фтф

Теория упругости

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. Скрипняк, Е.Г. Скрипняк

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(Методическое пособие)

Томск -1998

Рассмотрено и утверждено методической комиссией физико-технического факультета Томского государственного университета. Протокол N 12 от 12 марта 1998 г.

Председатель методической комиссии,
профессор, доктор физ.-мат. наук В.А. Скрипняк

Рекомендовано кафедрой теории прочности и проектирования ТГУ для студентов, обучающихся по программам базового образования 553300 «Прикладная механика», 553100 - «Техническая физика», специальности 071100 «Динамика и прочность машин» в Томском государственном университете.

Заведующий кафедрой
теории прочности и проектирования
профессор, доктор физ.-мат. наук Т.М. Платова

Учебное пособие «Методы решения плоских задач линейной теории упругости» разработано для студентов, изучающих курс «Математическая и прикладная теория упругости» в рамках программ базового образования 553300 -«Прикладная механика», 553100 - «Техническая физика» и специальности 071100 «Динамика и прочность машин» дневной формы обучения.

В пособии рассмотрены постановка и основные аналитические методы решения одного класса математических задач теории упругости (плоских задач) , объединяемых общностью математической постановки. Рассматривается подход к решению плоских задач с использованием функций напряжений Эри.

Составители :
профессор кафедры теории прочности и проектирования ФТФ Скрипняк В.А.
аспирант кафедры теории прочности и проектирования ФТФ Скрипняк Е.Г.

Рецензент :
доктор физ.-мат. наук Г.Н. Парватов

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Содержание :

Введение

При решении задач теории упругости для трехмерных тел, как правило, возникают серьезные математические затруднения. Вместе с тем существует обширный класс задач, в которых удается понизить размерность задачи, т.е. уменьшить число независимых переменных и искомых функций. Плоская задача теории упругости включает в себя разные по физико-механической сущности задачи, которые имеют идентичную *математическую постановку. К классу плоских задач* *относятся* :

1. Задача о плоской деформации (деформации тела и перемещения точек тела происходят только параллельно некоторой определенной плоскости);
2. Задача о плоском напряженном состоянии (компоненты тензора напряжения параллельные некоторой определенной плоскости равны нулю);
3. Задача об обобщенном плоском деформированном состоянии ;
4. Задача об обобщенном плоском напряженном состоянии .

Поскольку все перечисленные задачи могут быть сведены к одинаковой системе уравнений, *для их решения могут применяться одни и те же методы.*

1. Математическая постановка задачи о плоской деформации

Деформацию тел принято называть плоской, если вектор перемещения любой точки тела параллелен некоторой плоскости и не меняется при переходе к другим точка тела.

Задаче о плоской деформации соответствует поле перемещений

$$u_1=u_1(x_1,x_2),\ u_2=u_2(x_1,x_2),\ u_3=0. \qquad (1)$$

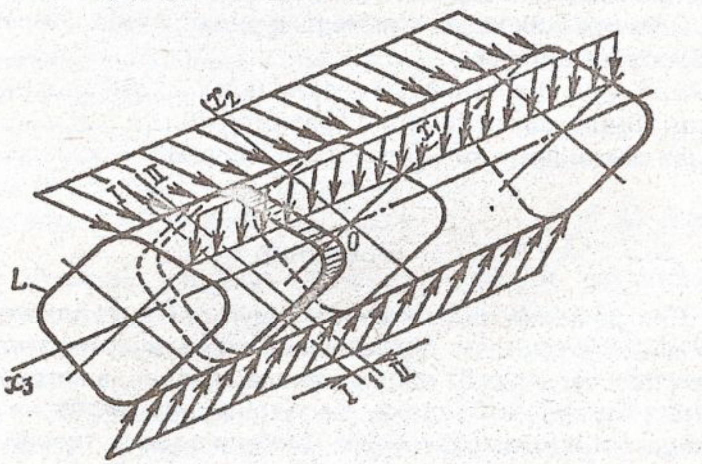

Рис.1. Схема нагружения при плоской деформации.

Процесс деформации происходит в плоскости OX_1X_2. Системе перемещений (1) соответствует деформация длинных цилиндрических или призматических тел с основаниями, нормальными к его оси X_3 и закрепленных так, что их точки могут свободно перемещаться в своей плоскости, но не могут перемещаться в направлении оси X_3. В этом случае действующие на тела силы не зависят от координаты X_3.

Общая математическая постановка статической задачи линейной теории упругости о плоской деформации включает: геометрические соотношения Коши, уравнения равновесия, определяющее уравнение для упругого тела, граничные условия.

1). Соотношения Коши для задачи о плоской деформации упрощаются. Системе перемещений (1) соответствует тензор деформации

компоненты которого зависят только от двух координат x_1,x_2. В декартовой системе координат компоненты тензора деформаций определяются

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad \varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),$$

$$\varepsilon_{23}=\varepsilon_{31}=\varepsilon_{33}=0, \qquad (2)$$

$$\theta=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

где u_i - компоненты вектора перемещения, ε_{ij} - компоненты тензора деформации .

2). Уравнения равновесия

Дифференциальные уравнения равновесия с учетом (3) в случае плоской деформации примут вид :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}+\rho f_1=0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}+\rho f_2=0, \qquad (4)$$

$$\rho f_3=0,$$

где ρ - плотность, f_i - компоненты вектора массовых сил.

Третье уравнение равновесия превращается в тождество. Из этого уравнения следует, что массовая сила f_3 в любой точке тела должна быть параллельна плоскости деформации и не должна зависеть от координаты x_3.

3) Соотношения закона Гука для плоской задачи также упрощаются

$$\sigma_{11}=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{11};\ \sigma_{22}=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{22};\ \sigma_{12}=2\mu\varepsilon_{12};$$

$$\sigma_{23}=\sigma_{31}=0;\ \sigma_{33}=\lambda\theta, \qquad (3)$$

где ε_{ij} - компоненты тензора деформаций, θ - первый инвариант тензора деформаций, λ, μ - коэффициенты Ламе.

Отметим, что при плоской деформации тензор напряжений имеет только 4 отличных от нуля компоненты, зависящих от двух координат x_1 и x_2. При этом линейно независимы только три компоненты. Компонента σ_{33} может быть выражена через две другие отличные от нуля компоненты

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right).$$

С учетом связи между модулями упругости изотропного тела $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ имеем

$$\boxed{\sigma_{33} = \nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right).} \qquad (4)$$

Компонента σ_{33} обеспечивает состояние плоской деформации.

