных ошибок измерений оказалось равным 0,6. Найти точность прибора с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

17.6. Проводится пять независимых равноточных измерений для определения заряда электрона. Опыты дали следующие результаты (в абсолютных электростатических единицах):

$$4.781\cdot10^{-10}, 4.792\cdot10^{-10}, 4.795\cdot10^{-10}, 4.779\cdot10^{-10}, 4.769\cdot10^{-10}.$$

Определить оценку величины заряда электрона и доверительные границы при доверительной вероятности 99% считая, что ошибки нормальны и измерения не имеют систематических ошибок.

17.7. Проведены 11 измерений постоянной величины. Получены следующие результаты: 9.9, 12.5, 10.3, 9.2, 6, 10.9, 10.3, 11.8, 11.6, 9.8. 14. Ошибки измерений распределены по нормальному закону, систематическая ошибка отсутствует. Определить а) оценки измеряемой величины и среднего квадратического отклонения; б) доверительные границы при доверительной вероятности 95%.

17.8. Составьте вариационный ряд величины роста студентов, обучающихся в вашей группе. Найдите выборочную среднюю и доверительный интервал с надежностью 0,9.

§18. Проверка статистических гипотез

Введем ряд основных определений.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Нулевой (*основной*) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (*альтернативной*) называют гипотезу H_1 которая противоречит нулевой.

В итоге проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки первого рода называют *уровнем значимости* и обозначают через α.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают через β.

Статистическим критерием (или просто *критерием*) называют случайную величину χ, которая служит для проверки гипотезы.

Наблюдаемым (*эмпирическим*) значением $\chi_{набл}$ называют то значение критерия, которое вычислено по выборкам.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (*областью допустимых значений*) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отвергают; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу принимают.

Одной из важнейших задач математической статистики является установление теоретического закона распределения случайной величины, характеризующей изучаемый признак по опытному (эмпирическому) распределению, представляющему вариационный ряд. Для решения этой задачи необходимо определить вид и параметры закона распределения.

Предположение о виде закона распределения может быть выдвинуто исходя из теоретических предпосылок опыта аналогичных предшествующих исследований и на основании графического изображения эмпирического распределения. Параметры распределения, как правило, неизвестны, поэтому их заменяют оценками по выборке.

Как бы хорошо ни был подобран теоретический закон распределения, между эмпирическим и теоретическим распределениями неизбежны расхождения. Естественно возникает вопрос: объясняются ли эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что теоретический закон распределения подобран неудачно. Для ответа на этот вопрос и служат *критерии согласия*.

Пусть необходимо проверить нулевую гипотезу H_0 том, что исследуемая случайная величина X подчиняется определенному закону распределения. Для проверки гипотезы H_0 выбирают некоторую случайную величину U, характеризующую степень расхождения теоретического и эмпирического распределений, закон распределения которой при достаточно больших n известен и практически не зависит от закона распределения случайной величины X.

Зная закон распределения U, можно найти вероятность того, что U приняла значение не меньше, чем фактически наблюдаемое в опыте u, т.е. $U>u$. Если $P\{U>u\}=\alpha$ мала, то это означает, что такие, как в опыте, и большие отклонения практически невозможны. В этом случае гипотезу H_0 отвергают. Если же вероятность $P\{U>u\}=\alpha$ не мала, расхождение между эмпирическим и теоретическим распределениями несущественно и гипотезу H_0 можно считать правдоподобной или по крайней мере не противоречащей опытным данным.

χ^2-критерий Пирсона. В наиболее часто используемом на практике критерии χ^2-Пирсона в качестве меры расхождения U берется величина, равная сумме квадратов отклонений частостей (статистических вероятностей) w_i, от гипотетических p_i, рассчитанных по предполагаемому распределению, взятых с некоторыми весами

$$U=\chi^2=\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(n_i-np_i\right)^2}{np_i},$$

которая имеет χ^2 -распределение с $k=m-r-1$ степенями свободы, где m – число интервалов эмпирического распределения (вариационного ряда); r – число параметров теоретического распределения, вычисленных по экспериментальным данным. Числа $n_i=nw_i$ и np_i называются соответственно эмпирическими и теоретическими частотами.

Замечание. Малочисленные частоты ($n_i<5$) следует объединить; в этом случае и соответствующие им теоретические частоты также надо сложить. Если производилось объединение частот, то при определении числа степеней свободы следует принять число групп выборки, оставшихся после объединения частот.

Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.

Задано эмпирическое распределение дискретной случайной величины *X*. Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.

Указания. Для того чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о том, что случайная величина *X* распределена по закону Пуассона, надо:

1. Найти по заданному эмпирическому распределению выборочную среднюю $\overline{x}_в$.

2. Принять в качестве оценки параметра λ распределения Пуассона выборочную среднюю $\lambda = \overline{x}_в$.

3. Найти по формуле Пуассона вероятности p_i появления ровно i событий в n испытаниях.

4. Найти теоретические частоты по формуле $n_i' = np_i$.

5. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона, приняв число степеней свободы $k = m - 2$.

Пример 1. Отдел технического контроля проверил n=200 партий одинаковых изделий и получил следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i нестандартных изделий в одной партии; во второй строке – частота n_i, т. е. количество партий, содержащих x_i нестандартных изделий);

x_i	0	1	2	3	4
n_i	116	56	22	4	2

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что число нестандартных изделий *X* распределено по закону Пуассона.

Решение. 1. Найдем выборочную среднюю:

$$\overline{x}_в = \left(\sum n_i x_i\right) / n = (116 \cdot 0 + 56 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4) / (116 + 56 + 22 + 4 + 2)$$
$$= 120 / 200 = 0.6$$

2. Примем в качестве оценки параметра λ распределения Пуассона выборочную среднюю: $\lambda = 0.6$. Следовательно, предполагаемый закон Пуассона имеет вид

$$p_i = (0.6)^i e^{-0.6} / i!.$$

3. Положив i=0, 1, 2, 3, 4, найдем вероятности p_i появления i нестандартных изделий в 200 партиях:

$$p_0 = (0.6)^0 e^{-0.6} / 0! = 0.5488,\ p_1 = (0.6)^1 e^{-0.6} / 1! = 0.3293,$$

$$p_2 = (0.6)^2 e^{-0.6} / 2! = 0.0988,\ p_3 = (0.6)^3 e^{-0.6} / 3! = 0.0198,$$

$$p_4 = (0.6)^4 e^{-0.6} / 4! = 0.0030.$$

4. Найдем теоретические частоты по формуле $n_i' = np_i = 200 p_i$. Подставив в эту формулу найденные в п. 3 значения вероятностей p_i, получим

$$n_0' = 109.76, \quad n_1' = 65.86, \quad n_2' = 19.76, \quad n_3' = 3.96, \quad n_4' = 0.60.$$

5. Сравним эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого составим расчетную таблицу. При этом объединим малочисленные частоты (4+2=6) и соответствующие им теоретические частоты (3,96+0,60=4,56).

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2 / n_i'$
0	116	109.76	6.24	38.9376	0.3548
1	56	65.86	-9.86	97.2196	1.4762
2	22	19.76	2.24	5.0176	0.2539
3	6	4.56	1.44	2.0736	0.4547
Σ	200				$\chi_{набл}$=2.54

Из расчетной таблицы находим наблюдаемое значение критерия Пирсона: $\chi_{набл}$=2,54.

