ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Ю. Крайнов, Ю.Н. Рыжих

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Томск – 2007

Рецензенты:

Заведующий кафедрой «Прикладной аэромеханики» профессор И.М. Васенин (Томский государственный университет)

Заведующий кафедрой «Прикладной математики и информатики» профессор С.В. Тимченко (Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники)

Учебно-методическое пособие составлено для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов по курсу «Математические методы моделирования физических процессов» при подготовке бакалавров по направлениям 140400 - Техническая физика, 150300 – Прикладная механика, 210600 – Нанотехнологии и выпускников по специальностям 160701 – Баллистика, 140303 – Физика кинетических явлений, 220402 – Роботы и робототехнические системы, 150502 –Конструирование и производство изделий из композиционных материалов, 150301 – Динамика и прочность машин, 210602 – Наноматериалы на физико-техническом факультете ТГУ.

А.Ю. Крайнов, Ю.Н. Рыжих.

Операционное исчисление. Примеры и задачи: Учебно-методическое пособие.– Томск: Том. ун-т, 2007. –104с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Определение и свойства преобразования Лапласа 4
1.1. Определение преобразования Лапласа 4
1.2. Свойства преобразования Лапласа..................................... 6
1.2.1. Свойство линейности.. 7
1.2.2. Теорема подобия.. 7
1.2.3. Дифференцирование оригинала 8
1.2.4. Дифференцирование изображения.................................... 9
1.2.5. Интегрирование оригинала 10
1.2.6. Интегрирование изображения.. 11
1.2.7. Теорема смещения 13
1.2.8. Теорема запаздывания... 13
1.2.9. Теорема умножения (теорема о свертке) 16
1.3. Примеры нахождения изображений функций-оригиналов 16
2. Отыскание оригинала по заданному изображению 22
2.1. Отыскание оригинала по заданному изображению с использованием свойств преобразования Лапласа и теорем разложения 22
2.2. Примеры нахождения оригиналов по заданному изображению 26
3. Применение преобразования Лапласа к решению задач.............. 39
3.1. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ... 39
3.2. Решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с использованием интеграла Дюамеля 47
3.3. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом 51
3.4. Приложение операционного исчисления к вычислению некоторых интегралов 54
3.5. Решение задач математической физики методом преобразования Лапласа 62
Приложение 1……………………………………………….…………….89
Приложение 2…………………………………………………..………..90
Список литературы………………………………………………......103

1. Определение и свойства преобразования Лапласа[1]

1.1. Определение преобразования Лапласа

Функцией – оригиналом называется любая комплекснозначная фунция *f(t)* действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям:

1. *f(t)* интегрируема на всяком конечном интервале оси t и может содержать конечное число разрывов I рода;
2. для всех отрицательных t

$$f(t) = 0.$$

3. |*f(t)*| возрастает не быстрее показательной функции, то есть существуют такие постоянные $M>0$ и $s_0 \geq 0$, что для всех

$$\left|f(t)\right| \leq Me^{s_0 t}. \tag{1.1}$$

П р и м е р 1. Показать, что функция

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t}\sin 3t, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

является функцией–оргининалом.

Действительно, функция *f(t)* локально интегрируема:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{2t}\sin 3t dt$$

существует для любых конечных t_1 и t_2.

Условие 2 выполнено в силу задания функции.

---

[1] **ЛАПЛАС, ПЬЕР СИМОН** (1749–1827), французский математик, физик и астроном. Родился 23 марта 1749 в Бомон-ан-Ож (Нормандия). Учился в школе монашеского ордена бенедиктинцев. В 1766 приехал в Париж. Занимался математикой, публиковался в математическом журнале Ж.Лагранжа. В 1771 по рекомендации Даламбера стал профессором Военной школы в Париже. В 1790 был назначен председателем Палаты мер и весов. После прихода к власти Наполеона занимал пост министра внутренних дел (1799), получил титул графа. Лаплас – автор фундаментальных работ по математике и математической физике, прежде всего – трактата Аналитическая теория вероятностей, в котором можно обнаружить многие позднейшие открытия теории вероятностей, сделанные другими математиками. В нем рассмотрены некоторые вопросы теории игр, теорема Бернулли и ее связь с интегралом нормального распределения, теория наименьших квадратов; вводится «преобразование Лапласа», которое позже стало основой операционного исчисления. Широко известно уравнение Лапласа в частных производных, применяющееся в теории потенциала, тепло- и электропроводности, гидродинамике. Умер Лаплас в Париже 5 марта 1827.

Наконец, для любых вещественных t

$$\left|e^{2t}\sin 3t\right| \le e^{s_0 t},$$

так что в качестве M в условии в можно взять любое число ≥ 1; $s_0 = 2$.

Простейшей функцией–оригиналом является так называемая единичная функция Хевисайда[2]

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\varphi(t)\eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

так, что если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3, то $\varphi(t)\eta(t)$ удовлетворяет всем условиям, налагаемым на функции–оригиналы.

1. Проверить, какие из указанных функций являются функциями–оригиналами:

а) $f(t) = b^t\eta(t)$, $b > 0$, $b \ne 1$; б) $f(t) = e^{(2+4i)t}\eta(t)$;

в) $f(t) = \dfrac{1}{t-3}\eta(t)$; г) $f(t) = t^2\eta(t)$;

д) $f(t) = \operatorname{ch}(3-i)t\eta(t)$; е) $f(t) = \operatorname{tg} t\eta(t)$;

ж) $f(t) = t^t\eta(t)$; з) $f(t) = e^{-t}\cos t\eta(t)$;

и) $f(t) = e^{t^2}\eta(t)$; к) $f(t) = e^{-t^2}\eta(t)$;

---

[2] **ХЕВИСАЙД, ОЛИВЕР** (1850-1925), английский физик и математик. Родился 18 мая 1850 в Лондоне. Работал в телеграфной компании в Ньюкасле, в 1874 был вынужден оставить работу из-за прогрессирующей глухоты. Научные исследования проводил в собственной лаборатории. Основные физические работы посвящены электромагнетизму и математической физике. В 1892 занялся теоретическими аспектами проблем телеграфии и передачи электрических сигналов. Предложил увеличивать индуктивность телефонных линий для улучшения дальней связи. Ввел понятие импеданса, т.е. полного сопротивления синусоидальному переменному току электрической цепи, содержащей емкости и индуктивности. Является одним из создателей операционного исчисления. Умер Хевисайд в Торки (графство Девон) 3 февраля 1925.