4). Граничные условия

Граничные условия на торцах соответствуют закреплению, которое обеспечивает независимость компоненты σ_{33} от координаты X_3 т.е. $\sigma_{33} = \sigma_{33}(x_1, x_2)$.

Усилия на торцах тела, приводятся к силе F_3, действующей вдоль OX_3 , и моментам M_{Xi} относительно главных центральных осей OX_1 и OX_2.

$$F_3 = \iint_S \sigma_{33}\, dS = \nu \iint_S \left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right) dx_1\, dx_2\,,$$

$$M_{x1} = \iint_S x_2\sigma_{33}\, dS = \nu \iint_S x_2\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right) dx_1 dx_2\,,$$

$$M_{x2} = \iint_S x_1\sigma_{33}\, dS = \nu \iint_S x_1\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right) dx_1 dx_2\,. \qquad (5)$$

где ν - коэффициент Пуассона

Силовые граничные граничные условия на боковой поверхности тела сводятся к условиям на контуре поперечного сечения тела

$$\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = F_{1n}\,,$$

$$\sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 = F_{2n}\,, \qquad (6)$$

где n_1, n_2 -направляющие косинусы нормали к контуру поперечного сечения в рассматриваемой точке боковой поверхности,

F_{1n}, F_{2n} - проекции поверхностных сил на оси OX_1 и OX_2 в рассматриваемой точке боковой поверхности.

Отметим, что система уравнений (1)-(5) и граничные условия (6) не содержат упругих констант материала. Следовательно, реализующееся напряженно-деформированное состояние в любом односвязном сечении, параллельном плоскости деформации, определяется только заданными на контуре силами и формой тела и не зависит от свойств материала.

В случае удлиненных призматических тел, торцы которых не закреплены и, следовательно, свободны от усилий, решение можно получить путем наложения на решение задачи о плоской деформации решений задач о растяжении и изгибе данного тела. Последние задачи являются простейшими и их решения хорошо известны [1]. В результате суперпозиции решений получим решение задачи о плоской деформации для данного тела при заданных нагрузках $F_1 = F_1(x_1, x_2)$, $F_2 = F_2(x_1, x_2)$ на его боковой поверхности и некоторой нагрузке на его торцах сводящейся к усилию F_3 и моментам M_{X1} и M_{X2}.

Согласно принципу Сен-Венана, полученное решение для точек, удаленных от торцов, будет совпадать с решением для данного тела, торцы которого полностью свободны от усилий. Хотя деформация в этом случае уже не будет плоской, ее принято называть *обобщенной плоской деформацией*.

Контрольные задания :

1. Запишите матрицы тензоров напряжений и деформаций для плоского деформированного состояния.
2. Запишите систему .уравнений линейной теории упругости плоского деформированного состояния изотропного тела.
3. Покажите, что пять из шести уравнений совместности для плоского деформированного состояния удовлетворяются тождественно.

2. Задача о плоском напряженном состоянии

Тело находится в плоском напряженном состоянии, если во всех его поперечных сечениях выполняется условие:

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0. \qquad (7)$$

Пусть тело имеет в направлении оси OX_3 размер, существенно меньший, относительно размеров тела в двух других направлениях. Если поверхность такого тела представляет собой плоскость , то тело будет представлять собой пластину.

В теле будет реализовываться плоское напряженное состояние, если :

- *составляющая объемной силы в направлении OX_3 равна нулю, а другие составляющие параллельны срединной поверхности;*
- *поверхностные силы приложены по контуру, равномерно распределены по толщине и действуют параллельно срединной поверхности.*

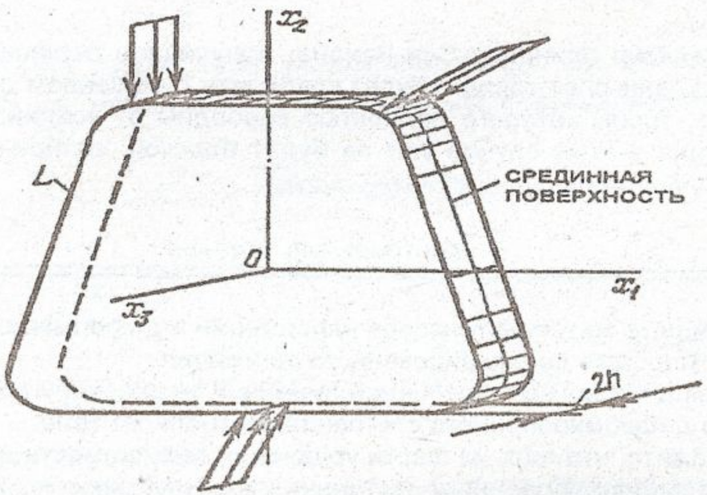

Рис.2. Схема нагружения при плоском напряженном состоянии.

Отличные от нуля компоненты тензора напряжения должны удовлетворять однородным уравнениям равновесия. Массовые силы из рассмотрения могут исключаться, поскольку частное решение задачи линейной теории упругости, соответствующее их действию, достаточно легко отыскивается. В отличие от плоской деформации,

перемещения u_1, u_2, u_3 зависят от координаты X_3. Поэтому от X_3 будут зависеть и компоненты тензора напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$. Таким образом, задача о плоском напряженном состоянии является *трехмерной.*

Закон Гука с учетом (7) принимает вид

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11} = \lambda^*\theta_1 + 2\mu\varepsilon_{11}, \\
\sigma_{22} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{22} = \lambda^*\theta_1 + 2\mu\varepsilon_{11}, \qquad (8) \\
\sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12},
\end{aligned}
$$

где $\lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda+2\mu)$.

Для случая плоского напряженного состояния соотношения Закона Гука в обратной форме имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = (1/E)(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22});\ \varepsilon_{22} = (1/E)(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}); \\
&\varepsilon_{12}[(1+\nu)/E)]\,\sigma_{12};\ \varepsilon_{33} = -(\nu/(1-\nu)[\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}], \qquad (9) \\
&\theta = [(1-2\nu)/(1-\nu)]\,\theta_1,
\end{aligned}
$$

где $\theta_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22},\ \lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda+2\mu)$.

В (9) учтено равенство нулю компонент тензора напряжения

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0.$$

Поэтому

$$\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} = 0;$$

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \{1 - (\lambda/(\lambda+2\mu)\}[\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}].$$

Уравнения (8) - (9) имеют тот же вид, что и уравнения в задаче линейной теории упругости о плоской деформации, с отличием только в коэффициенте λ^* при θ_1.

Уравнения равновесия в случае плоского напряженного состояния примут вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho f_1 = 0,$$
$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho f_2 = 0, \qquad (10)$$
$$\rho f_3 = 0.$$

Система уравнений (8)-(10)) имеет тот же математический вид, что и система (2)-(4) для задачи о плоской деформации.