По таблице критических точек распределения χ^2(см. приложение 5), по уровню значимости α=0,05 и числу степеней свободы $k = 4 - 2$ находим критическую точку критической области: $\chi_{кр}$(0.05;2)= 5.99.

Так как $\chi_{набл} < \chi_{кр}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении случайной величины X по закону Пуассона.

Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по биномиальному закону

Произведено n опытов. Каждый опыт состоит из N независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же. Регистрируется число появлений события A в каждом опыте. В итоге получено следующее распределение дискретной случайной величины – числа появлений события A (в первой строке указано число x_i появлений события A в одном опыте; во второй строке – частота n_i, т. е. число опытов, в которых зарегистрировано x_i появлений события A):

x_i	0	1	2	…	N
n_i	n_0	n_1	n_2	…	n_N

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о распределении дискретной случайной величины *X* по биномиальному закону.

Указания. Для того чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о том, что дискретная случайная величина *X* (число появлений события *A*) распределена по биномиальному закону, надо:

1. Найти сначала относительную частоту появления события *A* по формуле

$$p^* = \frac{\overline{x}_в}{N}$$

и принять ее в качестве оценки вероятности события *A*.

2. Найти по формуле Бернулли вероятности p_i (появления ровно *i* событий *A* в *N* испытаниях (*i*=0, 1, 2, …, *s*, где s – максимальное число наблюдавшихся появлений события А в одном опыте, т.е. $s \le N$).

3. Найти теоретические частоты $n_i' = np_i$, где *n*—число опытов.

4. Сравнить эмпирические и теоретические частоты по критерию Пирсона, приняв число степеней свободы $k = s - 2$.

Пример 2. Отдел технического контроля проверил *n*=100 партий изделий по *N*=10 изделий в каждой партии и получил следующее эмпирическое распределение дискретной случайной величины *X* – числа нестандартных изделий (в первой строке указано число x_i нестандартных изделий в одной партии; во второй строке – частота n_i, т. е. количество партий, содержащих x_i нестандартных изделий):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	3	10	22	26	20	12	5

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что случайная величина X распределена по биномиальному закону.

Решение. 1.Найдем выборочную среднюю и относительную частоту:

$$\overline{x}_в = \left(\sum n_i x_i\right)/n = (2\cdot 0 + 3\cdot 1 + 10\cdot 2 + 22\cdot 3 + 26\cdot 4 + 20\cdot 5 + 12\cdot 6 + 5\cdot 7)/$$

$$(2+3+10+22+26+20+12+5) = 400/100 = 4,$$

$$p^* = \frac{\overline{x}_в}{N} = \frac{4}{10}.$$

2. По формуле Бернулли

$$p_i = P_N(i) = C_N^i p^i (1-p)^{N-i}$$

найдем вероятность p_i, (i=0, 1, 2, 3, 4, 5) того, что событие A появится в N=10 испытаниях ровно i раз.

Учитывая, что p=0.3, q=1-0,3=0.7, получим: $p_0 = 0.006$, $p_1 = 0.040$, $p_2 = 0.121$, $p_3 = 0.215$, $p_4 = 0.251$, $p_5 = 0.201$, $p_6 = 0.111$, $p_7 = 0.042$, $p_8 = 0.011$, $p_9 = 0.001$,. $p_{10} = 0.0001$.

2. Найдем теоретические частоты $n_i' = np_i$. Учитывая, что n=100, получим:

$n_0' = 0.604$, $n_1' = 4.031$, $n_2' = 12.093$, $n_3' = 21.499$, $n_4' = 25.082$, $n_5' = 20.066$, $n_6' = 11.148$, $n_7' = 4.428$, $n_8' = 1.061$, $n_9' = 0.157$,. $n_{10}' = 0.010$.

3. Сравним эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого составим расчетную таблицу. Поскольку частота n_0 малочисленная (меньше пяти), объединим ее с частотой n_1 и в таблицу запишем 2+3=5; в качестве теоретической частоты, соответствующей объединенной частоте 5, запишем сумму соответствующих теоретических частот: 0.604+4.031=4.635. Аналогичным образом объединим частоты n_7, n_8, n_9, n_{10}.

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2 / n_i'$
1	5	4.635	-0	0.133	0.032
2	10	16.729	1.729	2.989	0.362
3	22	21.499	-0.501	0.251	0.012
4	26	25.082	-0.092	0.842	0.033
5	20	20.066	0.066	0.04	0
	12	11.148	-0.852	0.726	0.065
7	5	5.476	-0.476	0.228	0.041
Σ	100				$\chi_{набл}$=0.543

4. Из расчетной таблицы находим значение критерия: $\chi_{набл}$=2,54.

По таблице критических точек распределения χ^2(см. приложение 5), по уровню значимости α=0,01 и числу степеней свободы $k = 7-2 = 5$ находим критическую точку критической области: $\chi_{кр}$(0.01;5)=15.09.

Так как $\chi_{набл} < \chi_{кр}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении случайной величины X по биноминальному закону.

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона

Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности интервалов (x_i, x_{i+1}) и соответствующих им частот n_i (n_i - сумма частот, которые попали в i-й интервал):

$$\begin{array}{cccc} x_1, x_2 & x_2, x_3 & \cdots & x_s, x_{s+1} \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array}$$

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность X распределена нормально.

Указания. Для того чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, надо:

1. Вычислить выборочную среднюю $\overline{x}_в$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$, причем в качестве вариант x_i* принимают среднее арифметическое концов интервала:

$$x_i* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

2. Вычислить по формуле Лапласа вероятности p_i попадание случайной величины в интервал (x_i, x_{i+1}) (причем наименьшее значение x_1 полагают равным -∞, а наибольшее x_{s+1} равным +∞).

3. Вычислить теоретические частоты $n_i' = np_i$, где n – объем выборки (сумма всех частот).

4. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:

а) составляют расчетную таблицу, по которой находят наблюдаемое значение критерия Пирсона $\chi_{набл}$;

б) по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ (s — число интервалов выборки) находят критическую точку правосторонней критической области $\chi_{кр}(\alpha;k)$

Если $\chi_{набл} < \chi_{кр}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, иначе гипотезу отвергают.

Пример 3. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема n=100, приведенным в таблице.