л) $f(t)=\dfrac{1}{t^2+2}\eta(t)$;

м) $f(t)=\eta(t)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\eta(t-k)\cdot$

В дальнейшем для сокращения записи будем писать $f(t)$ вместо $f(t)\eta(t)$, считая, что рассматриваемые нами функции продолжены нулем для отрицательных t.

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу называется фунция $F(p)$ комплексного переменного $p=s+i\sigma$, определяемая равенством:

$$F(p)=\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt. \tag{1.2}$$

Интеграл (1.2) называется преобразованием Лапласа. Символически это обозначается $f(t)\doteqdot F(p)$. Функция $F(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p=s>s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

П р и м е р 2. Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(t)=e^{2t}$$

Р е ш е н и е. Для функции $f(t)=e^{2t}$ имеем $s_0=2$. Поэтому изображение $F(p)$, будет во всяком случае определено и аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p>2$. Имеем

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{2t}e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-2)t}dt=\frac{1}{-(p-2)}e^{-(p-2)t}\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{1}{p-2}.$$

Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

2. $f(t)=t$.
3. $f(t)=te^t$.
4. $f(t)=\sin 3t$.
5. $f(t)=t^{\alpha}\ (\alpha>-1)$.

1.2. Свойства преобразования Лапласа

При практическом применении преобразования Лапласа вычисления ведутся не над заданными функциями, а над их изображениями. Весь процесс преобразования Лапласа можно представить себе как перевод с одного языка на другой. При таком переводе каждому слову одного языка соответствует определенное слово другого языка. Совершенно так же при преобразовании Лапласа каждой функции пространства оригиналов соответствует определенная функция в пространстве изображений. Роль словаря, необходимого для перевода с одного языка на другой, при преобразовании Лапласа играет *таблица соответствий между оригиналами и изображениями.* Несколько самых необходимых соответствий приводится в приложении 1. Но для того чтобы перевести с одного языка на другой целое предложение, недостаточно знать перевод отдельных слов. В применении к преобразованию Лапласа это означает следующее: если над функцией, например, в пространстве оригиналов производится какая-либо операция, например дифференцирование или интегрирование, то в пространстве изображений этой операции должна отвечать вполне определенная другая операция. Аналогичным образом, если в пространстве оригиналов несколько функций комбинируются друг с другом, например перемножаются, то в пространстве изображений такой комбинации должна отвечать вполне определенная другая комбинация.

Таким образом, необходимо знать не только отображение (или перевод) отдельных функций, но и правила отображения операций. Именно в этом смысле и следует понимать приводимые ниже «грамматические правила» преобразования Лапласа.

1.2.1. Свойство линейности

Для любых комплексных постоянных α и β выполняется

$$\alpha f(t)+\beta g(t) \doteqdot \alpha F(p)+\beta G(p),$$

где

$$f(t) \doteqdot F(p), \quad g(t) \doteqdot G(p).$$

Найти изображение функций

6. $f(t)=(1+t)$. 7. $f(t)=\sin t-\cos t$. 8. $f(t)=t+\dfrac{1}{2}e^{-t}$.

1.2.2. Теорема подобия

Для любого постоянного

$$\alpha>0, \ f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Пользуясь теоремой подобия, найти изображения следующих функций:

9. $f(t)=e^{\alpha t}$.

10. $f(t)=\sin 4t$.

11. $f(t)=\cos \omega t$.

12. $f(t)=\operatorname{sh} 3t$.

13. Пусть $f(t)\risingdotseq F(p)$.

Найти изображение функции

$$f\left(\frac{t}{a}\right), \quad (a>0)$$

непосредственно и с помощью теоремы подобия.

Пользуясь теоремами линейности и подобия, найти изображения следующих функций:

14. $f(t)=\sin^2 t$.

15. $f(t)=\sin mt \cos nt$.

16. $f(t)=\cos^3 t.$

17. $f(t)=\sin mt \sin nt$.

18. $f(t)=\sin^4 t$.

19. $f(t)=\cos mt \cos nt$.

1.2.3. Дифференцирование оригинала

Если функции $f(t),\ f'(t),\ \ldots,\ f^{(n)}(t)$ являются функциями–оригиналами и $f(t)\risingdotseq F(p)$, то

$$\begin{aligned} &f'(t)\risingdotseq pF(p)-f(0),\\ &f''(t)\risingdotseq p^2F(p)-pf(0)-f'(0), \qquad (1.3)\\ &f^{(n)}(t)\risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0), \end{aligned}$$

где

$$f^{(k)}(0), k=1,2,\ldots,n-1$$

определяется как

$$\lim_{t\to 0} f^{(k)}(t).$$

П р и м е р 3. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции $f(t)=\sin^2 t$.

Р е ш е н и е. Пусть $f(t)\risingdotseq F(p)$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0).$$

Но $f(0) = 0$, с другой стороны

$$f'(t) = 2\sin t \cos t = \sin 2t \doteqdot \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{p^2 + 4} = pF(p),$$

откуда

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)} \doteqdot \sin^2 t.$$

Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение следующих функций:

20. $f(t) = \cos^2 t$.
21. $f(t) = \sin^3 t$.
22. $f(t) = t \sin \omega t$.
23. $f(t) = \cos^4 t$.
24. $f(t) = t \cos \omega t$.
25. $f(t) = te^t$.

1.2.4. Дифференцирование изображения

Дифференцирование изображения соответствует умножению на *(-t)* оригинала. Если $f(t) \doteqdot F(p)$ то

$$F'(p) \doteqdot -tf(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t)$$

П р и м е р 4. Найти изображение функции

$$f(t) = t^2 e^t.$$

Р е ш е н и е. Имеем $e^t \doteqdot \dfrac{1}{p-1}$. По теореме о дифференцировании изображения

$$\left(\frac{1}{p-1}\right)' \doteqdot -te^t ,$$

откуда

$$-\frac{1}{(p-1)^2} \doteqdot -te^t .$$

Далее

$$\left(-\frac{1}{(p-1)^2}\right)' \doteqdot -t\left(-te^t\right)$$

или

$$\frac{2}{(p-1)^3} \doteqdot t^2e^t .$$

Найти изображения следующих функций:

26. $f(t) = t^2 \cos t$.
27. $f(t) = t\left(e^t + \operatorname{ch} t\right)$.
28. $f(t) = (t+1)\sin 2t$.
29. $f(t) = t \operatorname{sh} 3t$.

1.2.5. Интегрирование оригинала

Интегрирование оригинала соответствует делению изображения на p. Если $f(t) \doteqdot F(p)$ то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$$

П р и м е р 5. Найти изображение функции $\int_0^t e^\tau d\tau$.