Условия совместности Бельтрами-Мичелла имеют вид

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 \sigma_{ss}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\nu}{(1-\nu)} \rho \frac{\partial f_s}{\partial x_s} \delta_{ij} - \rho \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)$$

где $i, j = 1, 2$; ν - коэффициент Пуассона, дифференциальный оператор Лапласа принимает вид $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Граничные условия

Силовые ГУ для задачи о плоском напряженном состоянии на поверхности контура пластины L примут вид

$$\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = F_{1n}, \qquad X_1, X_2 \in L, \qquad (11)$$
$$\sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 = F_{2n},$$

где $n_1 = \cos(n, x_1)$, $n_2 = \cos(n, x_2)$, F_{1n}, F_{n2} - проекции поверхностных усилий на соответствующие оси. На верхней и нижней поверхностях пластины усилия F_3 отсутствуют.

Таким образом, разные по свой физико-механической сущности задачи теории упругости сводятся к одной и той же математической краевой задаче для уравнений в частных производных.

Контрольные задания :

1. Запишите матрицы тензоров напряжений и деформаций для плоского напряженного состояния.
2. Запишите систему .уравнений линейной теории упругости для плоского напряженного состояния изотропного тела.

3. Покажите, что пять из шести уравнений совместности для плоского напряженного состояния удовлетворяются тождественно.

3. Задача об обобщенном плоском напряженном состоянии

Задача о плоском напряженном состоянии является трехмерной, т. к. перемещения и деформации зависят от координаты X_3 . Однако, при малой толщине пластин зависимость напряжений от X_3 будет не существенной. Это позволяет свести задачу о плоском напряженном состоянии тонкой пластины к двумерной задаче. Это обобщение было впервые выполнено Файлоном . *Напряженное состояние в тонкой пластине, нагруженной по контуру усилиями параллельными поверхности, называют обобщенным плоским напряженным состоянием.*

Система уравнений для *обобщенного плоского напряженного состояния* не отличается от системы (8) - (10).

Силовые граничные условия для обобщенного плоского напряженного состояния формулируются с учетом того, что пластинка является тонкой, т. е. ее толщина 2h, много меньше других геометрических размеров.

Если пластинка нагружена силами F_1 и F_2, симметричными относительно срединной поверхности пластины, тогда во всех точках (X_1, X_2 , ± h) выполняется условие

$$\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = F_{1n},$$
$$\sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 = F_{2n},$$

где $n_1 = \cos(n, x_1)$, $n_2 = \cos(n, x_2)$, F_{1n}, F_{2n} - проекции поверхностных усилий.

На верхней и нижней поверхностях пластины усилия F_3 отсутствуют.

4. Методы решения плоских задач

С математической точки зрения, наиболее простым считается способ решения плоских задач в напряжениях. При этом удается найти точное решение задачи о плоской деформации и приближенное задачи о плоском напряженном состоянии.

Решение задачи о плоской деформации в напряжениях сводится к определению трех компонент тензора напряжений как функций двух координат

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2), \ \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2), \ \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2).$$

Эти функции должны удовлетворять уравнениям равновесия, условиям совместности Бельтрами-Мичелла и граничным условиям.

Для однородных уравнений равновесия имеем

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0\ .$$

Если массовые силы соизмеримы с поверхностными силами, их необходимо учитывать при решении задачи. Задачу с неоднородными уравнениями равновесия и уравнениями Бельтрами-Мичелла можно свести к задаче с однородным уравнениями.

Если известно какое-нибудь частное решение неоднородных уравнений равновесия σ^0_{ij} $(i = 1,2;\ j = 1,2\ )$, тогда общее решение системы неоднородных уравнений можно записать в виде :

$$\sigma^{об}_{ij} = \sigma^0_{ij} + \sigma_{ij}\ , \ (i = 1, 2; j = 1, 2), \qquad (12)$$

где σ_{ij}-функции, удовлетворяющие однородным уравнениям равновесия.

Частное решение σ^0_{ij} для наиболее часто встречающихся на практике массовых сил (собственный вес тела, силы инерции) находится достаточно просто.

Если, например, необходимо учитывать собственный вес призматического тела, то уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = \rho g_1, \quad \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = \rho g_2\ , \qquad (13)$$

где g_1, g_2, - проекции вектора ускорения силы тяжести на оси OX_1 и OX_2 соответственно.

Очевидно, что уравнения будут удовлетворяться, если принять

$$\sigma^0_{11} = \sigma^0_{22} = 0\ , \ \sigma^0_{12} = \rho g_1 x_2 + \rho g_2 x_1\ . \qquad (14)$$

Для рассматриваемых массовых сил, частное решение (14) , удовлетворяет уравнениям Бельтрами-Мичелла и , следовательно, реализуется в линейно-упругом теле.

Для отыскания общего решения задачи (12) остается найти функции σ_{ij}, удовлетворяющие однородным уравнениям равновесия (11). Легко убедиться, что уравнения (11) выполняются, если компоненты тензора напряжений выразить с помощью функции напряжений φ :

$$\boxed{\sigma_{11} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^{\,2}}\ , \ \sigma_{22} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^{\,2}}\ , \ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}}\ . \qquad (15)$$

Введенная соотношениями (15) функция координат точек тела $\varphi = \varphi\ (x_1, x_2)$ *называется функцией напряжений Эри.*

Три соотношения (15) можно записать одним равенством

$$\sigma_{ij} = \eta_{ik}\ \eta_{jl}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial x_l}\ , \qquad (16)$$

где η_{ik} кососимметричный тензор .второго ранга ($\eta_{11} = \eta_{22} = 0$, $\eta_{12} = +1$, $\eta_{21} = -1$).

Чтобы функции $\sigma_{ij}(X, X_2)$ были не только статически возможными, но и реализуемыми в линейно-упругом теле, помимо уравнений равновесия они должны удовлетворять однородным уравнениям Бельтрами-Мичелла. Учитывая (4) имеем

$$\begin{aligned} &\sigma_{33} = \nu\,(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nu\nabla^2\varphi\ , \\ &\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (1+\nu)\,(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \\ &= (1+\nu)\nabla^2\varphi\ . \end{aligned} \qquad (17)$$

Из уравнений Бельтрами-Мичелла

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 \sigma_{ss}}{\partial x_i \partial x_j} =$$

$$= - \frac{\nu}{(1-\nu)} \rho \frac{\partial f_s}{\partial x_s} \delta_{ij} - \rho \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) , \quad (18)$$

получим :

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{(1+\nu)} \bullet \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\sigma_{ss}) = 0 . \quad (19)$$

Из (15), (17) и (19) вытекает уравнение для функции напряжений φ

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0 . \\ &\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} . \end{aligned}} \quad (20)$$

Уравнение (20) является бигармоническим, поэтому, *функция напряжения Эри является бигармонической*.