Границы интервалов	3-8	8-13	13-18	18-23	23-28	28-33	33-38
Частота n_i	6	8	15	40	16	8	7

Решение. 1. Вычислим выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение методом произведений. Для этого перейдем от заданного интервального распределения к распределению равноотстоящих вариант, приняв в качестве варианты x_i* среднее арифметическое концов интервала. В итоге получим распределение:

x_i*	5.5	10.5	15.5	20.5	25.5	30.5	35.5
n_i	6	8	15	40	16	8	7

$$\overline{x}_в = \left(\sum n_i x_i\right)/n = (6\cdot 5.5 + 8\cdot 10.5 + 15\cdot 15.5 + 40\cdot 20.5 + 16\cdot 25.5 +$$

$$+8\cdot 30.5 + 7\cdot 35.5)/(6+8+15+40+16+8+7) = 2070/100 = 20.7,$$

$$D_в = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_в)^2 n_i\right]/n = [(5.5-20.7)^2\cdot 6 + (10.5-20.7)^2\cdot 8 +$$

$$+(15.5-20.7)^2\cdot 15 + (20.5-20.7)^2\cdot 40 + (25.5-20.7)^2\cdot 16 + (30.5-20.7)^2\cdot 8 +$$

$$+(35.5-20.7)^2\cdot 7]/100 = 5296/100 = 52.96.$$

$$\sigma_в = \sqrt{52.96} = 7.28.$$

2. Вычислить по формуле Лапласа вероятности p_i попадание случайной величины в интервал (x_i, x_{i+1})

$$p_i = P(x_i < x < x_{i+1}) = \Phi_0\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}_в}{\sigma_в}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_i - \overline{x}_в}{\sigma_в}\right)$$

где $\Phi_0(x)$ – нормированная функция Лапласа, значения которой даны в таблице (Приложение 2).

$$p_1 = P(-\infty < x < 8) = \Phi_0\left(\frac{8-20.7}{7.28}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty - 20.7}{7.28}\right) = \Phi_0(-1.74) - \Phi_0(-\infty) =$$

$$= -\Phi_0(1.74) + \Phi_0(\infty) = -0.4591 + 0.5 = 0.0409,$$

$$p_2 = P(8 < x < 13) = -\Phi_0(1.06) + \Phi_0(1.74) = -0.3554 + 0.4591 = 0.1037,$$

$$p_3 = P(13 < x < 18) = -\Phi_0(0.37) + \Phi_0(1.06) = -0.1443 + 0.3554 = 0.2111,$$

$$p_4 = P(18 < x < 23) = \Phi_0(0.32) + \Phi_0(0.37) = 0.1255 + 0.1443 = 0.2698,$$

$$p_5 = P(23 < x < 28) = \Phi_0(1) - \Phi_0(0.32) = 0.3413 - 0.1255 = 0.2158,$$

$$p_6 = P(28 < x < 33) = \Phi_0(1.68) - \Phi_0(1) = 0.4545 - 0.3413 = 0.1132,$$

$$p_6 = P(38 < x < \infty) = \Phi_0(\infty) - \Phi_0(1.68) = 0.5 - 0.4545 = 0.0455,$$

3. Найдем теоретические частоты по формуле $n_i' = np_i$.

4. Сравним эмпирические и теоретические частоты, используя критерий Пирсона:

а) вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона. Для этого составим расчетную таблицу.

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2 / n_i'$
1	6	4.09	1.91	3.6481	0.8920
2	8	10.37	-2.37	5.6169	0.5416
3	15	21.11	-6.11	37.3321	1.7684
4	40	26.98	13.02	169.5204	6.2833
5	16	21.58	-5.58	31.1364	1.4428
6	8	11.32	-3.32	11.0224	0.9739
7	7	4.55	2.45	6.0025	1.3192
Σ	100				$\chi_{\text{набл}}$=13.22

б) по таблице критических точек распределения $\chi_{\text{кр}}$, по уровню значимости α=0,05 и числу степеней свободы k=s-3=7-3=4 (s – число интервалов) находим критическую точку правосторонней критической области $\chi_{\text{кр}}(0.05;4)$=9.5. Так как $\chi_{\text{набл}}>\chi_{\text{кр}}$ – отвергаем гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X; другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо. Это означает, что данные наблюдений не согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

18.1. В итоге проверки на нестандартность 200 ящиков консервов получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i - нестандартных коробок консервов в одном ящике; во второй строке – частота n_i, т. е. число ящиков, содержащих x_i коробок нестандартных консервов):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – число нестандартных коробок – распределена по закону Пуассона.

18.2. Для определения засоренности партии семян клевера семенами сорняков было проверено 1000 случайно отобранных проб и получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i семян сорняков в одной пробе; во второй строке – частота n_i, т.е. число проб, содержащих x_i семян сорняков):

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	405	366	175	40	8	4	2

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что случайная величина X (число семян сорняков) распределена по закону Пуассона.

18.3. В результате проверки 500 контейнеров со стеклянными изделиями установлено, что число поврежденных изделий X имеет следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i поврежденных изделий в одном контейнере: во второй строке частота n_i, т. е. число контейнеров, содержащих x_i поврежденных изделий):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что случайная величина Х—число поврежденных изделий — распределена по закону Пуассона.

18.4. На основании 200 донесений, полученных в течение двадцати лет о количестве кавалеристов прусской армии, которые погибли в результате гибели под ними коня, было получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i погибших кавалеристов, указанных в одном донесении; во второй строке—частота n_i, т. е. число донесений, в которых сообщено о гибели x_i кавалеристов):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	109	65	22	3	1

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о распределении случайной величины X (числа погибших кавалеристов) по закону Пуассона.

18.5. В библиотеке случайно отобрано 200 выборок по 5 книг. Регистрировалось число поврежденных книг (подчеркивания, помарки и т. д.). В итоге получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано число x_i поврежденных книг в одной выборке; во второй строке – частота n_i, т. е. количество выборок, содержащих x_i поврежденных книг):

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	72	77	34	14	2	1

Требуется, используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что дискретная случайная величина X (число поврежденных книг) распределена по биномиальному закону.

18.6. Опыт, состоящий в одновременном подбрасывании четырех монет, повторили 100 раз. Эмпирическое распределение дискретной случайной величины X – числа появившихся «гербов» – оказалось следующим (в первой строке указано число x_i выпавших «гербов» в одном бросании монет; во второй строке – частота n_i т. е. число бросаний, при которых выпало x_i «гербов»):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	8	20	42	22	8

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X распределена по биномиальному закону.

18.7. По каждой из 100 мишеней произведено из спортивного пистолета по 10 независимых выстрелов, причем фиксировались только попадания и промахи. Результаты стрельб приведены в таблице.

x_i (число попаданий)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	0	2	4	10	22	26	18	12	4	2	0

Применить, используя критерий χ^2, подчиняются ли результаты стрельб биноминальному закону распределения. Уровень значимости принять 0,05.

18.8. Произведено n=100 опытов. Каждый опыт состоял из N=10 испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события A равна 0,3. В итоге получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано число x_i появлений события A в одном опыте; во второй строке – частота n_i, т. е. число опытов, в которых наблюдалось x_i появлений события A):

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	10	27	32	23	6

Ттребуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что дискретная случайная величина X (число появлений события A) распределена по биномиальному закону.

18.9. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0.05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с заданным эмпирическим распределением.

Границы интервалов	-20:-10	-10:0	0:10	10:20	20:30	30:40	40:50
Частота n_i	20	47	80	89	40	16	8

18.10. В таблице приведены отклонения диаметров валиков, обработанных на станке, от заданного размера.

Границы интервалов	0:5	5:10	10:15	15:20	20:25
Частота n_i	15	75	100	50	10

Проверить, используя критерий χ^2, гипотезу о согласовании наблюдений с законом нормального распределения, приняв уровень значимости равным 0.05.

18.11. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0.05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с заданным эмпирическим распределением.