Р е ш е н и е. Из примера 2 известно, что $e^t \doteqdot \dfrac{1}{p-1}$, тогда по теореме об интегрировании оригинала

$$\int_0^t e^{\tau}d\tau \doteqdot \frac{\frac{1}{p-1}}{p}=\frac{1}{p\left(p-1\right)}.$$

Найти изображение следующих функций:

30. $f\left(t\right)=\int\limits_0^t \sin\tau d\tau$.

31. $f\left(t\right)=\int\limits_0^t \left(\tau+1\right)\cos\omega\tau d\tau$.

32. $f\left(t\right)=\int\limits_0^t \tau\,\mathrm{sh}\,2\tau d\tau$.

33. $f\left(t\right)=\int\limits_0^t \cos^2\omega\tau d\tau$.

34. $f\left(t\right)=\int\limits_0^t \mathrm{ch}\,\omega\tau d\tau$.

35. $f\left(t\right)=\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau}d\tau$.

1.2.6. Интегрирование изображения

Если интеграл $\int\limits_p^{\infty} F(p)dp$ сходится, то он служит изображением функции *f(t)/t*:

$$\frac{f(t)}{t}\doteqdot\int\limits_p^{\infty} F(p)dp.$$

П р и м е р 6. Найти изображение функции $\dfrac{\sin t}{t}$.

Р е ш е н и е. Как известно, $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$. Поэтому

$$\frac{\sin t}{t}\doteqdot\int\limits_p^{\infty}\frac{dp}{p^2+1}=\operatorname{arctg} p\Big|_p^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p=\operatorname{arcctg} p.$$

Найти изображение следующих функций:

36. $\dfrac{e^t-1}{t}$. 37. $\dfrac{1-e^{-t}}{t}$. 38. $\dfrac{\sin^2 t}{t}$. 39. $\dfrac{1-\cos t}{t}$.

40. $\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$. 41. $\dfrac{e^t-1-t}{t}$. 42. $\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$.

С помощью теоремы об интегрировании изображения легко вычисляются некоторые несобственные интегралы.

Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$ и пусть сходится несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt .$$

Тогда

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(p)\,dp, \tag{1.4}$$

где интеграл справа можно вычислять по положительной полуоси.

П р и м е р 7. Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$.

Р е ш е н и е. Имеем $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$, по формуле (1.4)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{dp}{p^2+1} = arctgp\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Вычислить интегралы:

43. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt \ \ (a>0,\ b>0)$.

44. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sin at}{t}dt \ \ (\alpha>0,\ a>0)$.

45. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}\sin mt\,dt \ \ (\alpha>0,\ \beta>0,\ m>0)$.

46. $\int\limits_0^{\infty} \frac{Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ce^{-\gamma t} + De^{-\delta t}}{t} dt,$

$(A + B + C + D = 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \delta > 0).$

47. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt,\ (a > 0,\ b > 0).$

48. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin at \sin bt}{t} dt,\ (a > 0,\ b > 0).$

1.2.7. Теорема смещения

Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то для любого комплексного p_0 выполняется равенство:

$$e^{p_0 t} f(t) \doteqdot F(p - p_0).$$

П р и м е р 8. Найти изображение функции $f(t) = e^{-t}\cos 2t$.

Р е ш е н и е. Имеем $\cos 2t \doteqdot \frac{p}{p^2 + 4}$. По теореме смещения $(p_0 = -1)$

$$e^{-t}\cos 2t \doteqdot \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} = \frac{p+1}{p^2 + 2p + 5}.$$

Найти изображение следующих функций:

49. $e^{2t}\sin t$. 50. $e^{t}\cos nt$. 51. $e^{-t}t^3$. 52. $e^{t}\,\mathrm{sh}\,t$.

53. $te^{t}\cos t$. 54. $e^{3t}\sin^2 t$. 55. $e^{-\alpha t}\cos^2 \beta t$.

1.2.8. Теорема запаздывания

Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то для любого положительного τ выполняется:

$$f(t - \tau) \doteqdot e^{-p\tau} F(p).$$

Теорему удобно использовать при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются разными аналитическими выражениями.

П р и м е р 9. Найти изображение функции

$$f(t-1)=(t-1)^2\eta(t-1).$$

Р е ш е н и е. Для функции $f(t)=t^2\eta(t)$ имеем

$$f(t)\doteqdot\frac{2}{p^3}\cdot$$

По теореме запаздывания для функции $(t-1)^2\eta(t-1)$ имеем

$$(t-1)^2\eta(t-1)\doteqdot e^{-p}\frac{2}{p^3}.$$

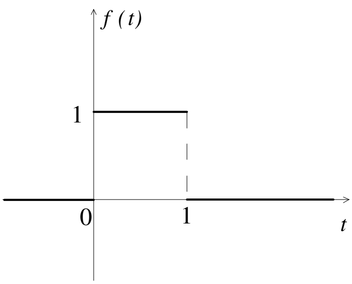
Найти изображение функций:

56. $\sin(t-b)\eta(t-b)$.

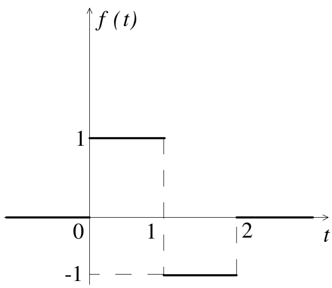
57. $\cos^2(t-b)\eta(t-b)$.

58. $e^{t-2}\eta(t-2)$.

Найти изображения следующих функций, заданных графически:

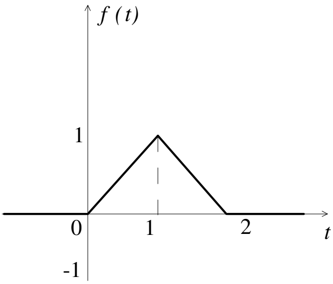


59.

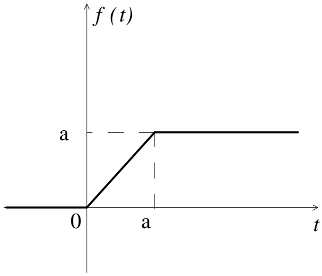


60 .

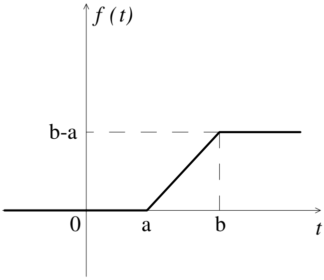
61.