В случае *плоского напряженного состояния*, из уравнения Бельтрами-Мичелла (17), с учетом $\sigma_{33} = 0$ и соотношений (15), также вытекает уравнение, идентичное (20) : $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$.

Граничные условия при решении плоских задач в напряжениях должны быть сформулированы для функции φ. Для этого в граничные условия (5)-(6) подставим соотношения (15) и учтем, что $n_1 = dx_2 / dL$, $n_2 = dx_1 / dL$.

На контуре поперечного сечения L должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \left(\frac{d x_2}{d L} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{d x_2}{d L} \right) = \frac{d}{d L} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = F_1 ; \\ &- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{d x_2}{d L} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \left(\frac{d x_1}{d L} \right) = \frac{d}{d L} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = F_2 . \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, при решении плоских задач теории упругости в напряжениях удобно свести задачу к определению бигармонической функции Эри φ, удовлетворяющей граничным условиям (21). После отыскания функции Эри компоненты тензора напряжений отыскиваются с помощью соотношений (15), компоненты тензора деформаций с помощью соотношений (9), а компоненты вектора перемещений путем интегрирования соотношений Коши (2). Дифференциальные уравнения Коши для плоских задач содержат две искомые функции u_1 и u_2. Интегрируемость системы следует из выполнения бигармонического уравнения (20) для функции напряжений Эри, полученного из уравнений совместности Бельтрами-Мичелла.

Таким образом, главной проблемой при решении плоских задач теории упругости в напряжениях, является отыскание функции Эри.

5. Функция напряжений Эри

Проанализируем свойства, которыми должна обладать функция напряжений Эри. Из (17) следует

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \nabla^2 \varphi . \quad (22)$$

Учитывая, что $\sigma_{11}(x_1, x_2)$ и $\sigma_{22}(x_1, x_2)$ из (22) следует

$$\nabla^2 \varphi = P(x_1, x_2),$$

где введенная функция $P(x_1, x_2)$ является гармонической, поскольку должно удовлетворятся уравнение (20)

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \nabla^2 P = 0 .$$

Учитывая (15) и (22) из закона Гука получим

$$\begin{aligned} &2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} P - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} ; \\ &2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} P - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} ; \\ &- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \cdot \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} . \end{aligned} \quad (23)$$

Если обозначитьчерез Q гармоническую функцию, сопряженную с функцией $P(x_1, x_2)$ и ввести комплексную переменную $z = x_1 + i x_2$, то функция $f(z) = P + iQ$ будет аналитической. Интеграл функции $f(z)$ по z будет также аналитической функцией.

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}\int f(z)\,dz = p + iq . \tag{24}$$

Функции p и q из (24) будут подчиняться условиям Коши - Римана. Следовательно,

$$\varphi'(z) = \frac{\partial p}{\partial x_1} + i\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{\partial q}{\partial x_2} - i\frac{\partial p}{\partial x_2} =$$

$$= \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4}(P + iQ); \tag{25}$$

$$P = 4\frac{\partial p}{\partial x_1} = 4\frac{\partial q}{\partial x_2}; \quad Q = 4\frac{\partial q}{\partial x_1} = -4\frac{\partial p}{\partial x_2}.$$

Используя соотношения (25), первые два уравнения (23) преобразуем к виду:

$$2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 2\frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + \mu)}\frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2};$$

$$2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 2\frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + \mu)}\frac{\partial q}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}. \tag{26}$$

Интегрируя уравнения (26), получим:

$$2\mu u_1 = 2\frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + \mu)}p - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + f_1(x_2),$$

$$2\mu u_2 = 2\frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + \mu)}q - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + f_2(x_1), \tag{27}$$

где $f_1(x_2)$, $f_2(x_1)$- некоторые функции от соответствующих координат.

Подставляя выражения (27) в третье уравнение (23) и учитывая $\frac{\partial p}{\partial x_2} = -\frac{\partial q}{\partial x_1}$, получаем для определения f_1 и f_2 обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f_1'(x_2) + f_2'(x_1) = 0. \tag{28}$$

Так как $f_1(x_2)$ - функция только x_2, а $f_2(x_1)$ - функция только x_1, (28) может выполняться только в случае

$$f_1'(x_2) = A, \; f_2'(x_1) = A. \tag{29}$$

где A - постоянная.

Интегрируя уравнения (29), получаем:

$$f_1(x_2) = Ax_2 + B; \quad f_2(x_1) = Ax_1 + C;$$

где B и C - постоянные.

Таким образом, функции $f_1(x_2)$ и $f_2(x_1)$ в выражениях (28) соответствуют жесткому смещению тела. Полагая, что на тело наложены связи, запрещающие его жесткое смещение, эти функции следует положить равными нулю. В этом случае выражения (28) принимают вид

$$u_1 = \frac{1}{2\mu}[4(1-\nu)p - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}], u_2 = \frac{1}{2\mu}[4(1-\nu)q - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}]. \tag{30}$$

В случае задачи о плоском напряженном состоянии в равенствах (30) надо заменить ν на $\nu^* = \nu/(1+\nu)$. Для плоского напряженного состояния с учетом $\mu = E/2(1+\nu)$ получим:

$$u_1 = \frac{1}{E}[4p - (1+\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}], u_2 = \frac{1}{E}[4q - (1+\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}]. \tag{31}$$

Исходя из того, что p и q - гармонические сопряженные функции, непосредственно находим:

$$\nabla^2(x_1 \cdot p) = 2\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{P}{2}; \quad \nabla^2(x_2 \cdot q) = 2\frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{P}{2};$$

где $P = \nabla^2\varphi$ - гармоническая функция.

Тогда $\nabla^2(\varphi - x_1 p - x_2 q) = 0$ т. е. $\varphi - x_1 p - x_2 q = p_1$ - некоторая гармоническая функция.

Отсюда следует, что любая бигармоническая функция и, в частности, функция Эри, через производные которой определяются напряжения и перемещения в плоской задаче, может быть представлена в общем виде через три гармонические функции, две из которых (p и q) сопряженные:

$$\varphi = x_1 p + x_2 q - p_1 \;. \qquad (32)$$

Контрольные вопросы:

1. С какой целью вводится функция напряжений Эри?
2. Решением какого уравнения является функция Эри?
3. Каким условиям должна удовлетворять функция напряжений Эри?
4. Запишите примеры функций, удовлетворяющих бигармоническому уравнению. Определите какому напряженному состоянию могут соответствовать эти функции, если их использовать в качестве функций Эри.