Границы интервалов	6:16	16:26	26:36	36:46	46:56	56:66	66:76	76:86
Частота n_i	8	7	16	35	15	8	6	5

Материал на самостоятельное изучение

§19. Функции случайных величин

Функция одного случайного аргумента. Если каждому возможному значению случайной величины X по определенному правилу соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют *функцией случайного аргумента* X, записывают $Y=\varphi(X)$.

Пусть X – дискретная случайная величина с возможными значениями $x_1, x_2, ..., x_n$, вероятности которых равны соответственно $p_1, p_2, ..., p_n$, т.е. $p_i = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, ..., n$. $Y=\varphi(X)$ – дискретная случайная величина с возможными значениями $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2), ..., y_n = \varphi(x_n)$, вероятности которых равны соответственно $p_1, p_2, ..., p_n$. Отметим, что различные значения величины X могут соответствовать одинаковым значениям Y. В этом случае вероятности повторяющихся значений следует сложить.

Математическое ожидание и дисперсия $Y=\varphi(X)$ определяются по формулам

$$M[Y] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i, \; D[Y] = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi(x_i) - M[Y]\right)^2 p_i .$$

Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, а случайная величина Y есть функция от X, т.е. $Y=\varphi(X)$. Будем считать функцию $\varphi(X)$ непрерывной строго возрастающей и дифференцируемой в интервале (a,b) всех возможных значений величины X. Тогда существует функция $x = \psi(y)$, обратная функции $y=\varphi(x)$. Тогда функция и плотность распределения случайной величины Y определяются по формулам

$$G(y) = \int_{a}^{\psi(y)} f(x)dx, \; g(y) = f\left(\psi(y)\right) \cdot \psi'(y).$$

Если функция $\varphi(X)$ в интервале (a,b) строго убывает, тогда имеем следующие формулы:

$$G(y) = \int_{\psi(y)}^{b} f(x)dx, \; g(y) = -f\left(\psi(y)\right) \cdot \psi'(y).$$

И, наконец, если функция $\varphi(X)$ немонотонна в интервале (a,b), то для нахождения плотности $g(X)$ следует разбить интервал на k участков монотонности, найти обратную функцию на каждом из них и воспользоваться формулой

$$g(y)=\sum_{i=1}^{k} f\left(\psi_i\left(y\right)\right)\cdot\left|\psi_i'\left(y\right)\right|.$$

Математическое ожидание и дисперсия $Y=\varphi(X)$ определяются по формулам

$$M\left[Y\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x\right)f\left(x\right)dx\,,\quad D\left[Y\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi\left(x\right)-M\left[X\right]\right)^2 f\left(x\right)dx\,.$$

Пример 1. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

x_i	-1	1	2
p_i	0,1	0,3	0,6

Найти математическое ожидание если $Y=X^2$

Решение. Случайная величина Y принимает значения $y_1=\varphi\left(x_1\right)=\left(-1\right)^2=1$, $y_2=\varphi\left(x_2\right)=1^2=1$, $y_3=\varphi\left(x_3\right)=2^2=4$, т.е. она принимает два значения y_1=1 и y_2=4, при чем

$$p_1=P\left\{Y=1\right\}=P\left\{X=-1\right\}+P\left\{Y=1\right\}=0.1+0.3=0.6\,,$$

$$p_2=P\left\{Y=4\right\}=P\left\{X=2\right\}=0.6\,.$$

Следовательно $M\left[Y\right]=1\cdot 0.4+4\cdot 0.6=2.8$.

Пример 2. Пусть случайная величина X имеет равномерное распределение в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Найти математическое ожидание случайной величины $Y=\cos\left(X\right)$, плотность распределения $g(x)$.

Решения. Плотность распределения для случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi},\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right),\\[2ex] 0,\ x\notin\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

В интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ функция $y=\cos(x)$ не монотонна: в $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ – возрастает, $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ – убывает. На первом участке обратная функция $x_1=-\arccos y=\psi_1(y)$, на втором – $x_2=\arccos y=\psi_2(y)$. Далее находим плотность распределения величины *Y* в интервале (0,1) по формуле

$$g(y)=f\left(\psi_1(y)\right)\cdot\left|\psi_1'(y)\right|+f\left(\psi_2(y)\right)\cdot\left|\psi_2'(y)\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right|+\frac{1}{\pi}\left|-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right|=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Тогда в окончательном виде запишем

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}},\ y\in(0;1),\\ 0,\ y\notin(0;1).\end{cases}$$

Математическое ожидание $M[Y]$ можно найти двумя способами:

$$M[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot g(y)dy=\int_0^1 y\cdot\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy=-\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{d\left(1-y^2\right)}{\sqrt{1-y^2}}=-\frac{1}{\pi}2\sqrt{1-y^2}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$$

либо

$$M[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{2}{\pi}.$$

19.1 Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения

x_i	-2	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,25	0,1	0,05

Найти законы распределения случайных величин: а) $Y=2X^2-3$, б) $Y=\sqrt{X+2}$, в) $Y=\sin\frac{\pi}{3}X$.

19.2 Дискретная случайная величина *X* задана рядом распределения

x_i	0	1	2	3
p_i	0,3	0,4	0,2	0,1

Построить многоугольники распределения случайных величин X и $Y = \cos^2 \frac{\pi}{2} X$. Найти $M\left[X\right]$ и σ_Y.

19.3 Найти плотность распределения и дисперсию случайной величины $Y = X + 1$, если $X \sim R\left[-2, 2\right]$.

19.4 Случайная величина $X \sim N\left(0,1\right)$. Найти плотность распределения случайных величин: а) $Y = 3X^3$, б) $Y = \left|X\right|$.

19.5 Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, \textit{при } x \geq 0, \\ 0, \textit{при } x < 0. \end{cases}$$

Найти функцию и плотность распределения случайной величины Y, если а) $Y = 2X - 1$, б) $Y = X^2$.

Ответы

2.1 60, 300. **2.2** 5040. **2.3** 518400. **2.4** 6561. **2.5** 512. **2.6** 112, 2520. **2.7** 56, 6160. **2.8** 135135. **2.9** 84. **2.10** 30. **2.11** 24, 3360. **2.13** 80. **2.14** 56, 336. **2.15** 54190080. **2.16** 7054320. **2.17** 105. **2.18** чисел без единицы чем тех, в записи которых единица есть.

3.1 $4/9$. **3.2** 4/15 **3.3** $1/6^5$. **3.4** $n = \bar{A}_8^4 = 4096$ а) $m = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1680$, $p_1 = \frac{105}{256}$, б) $m = 8$, $p_2 = \frac{1}{512}$, в) $m = 1$, $p_3 = \frac{1}{4096}$. **3.5** а) $p = 4/49$, б) $p = 20/49$. **3.6** $p = \frac{2\cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$. **3.7** $5/14$. **3.8** а) 1/18, б)11/360. **3.9** а) $5/9$, б) $2/9$, в) $7/9$. **3.10** 0,75, 0,29. **3.11** 9/50. **3.12** 4/20. **3.13** 7/9. **3.14** а) 7/24; б) 8/15. **3.15** 7/72. **3.16** 1/6. **3.17** 0,134. **3.18** $p = \dfrac{arctg(h/l)}{\pi}$. **3.19** $p = 1 - \left(1 - \dfrac{2r+d}{a}\right)\left(1 - \dfrac{2r+d}{b}\right)$. **3.20** 0,16, 0,6. **3.21** p=23/27. **3.22** $2l/(\pi a)$. **3.23** $p = \dfrac{1+3\ln 2}{8}$.