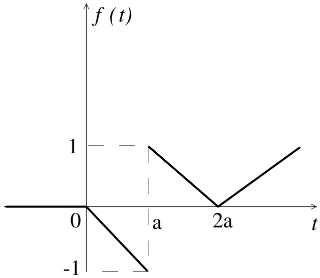
62.



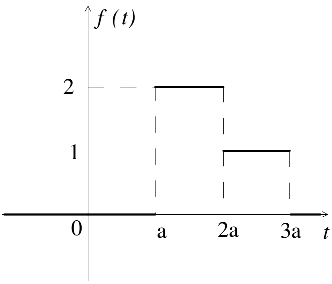
63.



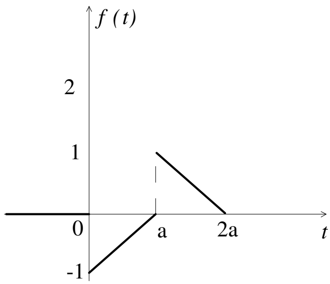
64.



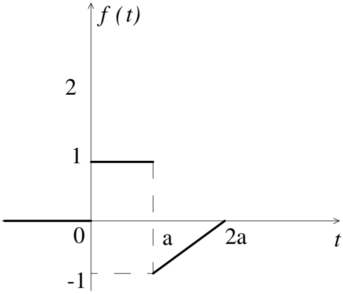
65.



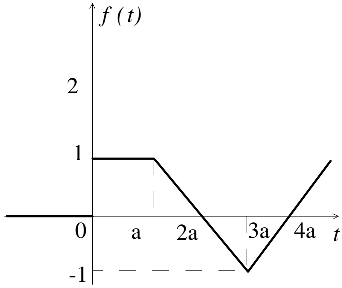
66.



67.



68.



1.2.9. Теорема умножения (теорема о свертке)

Если $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$, то произведение двух изображений $F(p)$ и $G(p)$ также является изображением, причем

$$F(p)\cdot G(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Интеграл в правой части называется *сверткой* функций $f(t)$ и $g(t)$ и обозначается символом $f(t)*g(t)$.

Найти изображения следующих функций:

69. $\int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau.$

70. $\int_0^t \cos(t-\tau)e^{2\tau}d\tau.$

71. $\int_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{ch}\tau d\tau.$

72. $\int_0^t (t-\tau)^n f(\tau)d\tau.$

73. $\int_0^t e^{2(\tau-t)}\tau^2 d\tau.$

1.3. Примеры нахождения изображений функций-оригиналов

Рассмотрим некоторые примеры на нахождение изображений функций–оригиналов.

1. Пользуясь определением функции–изображения найти изображения $F(p)$ заданных функций:

1.1. $f(t) = e^{\alpha t}$.

По определению преобразования Лапласа (2) имеем:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}dt = -\frac{1}{p-\alpha}e^{-(p-\alpha)}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Таким образом мы получили соответствие $e^{\alpha t} \doteqdot \dfrac{1}{p-\alpha}$.

1.2. $f(t) = \sin t$.

По определению преобразования Лапласа (2) имеем:

$$F(p)=\int_0^\infty \sin t e^{-pt}dt = \rightarrow$$

Вычисляем этот интеграл по частям:

$$\rightarrow = -\frac{\sin t\, e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\cos t\, e^{-pt}}{p}dt =$$

$$= -\frac{\cos t\, e^{-pt}}{p^2}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\sin t\, e^{-pt}}{p^2}dt = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}\int_0^\infty \sin t\, e^{-pt}dt.$$

Из полученного равенства выразим

$$\int_0^\infty \sin t\, e^{-pt}dt = \frac{1}{p^2}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{p^2}\right)} = \frac{1}{(p^2+1)}.$$

То есть $\sin t \risingdotseq \frac{1}{(p^2+1)}$.

1.3. $f(t)=t.$

По определению:

$$F(p)=\int_0^\infty t\, e^{-pt}dt = -\frac{t\, e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{p}dt = \frac{1}{p^2}.$$

И получили соответствие: $t \risingdotseq \frac{1}{p^2}$.

2. Используя определение и свойства преобразования Лапласа найти изображения $F(p)$ для заданных функций–оригиналов:

2.1. $f(t)=\sin 4t.$

Используя теорему подобия и результат решения примера 1.2. получим:

$$\sin 4t \risingdotseq \frac{4}{(p^2+16)} = F(p).$$

2.2. $f(t)=\sin^2 t$.

По теореме о дифференцировании оригинала известно:

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)\,,$$

где

$$F(p) \risingdotseq f(t).$$

Продифференцировав выражение $f(t)$, получим:

$$f'(t) = \left(\sin^2 t\right)' = 2\sin t\cos t = \sin 2t.$$

Из примера 1.2. известно:

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{(p^2+1)}.$$

Тогда

$$f'(t) = \sin 2t \risingdotseq \frac{2}{(p^2+4)} = pF(p) - f(0).$$

Выразим $F(p)$ из полученного выражения, принимая во внимание, что

$$f(0) = 0,$$

получим:

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

2.3. $f(t) = t^2\cos t.$

По определению преобразования Лапласа находим (аналогично с примером 1.2.):

$$F_1(p) = \int_0^\infty \cos t\, e^{-pt}dt = \frac{p}{(p^2+1)}.$$

Пользуясь свойством дифференцирования изображения можно получить:

$$F_1(p) \risingdotseq \cos t,\ F_1'(p) \risingdotseq -t\cos t,\ F_1''(p) \risingdotseq t^2\cos t.$$

Отсюда видно, что

$$F(p) = F_1''(p) = \left(\frac{p}{(p^2+1)}\right)'' = \frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}.$$

Таким образом

$$t^2\cos t \risingdotseq \frac{2p^3-6p}{\left(p^2+1\right)^3}.$$

2.4. $f(t)=\int\limits_0^t \sin\tau d\tau.$

Так как функция–оригинал представляет собой интеграл, то для нахождения изображения будем использовать теорему об интегрировании оригинала:

$$\int\limits_0^t \sin\tau\, d\tau \doteqdot F(p)=\frac{F_1(p)}{p},$$

где

$$F_1\left(p\right)\doteqdot \sin t \doteqdot \frac{1}{\left(p^2+1\right)}.$$

Тогда

$$F(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}.$$

2.5. $f(t)=\dfrac{e^t-1}{t}.$

В знаменателе функции–оригинала стоит t, поэтому можно использовать свойство интегрирования изображения. В соответствии с этим свойством найдем изображение функции

$$f_1(t)=e^t-1.$$

Легко найти по определению преобразования Лапласа (1.2)

$$e^t \doteqdot \frac{1}{p-1}, \quad 1\doteqdot \frac{1}{p}.$$

Принимая во внимание свойство линейности запишем:

$$f\left(t\right)\doteqdot \frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}.$$

Тогда в соответствии со свойством интегрирования получим:

$$f(t)=\frac{e^t-1}{t}\doteqdot \int\limits_p^\infty\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)dp=\ln\left(\frac{p}{p-1}\right)=F(p).$$

2.6. $f\left(t\right)=e^t\,\mathrm{sh}\,t.$

1 способ.