6. Решение плоских задач в полиномах

При решении плоской задачи для прямоугольных пластин и длинных прямоугольных полос естественно использовать прямоугольные координатные оси, направленные параллельно сторонам пластины (рис.3).

В этом случае граничные условия (6) на прямоугольном контуре существенно упрощаются. На вертикальных сторонах пластины, т. е. при $x_1 = 0$, $x_1 = L$, имеем $n_1 = \pm 1$, $n_2 = 0$ и, следовательно, на этих сторонах условия (6) принимают вид:

$$t_1 = \mp \sigma_{11} = \mp \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^{\;2}}; \; t_2 = \pm \sigma_{21} = \pm \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \;. \qquad (33)$$

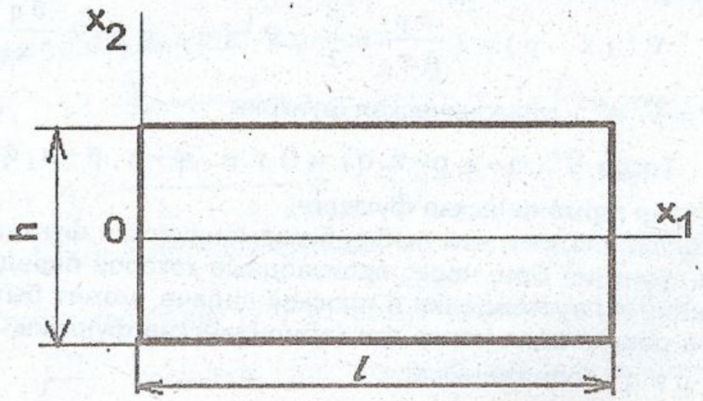

рис.3. Схема пластины.

На продольных кромках пластины ($x_2 = \pm h$), $n_1 = 0$, $n_2 = \pm 1$ и условия (6) сводятся к равенствам:

$$t_1 = \pm \sigma_{12} = \pm \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}; \; t_2 = \pm \sigma_{22} = \pm \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^{\;2}} \;. \qquad (34)$$

Отыскание бигармонической функции Эри, удовлетворяющей даже простым граничным условиям (33) и (34), при заданных t_1 и t_2 обычно вызывает затруднения. Поэтому иногда обращаются к решению обратной задачи.

Задаваясь различными бигармоническими функциями, определяют, какому виду нагружения они соответствуют. Имея набор таких решений, путем их линейного комбинирования можно установить вид функции Эри, соответствующей данному конкретному нагружению пластины.

Для равномерно распределенных и изменяющихся по линейным и степенным законам нагрузках удобно принять функция Эри в виде полиномов различных степеней. Это позволяет получить решения для некоторых практически важных задач.

Рассмотрим условия нагружения, соответствующие функции Эри, заданной в виде полинома второй степени

$$\varphi = a_2 x_1^{\;2} + b_2 x_1 x_2 + c_2 x_2^{\;2} \;, \qquad (35)$$

который удовлетворяет уравнению (20) при любых значениях его коэффициентов. По формулам (15) находим :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^{\;2}} = 2 c_2 \;, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^{\;2}} = 2 a_2 \;,$$
$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -b_2 \;. \qquad (36)$$

Функция Эри (35) соответствует, как это видно из (36), постоянным значениям компонент тензора напряжений во всех точках пластины, на сторонах которой приложены постоянные силы t_1 и t_2. Характер распределения усилий на кромках пластины показан на рис. 4 (а, б).

Примем теперь функцию Эри в виде полинома третьей степени

$$\varphi = a_3 x_1^3 + b_3 x_1^2 x_2 + c_3 x_1 x_2^2 + d_3 x_2^3. \qquad (37)$$

Полином третьей степени (37) удовлетворяет уравнению (20) при любых коэффициентах. В этом случае по формулам (15) находим:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 2 c_3 x_1 + 6 d_3 x_2, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 6 a_3 x_1 + 2 b_3 x_2,$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -2 b_3 x_1 - 2 c_3 x_2.$$

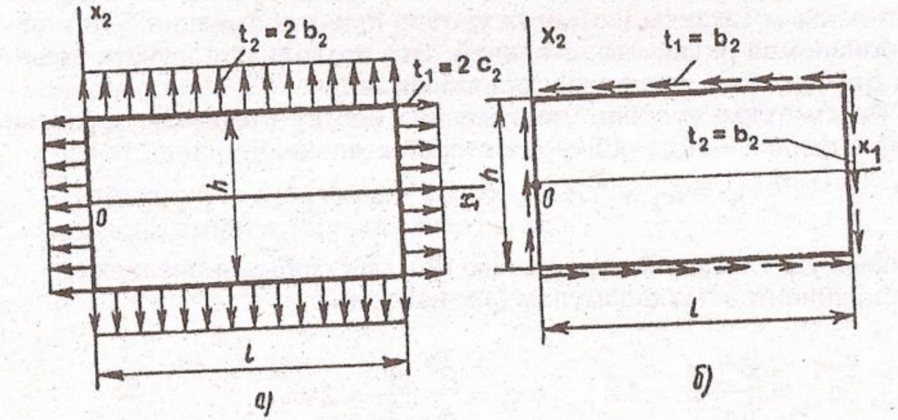

Рис. 4. Распределение напряжений по кромкам пластин.

Рассмотрим характер распределения усилий на границах пластины при некоторых частных значениях коэффициентов полинома (37).

Принимая, например, все коэффициенты, за исключением d_3 равными нулю, имеем $\sigma_{11} = 6 d_3 x_2, \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$.

Функция Эри $\varphi = d_3 x_2^3$ соответствует чистому изгибу пластины (рис. 5.а).