4.1 1/180. **4.2** 5/8. **4.3** 0,72. **4.4** ¾. **4.5** 0,94. **4.6** $n \geq 4$. **4.7** $0{,}9^{12}\cdot 0{,}7$. **4.8** $p \approx 0{,}1164$. **4.9** 18/35, 11/35, 6/35.5. **4.10** 1/15. **4.11** 1/6. **4.12** 1/720, 1/1000. **4.13** 1/60, 1/10. **4.14** а) 0,14; б)0,995. **4.15** 0,2. **4.16** независимы.

5.1 11/36. **5.2** 0,3. **5.3** 0,288; 0,936. **5.4** 11/26. **5.5** $2r^2/R^2$. **5.6** $P(A) - P(AB)$; $1 - \dfrac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)}$. **5.7** 93/288. **5.8** 0,1105; 0,1075. **5.9** 2501/6188. **5.10** 0,328. **5.11** ½. **5.12** $n \geq 3$. **5.14** чемпион - отец – чемпион. **5.15** 1/2. **5.16.** 95/144. **5.17** 45/169.

6.1. 8/15. **6.2.** 7/18. **6.3.** 0,5. **6.4.** 5/6. **6.5.** 6/13. **6.6.** 13/132. **6.7.** 0,089. **6.8.** 0,58. **6.9.** 0,89. **6.10.** 0,958. **6.11.** 0,4. **6.12.** $m = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\ln\left(p/(1-p)\right)}{2\ln\left(1-P\right)}$, где m – число извлечений из первой урны. **6.13.** В первом районе 8 вертолетов, 0.74. **6.14.** 0.25.

7.1. 5/32. **7.2.** $p=\dfrac{1}{1+\dfrac{m_2k_2\left(m_1+n_1\right)}{m_1k_1\left(m_2+n_2\right)}}$. **7.3.** 5 бракованных изделий. **7.4.** 0,579, 0,002. **7.5.** 0,214. **7.6.** Ко второй группе. **7.7.** 6/13. **7.8.** 3/29, 8/29. 18/29. **7.9.** В четвертую часть. **7.10.** $p=\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)/\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}+\dfrac{1}{n_3}\right)$. **7.11.** 3/5, 2/5. **7.12.** 4/29. **4.13.** 14/47. **7.14.** 0,039.

8.1 0,185. **8.2** $P_2(4)>P_3(6)$. **8.3** 63/256, 957/1024. **8.4** 0,729, 0,972, 0,973. **8.5** 0,595. **8.6** 0,2. **8.7** $n\geq 11$. **8.8** $n\geq 16$. **8.9.** 0,376. **8.10.** 22. **8.11.** 105. **8.12.** Первая тактика. **8.13.** 0,2276, 0,2422, 6,4%. **8.14.** 0,0726. **8.15.** 0,133. **8.16.** 0,946. **8.17.** 0,224, 0,05, 0,577. **8.18.** 0,104. **8.19.** $\sqrt{\dfrac{2}{N}}\,\varphi\left(m\sqrt{\dfrac{2}{N}}\right)$.

8.20. $\dfrac{1}{3}<q<1$.

9.1. а) 0,72; б) 0,26; в) 0,02; г) 0,98. **9.2.** а) 0,612; б) 0,329; в) 0,056; г) 0,003; д) 0,997. **9.3.** а) 0,006; б) 0,065; в) 0,254; г) 0,423; д) 0,252; е) 0,929. **9.4.** 0,325. **9.5.** а) 0,0024; б) 0,0404; в) 0,2144; г) 0,4404; д) 0,3024.

10.2.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

10.3.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

10.4.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,9	0,09	0,009	0,0009	0,0001

$P\{X<4\}=0{,}999$.

10.5.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

$$F(x)=\begin{cases}0,\ если\ x\le 1;\\ 0{,}1,\ если\ 1<x\le 2;\\ 0{,}19,\ если\ 2<x\le 3;\\ 0{,}271,\ если\ 3<x\le 4;\\ 0{,}3439,\ если\ 4<x\le 5;\\ 1,\ если\ x>5.\end{cases}$$

10.6. а) $p_m=P\{X=m\}=1/2^m$, б) один опыт.

10.7.

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,6	0,2

$P\{X<3\}=0{,}8$.

10.8.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

10.9

x_i	0	1	2	3
p_i	8/65	28/65	24/65	1/13

10.10

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,7	0,21	0,063	0,00189	0,0081

11.1. $x_0\sqrt[\alpha]{2}$. **11.2.** а) $1/e$, б) $\frac{1}{T}\exp\left(-\frac{t}{T}\right)$. **11.3.** а) $\frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$, б) σ, $\sigma\sqrt{\ln 4}$. **11.4.** а) $\frac{mx^{m-1}}{x_0}\exp\left(-\frac{x^m}{x_0}\right)$, б) $\sqrt[m]{-x_0\ln(1-p)}$, в) $\sqrt[m]{\frac{m-1}{m}x_0}$.

11.5. а) e^{-5}, $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t_B}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, где $t_B=\frac{\lg x-\lg x_0}{\sigma}$. **11.6.** а) $b=1/\pi$, $c=1/2$; б) $\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$, в) $\frac{1}{\pi}\left(arctg\frac{\beta}{a}-arctg\frac{\alpha}{a}\right)$. **11.7.** $a=1/\pi$, а) $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctgx$, б) 0,5. **11.8** a=1, p=0.865, $f(x)=\begin{cases}0 & при\ x<0,\\ 2e^{-2x} & при\ x\ge 0.\end{cases}$

12.1. $P(X=6)=0{,}25$, $M[X]=5{,}9$, $D[X]=5{,}79$, $\sigma\approx 2{,}4$. **12.2.** 4. **12.3.** $M[X]=4$, $D[X]=16$. **12.4.** $M[X]\approx 2{,}3$. **12.5.** $M[X]=1{,}2$,

$D[X] = 0,56$. **12.6.** $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 3, \\ 0,8 \text{ при } 3 < x \le 4, \\ 1 \text{ при } x > 4. \end{cases}$

12.7. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 27/64 & 27/64 & 9/64 & 1/64 \end{pmatrix}$, $M[X] = 3/4$, $D[X] = 9/16$.
12.8. $M[X] = a$, $D[X] = l^2/3$. **12.9.** a=0.5, $b = 1/2\pi$, $M[X] = 0$, $D[X] = 1/2$. **12.10.** $M[X] = D[X] = m+1$. **12.11.** $M[X] = 1,5x_0$, $D[X] = 0,75x_0^2$. **12.12.** $M[X] = 0$, $D[X] = 2$.