Наличие в выражении *f(t)* множителя e^t говорит о том, что здесь может быть применена теорема смещения. В соответствии с этой теоремой найдем изображение от $\operatorname{sh} t$:

$$F_1(t)=\int_0^t \operatorname{sh} t\, e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\operatorname{sh} t\, e^{-pt}\Bigg|_0^\infty+\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch} t\, e^{-pt}}{p}dt=$$

$$=0+\frac{\operatorname{ch} t}{p^2}e^{-pt}\Bigg|_0^\infty+\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch} t\, e^{-pt}}{p^2}dt=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^2}\int_0^\infty \operatorname{ch} t\, e^{-pt}dt.$$

Из этого равенства следует, что

$$F_1(t)=\int_0^t \operatorname{sh} t\, e^{-pt}dt=\frac{1}{p^2-1}.$$

Согласно теореме смещения

$$F(p)\doteqdot e^t\operatorname{sh} t\doteqdot F_1(p-1)=\frac{1}{(p-1)^2-1}=\frac{1}{p^2-2p}=\frac{1}{p(p-2)}.$$

2 способ.

Преобразуем выражение *f(t)*:

$$f(t)=e^t\operatorname{sh} t=\frac{1}{2}\left(e^{2t}-1\right)\doteqdot\to$$

Воспользовавшись решением примера 2.5. получим:

$$\to\doteqdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p(p-2)}.$$

$$F(p)\doteqdot\frac{1}{p(p-2)}.$$

2.7. $f(t)=\sin(t-b)\,\eta(t-b).$

В выражении *f(t)* из переменной *t* вычитается константа b, поэтому можно применить теорему запаздывания:

$$f(t)=f_1(t-b)=\sin(t-b)\,\eta(t-b).$$

Найдем изображение функции $f_1(t)$:

$$f_1(t) = \sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1} = F_1(p).$$

Согласно теореме запаздывания

$$f(t) \risingdotseq e^{-bp} F_1(p) = e^{-bp} \frac{1}{p^2+1}.$$

В итоге получаем изображение заданной функции в виде:

$$F(p) = e^{-bp} \frac{1}{p^2+1}.$$

2.8. $f(t) = t^2 \eta(t-2)$.

Запишем функцию $f(t)$ через степени разности $t–2$:

$$t^2 = \left[(t-2)+2\right]^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4.$$

Перейдем к изображениям в каждом слагаемом, учитывая теорему запаздывания, получим:

$$f(t) \risingdotseq \left(\frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p} \right) e^{-p} = F(p).$$

2.9. $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau) e^{\tau} d\tau.$

Здесь можно применить теорему умножения, согласно которой выберем в качестве функции $f(t)=t$, в качестве функции $g(t) = e^t$. Найдем для этих функций изображения:

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}, \quad g(t) \risingdotseq \frac{1}{p-1}.$$

Тогда в соответствии с теоремой умножения получим:

$$F(p) \risingdotseq \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Мы рассмотрели несколько примеров на отыскание изображения для заданной функции–оригинала с использованием определения преобразования Лапласа и его свойств. Часто возникает необходимость совершить обратный переход – по заданному изображению определить функцию–оригинал.

2. Отыскание оригинала по заданному изображению

2.1. Отыскание оригинала по заданному изображению с использованием свойств преобразования Лапласа и теорем разложения

Отыскание функции–оригинала по заданному изображению задача более сложная. Для ее решения требуется применять знания свойств преобразования Лапласа, теоремы, приведенные ниже в этом разделе.

1. ***Первая теорема разложения.*** Если $F(p)$ – аналитическая функция в окрестности бесконечно удаленной точки и равна в ней нулю и если Лорановское разложение $F(p)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k},$$

то оригиналом $F(p)$ служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}, \qquad (2.1)$$

причем этот ряд сходится при всех t.

Здесь в соответствии со свойством линейности для каждого члена ряда Лорана c_k / p^k находится оригинал $c_k \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}$.

2. ***Вторая теорема разложения.*** Если функция $F(p)$ мероморфна (имеет своими особыми точками Толька полюса) и аналитична в некоторой полуплоскости $Re\ p > s_0$, существует система окружностей C_n где

$$|p| = R_1 < R_2 < \ldots < R_n \to \infty,$$

на которой $F(p)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg(p)$ и для любого $a > s_0$ абсолютно сходится интеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp,$$

тогда оригиналом $F(p)$ служит функция

$$f(t) = \sum_{p_k} \underset{p_k}{res} \left[F(p) e^{pt} \right],$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$ в порядке возрастания их модулей.

В частности, если $F(p) = Q(p)/R(p)$ – правильная рациональная дробь, то оригиналом ее служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{n_k - 1}}{dp^{n_k - 1}} \left[F(p) e^{pt} (p - p_k)^{n_k} \right],$$

где p_k – полюсы функции $F(p)$ кратности n_k и сумма берется по всем полюсам. Если все полюсы $F(p)$ простые, то формула упрощается и принимает вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}.$$

3. Если $F(p) = Q(p)/R(p)$ является правильной рациональной дробью, то для нахождения оригинала $f(t)$ разлагают ее на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства 1 – 9 преобразования Лапласа.

Для заданных изображений найти оригиналы и построить их графики:

74. $F(p) = \dfrac{2e^{-p}}{p^3}$.

75. $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^2}$.

76. $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p-1}$.

77. $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{p+3}$.

Найти оригиналы по заданному изображению:

78. $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 4p + 5}$.

79. $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 4p + 3}$.

80. $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)^2}$.

81. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

82. $F(p) = \dfrac{1}{p + 2p^2 + p^3}$.

83. $F(p) = \dfrac{1}{7 - p + p^2}$.

84. $F(p) = \dfrac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^5 + 2p^4 + 2p^3}$.

85. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

86. $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

87. $F(p)=\dfrac{n!}{p(p+1)(p+2)...(p+n)}$.

88. $F(p)=\dfrac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}$.

89. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

90. $F(p)=\dfrac{p}{p^3+1}$.

91. $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

92. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

93. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.

94. $F(p)=\dfrac{3p^2}{(p^3-1)^3}$.

95. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

96. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$.

97. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

98. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}\left(e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p}\right)$.

99. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

100. $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{p}{2}}}{p(p+1)(p+4)}$.

101. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-2p}}{p^3}+\dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$.

102. $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{p}{3}}}{p(p^2+1)}$.

4. ***Теорема Эфроса***. Пусть $f(t)\doteqdot F(p)$ и $\Phi(p)$ и $q(p)$ – аналитические функции, такие, что

$$\Phi(p)e^{-\tau q(p)}\doteqdot\varphi(t,\tau).$$

Тогда выполняется:

$$F\left[q(p)\right]\Phi(p)\doteqdot\int_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)d\tau.$$

Достаточно часто при решении задач операционным методом встречаются изображения, являющиеся частными случаями теоремы Эфроса:

$$\Phi(p)=1/\sqrt{p}, \quad q(p)=\sqrt{p}.$$

Для таких $\Phi(p)$, $q(p)$, $\varphi(t,\tau)$ имеет вид:

$$\varphi(t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\tau^2/4t}$$

тогда для функции

$$F(p)=\frac{F^*(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-\tau^2/4t}d\tau,$$

где $f(t)\risingdotseq F^*(p)$

Используя теорему Эфроса, найти оригиналы следующих функций (a – вещественное число).

103. $F(p)=\dfrac{e^{-\sqrt{p}\frac{x}{a}}}{p}$.

104. $F(p)=\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}$.

105. $F(p)=\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p^2}$.

106. $F(p)=\dfrac{e^{-\sqrt{p}\frac{x}{a}}}{\sqrt{p}\left(\dfrac{\sqrt{p}}{a}+h\right)}$.

107. $F(p)=\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\left(\sqrt{p}+a\right)}$.

Используя теорему Эфроса, вычислить следующие интегралы:

108. $I(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{ch}\tau e^{-\tau^2/4t}d\tau$. 109. $I(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \cos\tau e^{-\tau^2/4t}d\tau$.

110. $I(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \tau\operatorname{sh}\tau e^{-\tau^2/4t}d\tau$. 111. $I(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \tau\sin\tau e^{-\tau^2/4t}d\tau$.

5. ***Формула Дюамеля***[3]**.** Если функция $f(t)$ непрерывна на положительной полуоси $[0,+\infty)$, а функция $\varphi(t)$ непрерывно

[3] **ДЮАМЕЛЬ ЖАН МАРИ КОНСТАНТ** родился 05.02.1797 в Сен-Мало, умер 29.04.1872 в Париже – французский математик, иностранный член корреспондент Петербургской АН (1859), член Парижской АН (1840), в 1830-69 профессор Политехнической школы в Париже. Автор учебников по математическому анализу и механике. Основные труды по математическому анализу и геометрии.

дифференцируема в области $\left[0,+\infty\right)$, $F\left(p\right)\risingdotseq f\left(t\right)$, $\Phi\left(p\right)\risingdotseq\varphi\left(t\right)$, то выполняется соотношение:

$$pF\left(p\right)\Phi\left(p\right)\risingdotseq f(t)\varphi(0)+\int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau.$$

2.2. Примеры нахождения оригиналов по заданному изображению

Рассмотрим некоторые примеры на нахождение функции–оригинала по заданному изображению. В следующих примерах необходимо найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$.

1. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$.

1 способ.

Разложим функцию $F(p)$ в ряд Лорана[4]:

$$F\left(p\right)=\frac{1}{p\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}-...\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{p^{2n+1}}.$$

Для каждого члена полученного ряда найдем оригинал:

$$\frac{1}{p}\risingdotseq 1,\ \frac{1}{p^3}\risingdotseq\frac{t^2}{2!},....,\ \frac{1}{p^{2n+1}}\risingdotseq\frac{t^{2n}}{\left(2n\right)!}.$$

Тогда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{p^{2n+1}}\risingdotseq\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-...\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n t^{2n}}{\left(2n\right)!}=\cos t.$$

Таким образом мы получим

$$F\left(p\right)=\frac{p}{p^2+1}\risingdotseq\cos t.$$

---

[4] **ЛОРАН ПЬЕР АЛЬФОНС** (1813-1854, Париж) – французский математик. По профессии военный инженер ему принадлежит (1843) теорема о разложении функции комплексного переменного, аналитической в круговом кольце, в ряд (т.н. ряд Лорана).

2. $F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$.

Разложим $F(p)$ в ряд Лорана:

$$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^n}{n!}\frac{1}{p^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^n}{n!}\frac{1}{p^{n+1/2}}\ .$$

Для каждого члена разложения найдем оригинал:

$$\frac{1}{p^{1/2}}\doteqdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)t^{1/2}},\ \frac{1}{p^{3/2}}\doteqdot\frac{t^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)},\ \frac{1}{p^{n+1/2}}\doteqdot\frac{t^{n-1/2}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

где $\Gamma(x)$ – Гамма–функция[5]. Для нее известно :

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2})=(n-\tfrac{1}{2})\Gamma(n-\tfrac{1}{2})=(n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\ldots\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})=$$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n}\Gamma(\tfrac{1}{2})=\rightarrow$$

Известно, что

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi},\quad 2\cdot4\cdot6\ldots\cdot2n=2^n n!\ .$$

Тогда

$$\rightarrow=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\frac{2\cdot4\cdot6\ldots\cdot2n}{2^n n!}=\sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

И оригинал n–того члена ряда запишется в виде:

$$\frac{t^{n-1/2}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}=\frac{2^n n!}{\sqrt{\pi}(2n)!}t^{n-1/2}.$$

Просуммируем полученные выражения и получим искомую функцию $f(t)$:

---

[5] **ГАММА-ФУНКЦИЯ** [Г-функция, Г(x)], одна из важнейших специальных функций, обобщающая понятие факториала; для целых положительных n равна $\Gamma(n)=(n-1)!=1\cdot2\cdot(n-1)$. Впервые введена Л. Эйлером в 1729. Гамма-функция для действительных $x>0$ определяется равенством $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, другое обозначение $\Gamma(x+1)=p(x)=x!$ Через Гамма-функцию выражается большое число определённых интегралов, бесконечных произведений и сумм рядов. Гамма-функция распространяется и на комплексные значения аргумента.