На рис.5.б показан вариант нагружения пластины, соответствующий функции Эри $\varphi = b_3 x_1^2 x_2$. В этом случае

$$\sigma_{22} = 2 b_3 x_2, \quad \sigma_{12} = -2 b_3 x_1, \ \sigma_{11} = 0$$

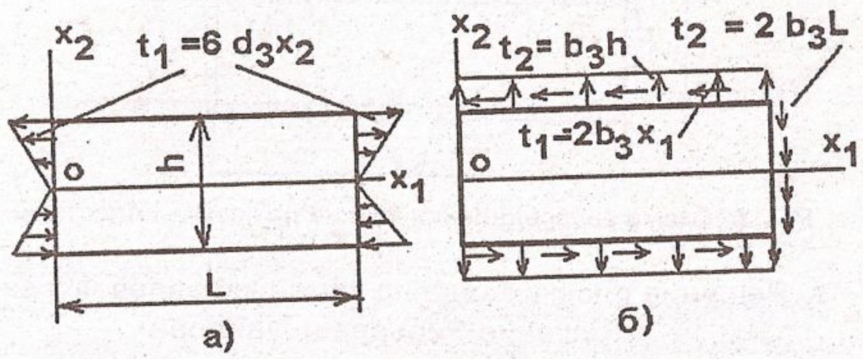

Рис.5. Схема распределения приложеных к пластине усилий.

Если функция Эри задана в виде полинома четвертой степени:

$$\varphi = a_4 x_1^4 + b_4 x_1^3 x_2 + c_4 x_1^2 x_2^2 + d_4 x_1 x_2^3 + e_4 x_2^4, \qquad (38)$$

она удовлетворяет уравнению (20) не при всех произвольных значениях коэффициентов полинома.

Подставив (38) в уравнение (20) убедимся, что оно удовлетворяется лишь при условии $e_4 = -(a_4 + c_4/3)$.

В выражении (38) произвольно можно принимать только четыре коэффициента: a_4, b_4, c_4, d_4. Придавая им различные значения, получим условия нагружения на сторонах прямоугольной пластины.

Принимая $a_4 = b_4 = c_4 = 0, d_4 \neq 0$ по формулам (15) получим

$$\sigma_{11} = 6 d_4 x_1 x_2, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = -3 d_4 x_2^2.$$

Этому случаю соответствует система усилий показанная на рис.6.

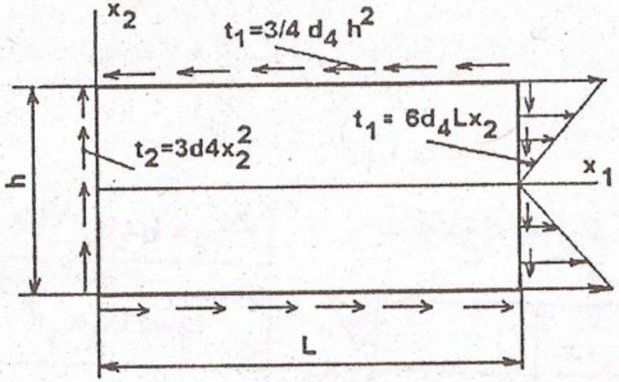

Рис. 6. Схема распределения усилий на кромках пластины.

7. Решение плоских задач с помощью рядов Фурье. Решение Рибьера и Файлона

Рассмотренное решение при помощи функции Эри, заданной в виде алгебраических полиномов, имеет ограниченные возможности. Оно применимо для случаев сравнительно простого изменения нагрузок. В случае произвольного распределения поверхностных сил на кромках полосы решение можно получить с помощью разложения поверхностных сил в тригонометрические ряды и задания функции Эри в виде тригонометрических рядов. Рибьер предложил находить функцию Эри в виде тригонометрического ряда

$$\varphi=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_2)\cos\lambda x_1 \qquad (39)$$

где $f_n(x_2)$ - функция только координаты x_2, $\lambda = n\pi/L$ - целое число, n - любое целое число.

Подставив выражение (39) в (20), получим следующее уравнение для определения функции $f_n(x_2)$:

$$\frac{d^4 f_n}{d x_2^4} - 2\lambda^2\frac{d f_n}{d x_2^2} + \lambda^4 f_n = 0. \qquad (40)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения известно и имеет вид:

$$\begin{aligned} f_n(x_2) = {} & C_{1n}\operatorname{ch}\lambda x_2 + C_{2n}\operatorname{sh}\lambda x_2 + \\ & + C_{3n}x_2\operatorname{ch}\lambda x_2 + C_{4n}x_2\operatorname{sh}\lambda x_2 \end{aligned}, \qquad (41)$$

где C_{in} ($i = 1, 2, 3, 4$; $n = 1, 2, \ldots, \infty$) - постоянные.

Напряжения, соответствующие функции (39), определяются

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}=\sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x_2)\cos\lambda x_1;$$

$$\sigma_{22}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^2 f_n(x_2)\cos\lambda x_1, \qquad (42)$$

$$\sigma_{12}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x_2)\sin\lambda x_1,$$

где $f_n(x_2)$ определяется равенством (41).

Постоянные C_{in}, которые будут содержаться в выражениях (42), определяются из граничных условий путем сравнения коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях. Из граничных условий (33)·и выражений (42) следует, что на торцах полосы, т. е. при $x_1 = 0$ и $x_2 = L$, поверхностные силы должны подчиняться условиям

$$t_1 = 0,\ t_2 \neq 0. \qquad (43)$$

Если в выражениях (43) и (39) заменить $\cos\lambda x_1$, на $\sin\lambda x_1$. а в выражении для σ_{12} изменить знаки у $\sin\lambda x_1$ и $\cos\lambda x_1$, то получим решение, предложенное Файлоном.

В решении Файлона, в отличие от решения Рибьера, на торцах полосы $x_1 = 0$ и $x_2 = L$. Для поверхностных сил в этом случае имеем $t_1 \neq 0$, $t_2 = 0$.

Контрольные вопросы:

1. В чем преимущество применения функции напряжения Эри в виде тригонометрических рядов по сравнению с полиномами при решении плоских задач теории упругости ?

2. Какова максимальная степень полинома, который удовлетворяет бигармоническому уравнению при любых численных значениях коэффициентов ?

8. Плоская задача в полярных координатах

При решении плоских задач для *осесимметричных тел* вращения удобно использовать полярные координаты R и φ. Полярные координаты точек плоского сечения тела соответствует координатам цилиндрической системы координат при ориентации оси OZ вдоль оси симметрии тела вращения.