13.1. $p_m = P\{X = m\} = C_{19}^m p^m q^{19-m}, m = 0,1,...,19$, $M[X] = 1,9$, $D[X] = 1,71$, $\sigma = \sqrt{1,71}$, $M_0 X = 2$. **13.2.** $p_m = P\{X = m\} = 2^m e^{-2} / m!$, $m = 0,1,...,10^3$, $M[X] = 2$, $D[X] = 2$, $p = e^{-2} \approx 0,86$. **13.3.** $p_m = P\{X = m\} = 0.95^{m-1} 0.05, m = 1,2,3,...$, $M[X] = 20$, $D[X] = 380$, $p \approx 0,81$. **13.4.** $p_m = P\{X = m\} = C_7^m C_{13}^{5-m} / C_{20}^7, m = 0,1,...,5$, $M[X] = 1,75$, $D[X] \approx 0,898$, $p \approx 0,083$. **13.5.** Аполлон Митрофанович играет в среднем 37 раз, средний выигрыш за один раз равен - 7/37 руб., и выходит из казино, оставив там 7 руб. **13.6.** $P\{X = 7\} = 0,034$, $P\{X \ge 7\} = 0.005$, $M[X] = D[X] = 2$, $\sigma \approx 1,41$. **13.7.** $p_m = P\{X = m\} = C_6^m C_{39}^{6-m} / C_{45}^6$, $m = 0,1,...,6$, $M[X] = 0,8$, $D[X] \approx 0,614$, $P\{3 \le X \le 6\} = 0,024$.

14.1. $\mathrm{P}\{\mathrm{X} > 10\} = 0,9$, $\mathrm{P}\{40 < \mathrm{X} < 90\} = 0,5$, $\mathrm{P}\{\mathrm{X} = 50\} = 0$, $M[X] = 50$, $D[X] = 2500/3$, $p = 0,68$. **14.2.** $\mathrm{P}\{|\mathrm{x}| > 0,03\} = 0,6$, $M[X] = 0$, $D[X] = 1/1200$. **14.3.** 0,865, 0,135. **14.4.** а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.0125e^{-0.0125x}, & x \ge 0 \end{cases}$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0.0125x}, & x \ge 0 \end{cases}$, б) $p = 0,286$.
14.5. а) $p = 0,9332$, б) $p = 0,0228$, в) $p = 0,6247$. **14.6.** а) $M[X] \approx 98$, $D[X] \approx 12$; б) $p = 0,327$; в) $\varepsilon \approx 23.5$.

15.1 0,25. **15.2** 34.

15.8 R=11.

x_i	15	18	19	20	21	22	23	24	25	26
n_i	2	4	2	4	3	1	5	4	3	2

15.9

x_i	0.25-0.55	0.55-0.85	0.85-1.15	1.15-1.45	1.45-1.75
p_i^*	1/17	4/17	6/17	3/17	3/17

16.1. 4. **16.2.** 2621. **16.3.** а) 10; б) 2.5, 10/3. **16.4.** 0,0344. **16.5.** 168,88.

17.1. а) $7.63 < a < 12.77$, б) $14.23 < a < 19.37$. **17.2.** $1007.84 < a < 992.16$. **17.3.** $n = 62$. **17.4.** $23.38 < a < 36.82$. **17.5.** $0.385 < \sigma < 1.234$. **17.6.** $4.761 \cdot 10^{-10} < \sigma < 4.805 \cdot 10^{-10}$. **17.7.** а) $\bar{x}_в = 10.57$, $s = 2.05$, б) $9.19 < a < 19.76$, $1.43 < \sigma < 3.6$.

18.1. k=2; $\lambda = 0.5$; теоретические частоты: 121.30; 60.65; 15.16; 2.52; 0.32; $\chi_{набл}$=9.25; $\chi_{кр}$(0.05;2)=5.99. Гипотеза о распределении X по закону Пуассона отвергается. **18.2.** k=4; $\lambda = 0.9$; теоретические частоты: 406.57; 365.91; 164.66; 49.40; 11.11; 2.3; $\chi_{набл}$=9.26; $\chi_{кр}$(0.01;4)=13.28. Нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении X по закону Пуассона. **18.3.** k=4; $\lambda = 1$; теоретические частоты: 183.91; 183.94; 91.97; 30.66; 7.66; 1.53; 0.25; 0.04; $\chi_{набл}$=8.47; $\chi_{кр}$(0.01;4)=13.28. Нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении X по закону Пуассона. **18.4. .** k=2; $\lambda = 0.61$; теоретические частоты: 108.67; 66.29; 20.22; 4.11; 0.63;. $\chi_{набл}$=0.19; $\chi_{кр}$(0.05;2)=5.99. Нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении X по закону Пуассона. **18.4.** $p^* = 0.2$; k=2; теоретические частоты: 65.54; 81.92; 40.96; 10.24; 1.28; 0.06; $\chi_{набл}$=4.65; $\chi_{кр}$(0.05;2)=5.99. Нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении X по биномиальному закону. **18.6.** $p^* = 0.505$; k=3; теоретические частоты: 6; 24.5; 37.49; 25.5; 6.5; $\chi_{набл}$=2.86; $\chi_{кр}$(0.05;3)=7.81. Нет оснований отвергнуть гипотезу о биномиальном распределении X. **18.7.** $p^* = 0.5$; k=5; теоретические частоты: 0; 0.1; 0.98; 4.39; 11.72; 20.51; 11.72; 4.39; 0.98; 0.1; 0; $\chi_{набл}$=0.82; $\chi_{кр}$(0.05;5)=11.07. Нет оснований отвергнуть гипотезу о биномиальном распределении X. **18.8.** k=4; теоретические частоты: 2.82; 12.11; 23.35; 26.68; 20.01; 10.29; 3.67; 0.9; 0.14; 0.01; 0; $\chi_{набл}$=0.82; $\chi_{кр}$(0.05;5)=11.07. Нет оснований отвергнуть гипотезу о биномиальном распределении X. **18.9.** $\bar{x}_в = 10.4$; $\sigma_в = 13.67$

k=4; теоретические частоты: 20.47; 46.65; 79.32; 81; 49.68; 18.41; 4.5; $\chi_{набл}$=5.73; $\chi_{кр}$(0.05;4)=9.5. Нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении X. **18.10.** $\overline{x}_в = 11.8$; $\sigma_в = 4.69$ k=2; теоретические частоты: 18.38; 69.61; 99.94; 52.05; 10.01; $\chi_{набл}$=1.12; $\chi_{кр}$(0.05;2)=5.99. Нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении X. **18.11.** $\overline{x}_в = 42.5$; $\sigma_в = 17.17$ k=5; теоретические частоты: 6.18; 10.67; 18.34; 22.73; 20.60; 12.94; 5.98; 8.53; $\chi_{набл}$=13.6; $\chi_{кр}$(0.05;5)=11.07. Гипотезу о нормальном распределении X отвергается.