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{a^n}{n!}\frac{2^n n!}{\sqrt{\pi}(2n)!}t^{n-1/2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(2\sqrt{at})^{2n}}{(2n)!}=\frac{\cos(2\sqrt{at})}{\sqrt{\pi t}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}\risingdotseq\frac{\cos(2\sqrt{\pi t})}{\sqrt{\pi t}}.$$

3. $F(p)=\dfrac{1}{p^4-\omega^4}$.

1 способ.

Преобразуем функцию $F(p)$ к виду:

$$F(p)=\frac{1}{(p^2-\omega^2)(p^2+\omega^2)}=$$

$$=\frac{1}{(p-\omega)(p+\omega)(p-i\omega)(p+i\omega)}.$$

Очевидно, что она имеет особые точки

$$p_1=\omega,\quad p_2=-\omega,\quad p_3=i\omega,\quad p_4=-i\omega,$$

которые являются простыми полюсами. Согласно второй теореме разложения

$$f(t)=\sum_{k=1}^{4}\underset{p_k}{res}\left[F(p)e^{pt}\right].$$

Так как особые точки являются простыми полюсами, то вычеты в них находятся по формуле:

$$\underset{p_k}{res}\left(F(p)e^{pt}\right)=\underset{p_k}{res}\frac{Q(p)e^{pt}}{R(p)}=\frac{Q(p_k)e^{p_k t}}{R'(p_k)}.$$

$$\underset{p_1}{res}\left(F(p)e^{pt}\right)=\frac{e^{p_1 t}}{4p_1^3}=\frac{e^{\omega t}}{4\omega^3},\quad \underset{p_2}{res}\left(F(p)e^{pt}\right)=\frac{e^{p_2 t}}{4p_2^3}=-\frac{e^{-\omega t}}{4\omega^3},$$

$$\underset{p_3}{res}\left(F(p)e^{pt}\right)=\frac{e^{p_3 t}}{4p_3^3}=-\frac{e^{i\omega t}}{4i\omega^3},\quad \underset{p_4}{res}\left(F(p)e^{pt}\right)=\frac{e^{p_4 t}}{4p_4^3}=\frac{e^{-i\omega t}}{4i\omega^3}.$$

Тогда согласно второй теореме разложения получим:

$$f(t)=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{4\omega^3}-\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{4i\omega^3}=$$

$$=\frac{\operatorname{sh}(\omega t)}{2\omega^3}-\frac{\operatorname{sh}(i\omega t)}{2\omega^3}=\frac{1}{2\omega^3}(\operatorname{sh}(\omega t)-\sin(\omega t)).$$

2 способ.

Пример 3.3. можно решить разделяя дробь на простые дроби используя метод неопределенных коэффициентов и затем для каждого слагаемого найти оригинал:

$$F(p)=\frac{1}{(p^2-\omega^2)(p^2+\omega^2)}=\frac{Ap+B}{(p^2-\omega^2)}+\frac{Cp+D}{(p^2+\omega^2)}=$$

$$=\frac{Ap^3+Bp^2+Ap\omega^2+B\omega^2+Cp^3+Dp^2-Cp\omega^2-D\omega^2}{(p^2+\omega^2)(p^2-\omega^2)}.$$

Найдем неизвестные константы *A,B,C,D* из системы уравнений:

$$\begin{matrix} p^3: \\ p^2: \\ p^1: \\ p^0: \end{matrix}\left\{\begin{aligned} A+C&=0,\\ B+D&=0,\\ A\omega^2-C\omega^2&=0,\\ B\omega^2-D\omega^2&=1,\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &A=-C,\\ &B=-D, \quad A=C=0\\ &A=C, \qquad B=\frac{1}{2\omega^2};\; D=-\frac{1}{2\omega^2}.\\ &B=\frac{1}{2\omega^2},\end{aligned}\right.$$

Функция $F(p)$ преобразовалась к виду:

$$F\left(p\right)=\frac{\omega}{2\omega^3\left(p^2-\omega^2\right)}-\frac{\omega}{2\omega^3\left(p^2+\omega^2\right)}.$$

Воспользовавшись таблицей изображений (см. приложение 1) получим:

$$F\left(p\right)\doteqdot\frac{1}{2\omega^3}\operatorname{sh}\left(\omega t\right)-\frac{1}{2\omega^3}\sin\left(\omega t\right).$$

4. $F\left(p\right)=\dfrac{\operatorname{sh}\left(ap\right)}{p\operatorname{sh}\left(bp\right)},\ a>0,\ b>0.$

Воспользуемся второй теоремой разложения. Найдем особые точки функции $F(p)$ из равенства:

$$p\,\mathrm{sh}\left(bp\right)=0 \Rightarrow p_0=0,\;\; p_k=i\frac{\pi k}{b},\; \overline{p}_k=-i\frac{\pi k}{b}\,,$$

где $k=1,2,3,...$.

Найденные особые точки являются полюсами первого порядка. Найдем вычеты в этих точках. Учитывая, что особые точки полюса первого порядка, оригинал для заданного изображения определится по формуле

$$f(t)=\sum_{k=1}^{N}\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t}.$$

Вычет в точках p_k определится следующим образом:

$$\underset{p_k}{res}\left(F(p)e^{pt}\right)=\frac{\mathrm{sh}(ap_k)e^{p_k t}}{\left.\left(p\,\mathrm{sh}(bp)\right)'\right|_{p_k}}=$$

$$=\frac{\mathrm{sh}(ap_k)e^{p_k t}}{bp_k\,\mathrm{ch}(bp_k)+\mathrm{sh}(bp_k)}=\frac{\mathrm{sh}(ia\dfrac{\pi k}{b})e^{i\frac{\pi k}{b}t}}{i\pi k\,\mathrm{ch}(i\pi k)}=\rightarrow$$

Здесь учтено, что в точках p_k выполняется равенство

$$\mathrm{sh}\left(bp_k\right)=0.$$

Воспользовавшись связями

$$\mathrm{sh}\left(iz\right)=i\sin\left(z\right),\;\mathrm{ch}\left(iz\right)=\cos\left(z\right),$$

получим:

$$\rightarrow=\frac{i\sin\left(\dfrac{a}{b}\pi k\right)e^{i\frac{\pi k}{b}t}}{i\pi k\cos\left(\pi k\right)}=\left(-1\right)^k\frac{\sin\left(\dfrac{a}{b}\pi k\right)e^{i\frac{\pi k}{b}t}}{\pi k}.$$