При переходе от декартовой к полярной системе координат справедливы соотношения $x_1 = R\cos\varphi$, $x_2 = R\sin\varphi$, а также формулы для ковариантных производных

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial R} - \frac{\sin\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial R}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cos\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (44)$$

$$\nabla^2 = \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right).$$

Компоненты перемещений u_R и u_φ определяют компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial u_R}{\partial R}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_R}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\varepsilon_{R\varphi} = \frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial R} - \frac{u_\varphi}{R}. \quad (45)$$

Уравнения совместности имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_{RR}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial R} - \frac{1}{R}\frac{\partial \varepsilon_{RR}}{\partial R} =$$

$$= \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \varepsilon_{R\varphi}}{\partial R\,\partial \varphi} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial \varepsilon_{R\varphi}}{\partial \varphi}, \quad (46)$$

или в форме Бельтрами - Мичелла

$$\Delta(\sigma_{RR} + \sigma_{\varphi\varphi}) = 0. \quad (47)$$

Однородные уравнения равновесия записываются в виде

$$\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial \sigma_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}}{R} = 0,$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{R\varphi}}{\partial R} + 2\frac{\sigma_{R\varphi}}{R} = 0. \quad (48)$$

Закон Гука в полярных координатах *для плоского деформированного состояния* примет вид

$$\varepsilon_{RR} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_{RR} - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{\varphi\varphi}\right),$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{RR}\right), \quad \varepsilon_{R\varphi} = \frac{\sigma_{R\varphi}}{\mu},$$

$$\sigma_{RR} = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{RR} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{RR} + \varepsilon_{\varphi\varphi})\right], \quad (49)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{RR} + \varepsilon_{\varphi\varphi})\right],$$

$$\sigma_{R\varphi} = \mu\,\varepsilon_{R\varphi}.$$

Для *плоского напряженного состояния* закон Гука в полярных координатах примет вид

$$\varepsilon_{RR} = \frac{1}{E}(\sigma_{RR} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E}(\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\sigma_{RR}),$$

$$\varepsilon_{R\varphi} = \frac{\sigma_{R\varphi}}{\mu}; \ \sigma_{RR} = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_{RR} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}], \qquad (50)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}], \ \sigma_{R\varphi} = \mu\sigma_{R\varphi}.$$

Функция напряжений Эри вводится так, чтобы уравнения равновесия (48) удовлетворялись тождественно.

Для этого функция напряжений Эри $F(R,\varphi)$, заданная в полярных координатах, должна быть связана с компонентами тензора напряжений соотношениями

$$\sigma_{RR} = \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0, \ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial R^2},$$

$$\sigma_{R\varphi} = -\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial R}\right). \qquad (51)$$

При отсутствии массовых сил из уравнения Бельтрами - Мичелла для функции Эри $F(R,\varphi)$ получаем бигармоническое уравнение

$$\Delta\Delta F = \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)^2 F. \qquad (52)$$

Решение уравнения (52) можно представить в общей форме

$$F(R,\varphi) = f(R)\cos\varphi,$$

либо

$$F(R,\varphi) = f(R)\sin\varphi.$$

Обобщенное решение (52) в виде ряда Фурье было получено Мичеллом. Оно имеет вид (53).

$$\begin{aligned} F(R,\varphi) = {} & A_0 \ln R + B_0 R^2 \ln R + C_0 R^2 + D_0 R^2\varphi + A_{00} + \\ & + \frac{1}{2}A_1 R\varphi\sin\varphi + \left(B_1 R^3 + \frac{A_{00}}{R} + B_{11} R\ln R\right)\cos\varphi + \\ & + \frac{1}{2}C_1 R\varphi\cos\varphi + \left(D_1 R^3 + \frac{C_{11}}{R} + D_{11} R\ln R\right)\sin\varphi + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty}\left(A_n R^n + B_n R^{n+2} + \frac{A_{1n}}{R^n} + B_{1n} R^{2-n}\right)\cos\varphi + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty}\left(C_n R^n + D_n R^{n+2} + \frac{C_{1n}}{R^n} + D_{1n} R^{2-n}\right)\sin\varphi. \end{aligned} \qquad (53)$$

В частном случае осевой симметрии тела функция Эри зависит только от R. В этом случае решение (53) упрощается и принимает вид (54).

$$F(R) = A\ln R + BR^2\ln R + CR^2 + D. \qquad (54)$$

Компоненты тензора напряжения в силу (51) для случая осевой симметрии (54) примут вид

$$\sigma_{RR} = \frac{1}{R}F'(R) = \frac{A}{R^2} + B(1 + 2\ln R) + 2C,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = F''(R) = -\frac{A}{R^2} + B(3 + 2\ln R) + 2C, \qquad (55)$$

$$\sigma_{R\varphi} = 0.$$

Для сплошной пластины круглой формы решение не будет иметь особенностей в точке R=0 только в случае однородного напряженного состояния ($\sigma_{RR} = \sigma_{\varphi\varphi} = const$).

Общие решения могут быть записаны, исключая точку R=0. Для этого случая с помощью (50) могут быть найдены перемещения :

$$\frac{du_R}{dR}=\frac{1}{E}[(1+\nu)\frac{A}{R^2}+2(1-\nu)B\ln R+(1-3\nu)B+2(1-\nu)C],$$

$$\frac{u_R}{R}=\frac{1}{E}[-(1+\nu)\frac{A}{R^2}-2(1-\nu)B\ln R+(3-\nu)B+2(1-\nu)C]. \quad (56)$$

Интегрируя (56), получаем радиальные перемещения

$$u_R=\frac{1}{E}[-(1+\nu)\frac{A}{R}-2(1-\nu)BR\ln R-(1+\nu)BR+ \quad (57)$$
$$+2(1-\nu)CR+CONST].$$

Для того, чтобы равенство (57) не противоречило второму уравнению (56) необходимо, чтобы $B=CONST=0$. Выражение для радиальных перемещений точек симметричного тела вращения в случае плоского напряженного состояния будет иметь вид :

$$u_R=\frac{1}{E}[-(1+\nu)\frac{A}{R}+2(1-\nu)CR]. \quad (58)$$

Для случая плоской деформации аналог (58) имеет вид

$$u_R=\frac{1}{E}[-(1+\nu)\frac{A}{R}+2(1-\nu-2\nu^2)CR]. \quad (59)$$

Контрольные задания

1. Получите формулы (45)-(50).
2. Получите формулы (56)-(59).
3. В каком случае справедливо выражение (54), как решение плоской задачи в полярных координатах ?
4. Используя (55) и (59), найдити решение для задачи о толстостенной трубе (внутренний радиус R = a, внешний радиус R = b), нагруженной внутренним P_a и внешним P_b давлениями (задача Ламе). Проанализируйте напряженное состояние, реализующееся в сечении трубы.

9. Метод комплексных функций напряжений

Применение математического аппарата теории функций комплексного переменного позволяет получить аналитическое решение плоских задач теории упругости для односвязных областей. Идея

метода состоит в том, что бигармоническая функция (функция напряжений Эри) может быть представлена двумя аналитическими функциями комплексной переменной. Вводится комплексная переменная

$$z=x+iy=Re^{i\varphi}, \quad (60)$$

где $i=\sqrt{-1}$.