Приложение 1

Закон распределения Пуассона $P(m,a)=\dfrac{a^m e^{-a}}{m!}$

m \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976
4		0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036
6					0,00001	0,00004

m \ a	0,7	0,8	0,9	1	2	3
0	0,49659	0,44933	0,40657	0,36788	0,13534	0,04979
1	0,34761	0,35946	0,36591	0,36788	0,27067	0,14936
2	0,12166	0,14379	0,16466	0,18394	0,27067	0,22404
3	0,02839	0,03834	0,04940	0,06131	0,18045	0,22404
4	0,00497	0,00767	0,01111	0,01533	0,09022	0,16803
5	0,00070	0,00123	0,00200	0,00307	0,03609	0,10082
6	0,00008	0,00016	0,00030	0,00051	0,01203	0,05041
7	0,00001	0,00002	0,00004	0,00007	0,00344	0,02160
8				0,00001	0,00086	0,00810
9					0,00019	0,00270
10					0,00004	0,00081
11					0,00001	0,00022
12						0,00006
13						0,00001

m \ a	4	5	6	7	8	9
0	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012
1	0,07326	0,03369	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111
2	0,14653	0,08422	0,04462	0,02234	0,01073	0,00500
3	0,19537	0,14037	0,08924	0,05213	0,02863	0,01499
4	0,19537	0,17547	0,13385	0,09123	0,05725	0,03374
5	0,15629	0,17547	0,16062	0,12772	0,09160	0,06073
6	0,10420	0,14622	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109

m / a	4	5	6	7	8	9
7	0,05954	0,10444	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712
8	0,02977	0,06528	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176
9	0,01323	0,03627	0,06884	0,10140	0,12408	0,13176
10	0,00529	0,01813	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858
11	0,00192	0,00824	0,02253	0,04517	0,07219	0,09702
12	0,00064	0,00343	0,01126	0,02635	0,04813	0,07277
13	0,00020	0,00132	0,00520	0,01419	0,02962	0,05038
14	0,00006	0,00047	0,00223	0,00709	0,01692	0,03238
15	0,00002	0,00016	0,00089	0,00331	0,00903	0,01943
16		0,00005	0,00033	0,00145	0,00451	0,01093
17		0,00001	0,00012	0,00060	0,00212	0,00579
18			0,00004	0,00023	0,00094	0,00289
19			0,00001	0,00009	0,00040	0,00137
20				0,00003	0,00016	0,00062
21				0,00001	0,00006	0,00026
22					0,00002	0,00011
23					0,00001	0,00004
24						0,00002
25						0,00001

Приложение 2

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Таблица значений функции Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
0	**0,0000**	0,37	0,1443	0,74	0,2704	1,11	0,3665
0,01	0,0040	0,38	0,1480	0,75	0,2734	1,12	0,3686
0,02	0,0080	0,39	0,1517	0,76	0,2764	1,13	0,3708
0,03	0,0120	**0,4**	**0,1554**	0,77	0,2794	1,14	0,3729
0,04	0,0160	0,41	0,1591	0,78	0,2823	1,15	0,3749
0,05	0,0199	0,42	0,1628	0,79	0,2852	1,16	0,3770
0,06	0,0239	0,43	0,1664	**0,8**	**0,2881**	1,17	0,3790
0,07	0,0279	0,44	0,1700	0,81	0,2910	1,18	0,3810
0,08	0,0319	0,45	0,1736	0,82	0,2939	1,19	0,3830
0,09	0,0359	0,46	0,1772	0,83	0,2967	**1,2**	**0,3849**
0,1	**0,0398**	0,47	0,1808	0,84	0,2995	1,21	0,3869
0,11	0,0438	0,48	0,1844	0,85	0,3023	1,22	0,3888
0,12	0,0478	0,49	0,1879	0,86	0,3051	1,23	0,3907
0,13	0,0517	**0,5**	**0,1915**	0,87	0,3078	1,24	0,3925
0,14	0,0557	0,51	0,1950	0,88	0,3106	1,25	0,3944
0,15	0,0596	0,52	0,1985	0,89	0,3133	1,26	0,3962
0,16	0,0636	0,53	0,2019	**0,9**	**0,3159**	1,27	0,3980
0,17	0,0675	0,54	0,2054	0,91	0,3186	1,28	0,3997
0,18	0,0714	0,55	0,2088	0,92	0,3212	1,29	0,4015
0,19	0,0753	0,56	0,2123	0,93	0,3238	**1,3**	**0,4032**
0,2	**0,0793**	0,57	0,2157	0,94	0,3264	1,31	0,4049
0,21	0,0832	0,58	0,2190	0,95	0,3289	1,32	0,4066
0,22	0,0871	0,59	0,2224	0,96	0,3315	1,33	0,4082
0,23	0,0910	**0,6**	**0,2257**	0,97	0,3340	1,34	0,4099
0,24	0,0948	0,61	0,2291	0,98	0,3365	1,35	0,4115
0,25	0,0987	0,62	0,2324	0,99	0,3389	1,36	0,4131
0,26	0,1026	0,63	0,2357	**1**	**0,3413**	1,37	0,4147
0,27	0,1064	0,64	0,2389	1,01	0,3438	1,38	0,4162
0,28	0,1103	0,65	0,2422	1,02	0,3461	1,39	0,4177
0,29	0,1141	0,66	0,2454	1,03	0,3485	**1,4**	**0,4192**
0,3	**0,1179**	0,67	0,2486	1,04	0,3508	1,41	0,4207
0,31	0,1217	0,68	0,2517	1,05	0,3531	1,42	0,4222
0,32	0,1255	0,69	0,2549	1,06	0,3554	1,43	0,4236
0,33	0,1293	**0,7**	**0,2580**	1,07	0,3577	1,44	0,4251
0,34	0,1331	0,71	0,2611	1,08	0,3599	1,45	0,4265
0,35	0,1368	0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,46	0,4279
0,36	0,1406	0,73	0,2673	**1,1**	**0,3643**	1,47	0,4292

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
1,48	0,4306	**1,8**	**0,4641**	2,24	0,4875	2,88	0,4980
1,49	0,4319	1,81	0,4649	2,26	0,4881	**2,9**	**0,4981**
1,5	**0,4332**	1,82	0,4656	2,28	0,4887	2,92	0,4982
1,51	0,4345	1,83	0,4664	**2,3**	**0,4893**	2,94	0,4984
1,52	0,4357	1,84	0,4671	2,32	0,4898	2,96	0,4985
1,53	0,4370	1,85	0,4678	2,34	0,4904	2,98	0,4986
1,54	0,4382	1,86	0,4686	2,36	0,4909	**3**	**0,4987**
1,55	0,4394	1,87	0,4693	2,38	0,4913	3,02	0,4987
1,56	0,4406	1,88	0,4699	**2,4**	**0,4918**	3,04	0,4988
1,57	0,4418	1,89	0,4706	2,42	0,4922	3,06	0,4989
1,58	0,4429	**1,9**	**0,4713**	2,44	0,4927	3,08	0,4990
1,59	0,4441	1,91	0,4719	2,46	0,4931	**3,1**	**0,4990**
1,6	**0,4452**	1,92	0,4726	2,48	0,4934	3,12	0,4991
1,61	0,4463	1,93	0,4732	**2,5**	**0,4938**	3,14	0,4992
1,62	0,4474	1,94	0,4738	2,52	0,4941	3,16	0,4992
1,63	0,4484	1,95	0,4744	2,54	0,4945	3,18	0,4993
1,64	0,4495	1,96	0,4750	2,56	0,4948	3,2	0,4993
1,65	0,4505	1,97	0,4756	2,58	0,4951	3,25	0,4994
1,66	0,4515	1,98	0,4761	**2,6**	**0,4953**	3,3	0,4995
1,67	0,4525	1,99	0,4767	2,62	0,4956	3,35	0,4996
1,68	0,4535	**2**	**0,4772**	2,64	0,4959	3,4	0,4997
1,69	0,4545	2,02	0,4783	2,66	0,4961	3,5	0,4998
1,7	**0,4554**	2,04	0,4793	2,68	0,4963	3,6	0,4998
1,71	0,4564	2,06	0,4803	**2,7**	**0,4965**	3,7	0,4999
1,72	0,4573	2,08	0,4812	2,72	0,4967	3,8	0,4999
1,73	0,4582	**2,1**	**0,4821**	2,74	0,4969	3,9	0,49995
1,74	0,4591	2,12	0,4830	2,76	0,4971	4	0,49997
1,75	0,4599	2,14	0,4838	2,78	0,4973	4,2	0,499987
1,76	0,4608	2,16	0,4846	**2,8**	**0,4974**	4,4	0,499995
1,77	0,4616	2,18	0,4854	2,82	0,4976	4,6	0,4999979
1,78	0,4625	**2,2**	**0,4861**	2,84	0,4977	4,8	0,4999992
1,79	0,4633	2,22	0,4868	2,86	0,4979	5	0,4999997