Компоненты вектора перемещений представляются как функции Z, также как и компоненты тензора напряжений и тензора деформаций.

$$D(z)=u(x_1)+iv(x_2), \quad (61)$$

где D (z) - комплексная функция перемещения.

Уравнения равновесия и закон Гука в комплексной форме с учетом (60)-(61) будут иметь вид

$$\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{\partial D}{\partial z}+\frac{\partial \overline{D}}{\partial \overline{z}}\phi. \quad (62)$$

Для плоского напряженного состояния

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\frac{\partial D}{\partial z}+\frac{\partial \overline{D}}{\partial \overline{z}}). \quad (63)$$

Для плоского деформированного состояния

$$\sigma_{11}-\sigma_{22}+2i\sigma_{12}=4\mu(\frac{\partial D}{\partial \overline{z}}). \quad (64)$$

Однородное уравнение равновесия в комплексной форме имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{11}-\sigma_{22}+2i\sigma_{12})\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\sigma_{11}+\sigma_{22})=0. \quad (65)$$

Бигармоническое уравнение Бельтрами-Мичелла в комплексной форме примет вид

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2\,\partial \overline{z}^2}=0. \quad (66)$$

Функция Эри $F(x_1,x_2)$ является аналитической функцией $F(z,\overline{z})$, Последовательно интегрируя (66) получим

$$F(z,\bar z)=f_1(z)+\bar z\, f_2(z)+f_3(\bar z)+z\, f_4(\bar z)\,, \qquad (67)$$

где $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(\bar z)$, $f_4(\bar z)$ - произвольные комплексные функции соответствующего аргумента.

Произвольную вещественную бигармоническую функцию на плоскости можно представить двумя аналитическими функциями комплексной переменной с использованием формулы Гурса

$$F(z,\bar z)=\frac{1}{2}\,[\,\bar z\,\varphi(z)+z\,\bar\varphi(z)+\chi(z)+\bar\chi(\bar z)\,]= \qquad (68)$$
$$=Re\,\{\,\bar z\,\varphi(z)+\chi(z)\,\}$$

где z, $\bar z$ - сопряженные переменные, $\varphi(z)$ - аналитическая функция, $\bar\varphi(z)$ - сопряженная с ней функция,

$$\varphi(z)+\bar\varphi(z)=2\,\mathrm{Re}\,\{\,\varphi(z)\,\}\,.$$

Формула (68) представляет собой общее решение бигармонического уравнения $\Delta\,\Delta\,F=0$, которое может быть выражено с помощью *двух функций комплексного переменного* $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

Для функции напряжений (68) справедливы формулы, являющиеся аналогом соотношений (15)

$$\sigma_{11}=-\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^2 F(z,\bar z),\quad \sigma_{22}=\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^2 F(z,\bar z),$$
$$\sigma_{12}=-i\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial \bar z^2}\right)F(z,\bar z). \qquad (69)$$

При подстановке (68) в (69) получаем формулы *Колосова*

$$\boxed{\begin{aligned}&\sigma_{11}+\sigma_{22}=2\,[\,\varphi'(z)+\overline{\varphi}(\bar z)\,]=4\,Re\,\{\varphi'(z)\}\\&\sigma_{11}-\sigma_{22}+2\,i\,\sigma_{12}=-2\,[\,z\,\overline{\varphi}'(\bar z)+\overline{\psi}(\bar z)\,]\end{aligned}}\,. \qquad (70)$$

где $\psi=\chi'(z)$.

Связь компонент вектора перемещения с комплексными функциями напряжения определяется *третьей формулой Колосова*

$$\boxed{2\,\mu\,(\,u+i\,v\,)=\eta\varphi(z)-z\,\overline{\varphi'}(z)-\overline{\psi}(\,\bar z\,)}\,, \qquad (71)$$

где $\eta=(3-\nu)\,/\,(1+\nu)$ для плоского напряженного состояния,

$\eta=(3-4\nu)$ для плоского деформированного состояния,

$\psi=\chi'(z)$.

Граничные условия в перемещениях преобразуются в граничные условия для комплексных функций напряжения по формуле (71).

Пусть на контуре поперечного сечения тела S_u заданы перемещения $u=g_1(S)$, $v=g_2(S)$, тогда на этом контуре функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ должны удовлетворять уравнению

$$\eta\varphi(z)-z\,\overline{\varphi'}(z)-\overline{\psi}(\,\bar z\,)=2\mu\,(\,g_1+i\,g_2\,). \qquad (72)$$

Если на контуре S_σ заданы силовые граничные условия, то для комплексных функций напряжений принимают вид

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial x_2}=$$
$$=i\int_0^S[\,(\,\sigma_{11}n_1+\sigma_{22}\,n_2\,)+i\,(\,\sigma_{22}\,n_1+\sigma_{21}\,n_2\,)\,]\,d\,S+ \qquad (73)$$
$$+\,const=h_1(S)+h_2(S)\;+const$$

Условие (73) с учетом (70) можно преобразовать к виду

$$\varphi(z)-z\,\overline{\varphi'}(z)-\overline{\psi}(\,\bar z\,)=h_1+i\,h_2\,. \qquad (74)$$

Соотношения (72) и (74) позволяют найти решение плоской задачи для внутренней области круга.

Если поперечное сечение тела отлично от круга, используя конформные отображения, эту область и решение следует отобразить на круг.

Таким образом, решение плоской краевой задачи теории упругости сводится к определению двух комплексных аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющим граничным условиям.

Контрольные задания

1. Получите формулы (62)-(64)
2. Получите формулы (70)-(71).
3. Какова последовательность решения плоских задач с применением комплексных функций напряжений?

Рекомендуемая литература

Основная

1. Демидов С.П. Теория упругости.-М. Высшая школа, 1979. -432 с.
2. Новацкий В. Теория упругости.-М. : Мир, 1975. -872 с.
3. Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П. Прикладная механика деформируемого твердого тела.-М.: Высшая школа, 1983. - 349 с.
4. Хан Х. Теория упругости .-М.: Мир, 1988. -343 с.

Дополнительная литература

5. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости-М.: Наука. 1975. - 576 с.
6. Аркулис Г.Э., Дорогобид В.Г. Теория пластичности.-М.: Металлургия 1987. 352 с.
7. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности.- М.: Высшая школа . 1990. -400 с.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Методическое пособие
/Томский государственный университет.
-Томск, 1998 - 32 с.

Подписано в печать 1998 г. Тираж 100 экз. Бесплатно.
Заказ 251. УОП ТГУ, Томск, Никитина, 4