Таблица значений аргумента соответствующие некоторым значениям функции Лапласа

$2\Phi_0(x)$	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999
x	1,0364	1,2815	1,6449	1,96	2,5758	3,2905

Приложение 3

Квантили распределения Стьюдента (коэффициенты Стьюдента)

$$t_\gamma = t(\gamma, n)$$

n \ γ	**0,9**	**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,13	2,78	4,60	8,61
6	2,02	2,57	4,03	6,87
7	1,94	2,45	3,71	5,96
8	1,89	2,36	3,50	5,41
9	1,86	2,31	3,36	5,04
10	1,83	2,26	3,25	4,78
11	1,81	2,23	3,17	4,59
12	1,80	2,20	3,11	4,44
13	1,78	2,18	3,05	4,32
14	1,77	2,16	3,01	4,22
15	1,76	2,14	2,98	4,14
16	1,75	2,13	2,95	4,07
17	1,75	2,12	2,92	4,01
18	1,74	2,11	2,90	3,97
19	1,73	2,10	2,88	3,92
20	1,729	2,093	2,861	3,883
25	1,711	2,064	2,797	3,745
30	1,699	2,045	2,756	3,659
35	1,691	2,032	2,728	3,601
40	1,685	2,023	2,708	3,558
45	1,680	2,015	2,692	3,526
50	1,677	2,010	2,680	3,500
60	1,671	2,001	2,662	3,463
70	1,667	1,995	2,649	3,437
80	1,664	1,990	2,640	3,418
90	1,662	1,987	2,632	3,403
100	1,660	1,984	2,626	3,392
120	1,658	1,980	2,618	3,374
∞	1,645	1,960	2,576	3,292

Приложение 4

Квантили χ^2 – распределения.

n \ γ	0,95		0,99		0,999	
	χ_1	χ_1	χ_1	χ_2	χ_1	χ_2
5	3,338	0,696	3,855	0,455	4,472	0,253
6	3,582	0,912	4,093	0,642	4,702	0,398
7	3,801	1,112	4,307	0,822	4,909	0,547
8	4,002	1,300	4,503	0,995	5,101	0,696
9	4,187	1,476	4,686	1,159	5,279	0,843
10	4,362	1,643	4,857	1,317	5,447	0,986
11	4,526	1,802	5,019	1,468	5,605	1,125
12	4,682	1,953	5,173	1,613	5,756	1,260
13	4,831	2,099	5,320	1,753	5,901	1,391
14	4,973	2,238	5,461	1,888	6,040	1,518
15	5,111	2,372	5,596	2,019	6,173	1,642
16	5,243	2,502	5,727	2,145	6,302	1,763
17	5,371	2,628	5,854	2,268	6,427	1,880
18	5,495	2,750	5,976	2,387	6,548	1,995
19	5,615	2,869	6,096	2,503	6,666	2,107
20	5,732	2,984	6,211	2,616	6,780	2,216
25	6,274	3,522	6,750	3,144	7,313	2,730
30	6,762	4,006	7,234	3,622	7,793	3,198
35	7,209	4,450	7,679	4,062	8,234	3,630
40	7,624	4,864	8,092	4,472	8,644	4,034
45	8,013	5,251	8,479	4,856	9,029	4,414
50	8,380	5,617	8,845	5,220	9,393	4,774
60	9,062	6,298	9,524	5,897	10,069	5,444
70	9,688	6,923	10,149	6,519	10,691	6,062
80	10,270	7,504	10,729	7,098	11,269	6,637
90	10,816	8,049	11,274	7,641	11,813	7,178
100	11,332	8,565	11,789	8,155	12,326	7,689
120	12,292	9,524	12,747	9,111	13,281	8,642
∞	101,376	98,604	6,211	2,616	102,322	97,669

Приложение 5

Критические точки распределения χ^2.

k \ α	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	6,63	5,02	3,84	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,21	7,38	5,99	0,103	0,051	0,020
3	11,34	9,35	7,81	0,352	0,216	0,115
4	13,28	11,14	9,49	0,711	0,484	0,297
5	15,09	12,83	11,07	1,15	0,831	0,554
6	16,81	14,45	12,59	1,64	1,24	0,872
7	18,48	16,01	14,07	2,17	1,69	1,24
8	20,09	17,53	15,51	2,73	2,18	1,65
9	21,67	19,02	16,92	3,33	2,70	2,09
10	23,21	20,48	18,31	3,94	3,25	2,56
11	24,72	21,92	19,68	4,57	3,82	3,05
12	26,22	23,34	21,03	5,23	4,40	3,57
13	27,69	24,74	22,36	5,89	5,01	4,11
14	29,14	26,12	23,68	6,57	5,63	4,66
15	30,58	27,49	25,00	7,26	6,26	5,23
16	32,00	28,85	26,30	7,96	6,91	5,81
17	33,41	30,19	27,59	8,67	7,56	6,41
18	34,81	31,53	28,87	9,39	8,23	7,01
19	36,19	32,85	30,14	10,12	8,91	7,63
20	37,57	34,17	31,41	10,85	9,59	8,26
21	38,93	35,48	32,67	11,59	10,28	8,90
22	40,29	36,78	33,92	12,34	10,98	9,54
23	41,64	38,08	35,17	13,09	11,69	10,20
24	42,98	39,36	36,42	13,85	12,40	10,86
25	44,31	40,65	37,65	14,61	13,12	11,52
26	45,64	41,92	38,89	15,38	13,84	12,20
27	46,96	43,19	40,11	16,15	14,57	12,88
28	48,28	44,46	41,34	16,93	15,31	13,56
29	49,59	45,72	42,56	17,71	16,05	14,26
30	50,89	46,98	43,77	18,49	16,79	14,95

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576с.

2. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Юнити-Дана, 2004. 573 с.

3. Виленкин Н.Я., Потапов В.Г. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики. М.: Просвещение, 1979. 112с.

4. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. М.: Мир, 1969. 432с.

5. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. М.: Наука, 1875. 112с.

6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистики. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256с.