В точках $\overline{p}_k$ аналогично получим:

$$\underset{\overline{p}k}{res}\left(F(p)e^{pt}\right)=(-1)^k\frac{\sin\left(\dfrac{a}{b}\pi k\right)e^{-i\frac{\pi k}{b}t}}{\pi k}\;.$$

В точке $p_0=0$ по определению вычета найдем:

$$\operatorname*{res}_{p_0}\left(F(p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to 0}\frac{\operatorname{sh}(ap)e^{pt}}{p\operatorname{sh}(bp)}p=\lim_{p\to 0}\frac{\operatorname{sh}(ap)}{\operatorname{sh}(bp)}\frac{bp}{ap}\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

Просуммируем вычеты во всех особых точках и получим:

$$f(t)=\frac{a}{b}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\left(\frac{a}{b}\pi k\right)\left(e^{i\frac{\pi k}{b}t}+e^{-i\frac{\pi k}{b}t}\right)}{\pi k}=$$

$$=\frac{a}{b}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2\sin\left(\frac{a}{b}\pi k\right)\cos\left(\frac{\pi k}{b}t\right)}{\pi k}.$$

Оригиналом для заданного изображения $F(p)$ является сумма бесконечного ряда.

5. $F(p)=\dfrac{e^{-\sqrt{p}\frac{x}{a}}}{p}$. Для нахождения оригинала от такого изображения можно применить теорему Эфроса.

$$F(p)=\frac{F_1(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}\risingdotseq\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}f_1(\tau)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau=f(t), \qquad (2.2)$$

где

$$f_1(t)\risingdotseq F_1(p).$$

В заданном примере

$$F(p)=\frac{e^{-\sqrt{p}\frac{x}{a}}}{p}=\frac{e^{-\sqrt{p}\frac{x}{a}}\Big/\sqrt{p}}{\sqrt{p}},$$

$F_1\left(\sqrt{p}\right)$ имеет вид:

$$F_1(\sqrt{p})=\frac{e^{-\sqrt{p}\frac{x}{a}}}{\sqrt{p}}.$$

Найдем $f_1(t)$. Для этого в выражении $F_1(\sqrt{p})$ заменим $\sqrt{p}$ на p и для такого изображения найдем оригинал:

$$F_1(p) = \frac{e^{-p\frac{x}{a}}}{p} \doteqdot \eta\left(t - \frac{x}{a}\right) = f_1(t).$$

Подставим $f_1(t)$ в (2.2) и получим:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \eta\left(\tau - \frac{x}{a}\right) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{x/a}^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = \rightarrow$$

Сведем полученный интеграл к интегралу вероятности. Обозначим

$$\frac{\tau^2}{4t} = s^2,$$

тогда

$$\frac{d\tau}{2\sqrt{t}} = ds.$$

При такой замене интегрирование будет производиться в пределах от $\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}$ до ∞:

$$\rightarrow = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{s^2} ds = 1 - erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Таким образом, решением будет функция

$$f(t) = 1 - erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

6. $F(p) = \dfrac{1}{p} \dfrac{e^{-\sqrt{p+b}}}{\sqrt{p+b}}$.

Наличие множителя $1/p$ говорит о необходимости применения теоремы об интегрировании оригинала.

$$F(p) \doteqdot \int_0^t f_1(\tau) d\tau,$$

где

$$f_1(t) \doteqdot \frac{e^{-\sqrt{p+b}}}{\sqrt{p+b}}.$$

Наличие суммы $p+b$ указывает на необходимость использования теоремы смещения:

$$f_1(t) \doteqdot F_1(p+b) \doteqdot e^{bt} f_2(t),$$

где

$$f_2(p) \doteqdot F_1(p) = \frac{e^{-\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \doteqdot\rightarrow$$

Для этого изображения оригинал был получен (см. пример 5). Он имеет вид:

$$\rightarrow\doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{1}{4t}}.$$

Тогда

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{bt} e^{-\frac{1}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{bt-\frac{1}{4t}}$$

и

$$F(p) \doteqdot f(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{b\tau-\frac{1}{4\tau}} d\tau.$$

Для нахождения оригинала по заданному изображению бывает полезно воспользоваться свойствами изображений. Рассмотрим несколько примеров на нахождение оригинала *f(t)* по заданному изображению *F(p)* с использованием свойств преобразования Лапласа.

7. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.

1 способ.

Воспользуемся теоремой умножения. Примем

$$F_1(p) = G_1(p) = \frac{1}{\left(p^2+1\right)} \doteqdot \sin t.$$

Тогда

$$F(p) = F_1(p) G_1(p) \doteqdot \int_0^t \sin(t-\tau)\sin\tau d\tau =\rightarrow$$

Преобразуем подинтегральное выражение используя формулу произведения синусов

$$\to = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos(t-2\tau)-\cos t)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2\tau-t)}{2}-\cos(t)\tau\right)\Bigg|_0^t = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

Таким образом

$$f(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

2 способ.

Если изображение от $\sin t$ продифференцировать и результат разделить на $(-2p)$, то полученное выражение будет тождественно заданному изображению $F(p)$. Оригинал для $F(p)$ найдется следующим образом:

$$\left(\frac{1}{(p^2+1)}\right)' = -\frac{2p}{(p^2+1)^2} \risingdotseq -t\sin t$$

(по теореме о дифференцировании изображения).

$$\frac{\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}}{2p} \risingdotseq \frac{1}{2}\int_0^t \tau\sin\tau d\tau = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

(в соответствии с теоремой об интегрировании оригинала).

8. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2-1)^2}$.

1 способ.

Используем теорему умножения приняв

$$F_1(p) = \frac{p}{(p^2-1)}, \quad G_1(p) = \frac{1}{(p^2-1)}:$$

Так как

$$F_1(p) \risingdotseq \operatorname{ch} t,\ G_1(p) \risingdotseq \operatorname{sh} t,$$

то можно записать:

$$F(p) = F_1(p)G_1(p) = \int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\operatorname{ch}\tau\, d\tau = t\operatorname{sh} t.$$

2 способ.

Если выбрать $F_1(p)$ в виде

$$F_1(p)=\frac{1}{p^2-1}$$

(ему соответствует оригинал $\operatorname{sh} t$), продифференцировать его и домножить результат на 1/2, то получим:

$$F(p)=\frac{1}{2}\left(F_1(p)\right)'=-\frac{1}{2}\frac{2p}{\left(p^2-1\right)^2}\doteqdot -t\operatorname{sh} t,$$

то есть

$$f\left(t\right)=t\operatorname{sh} t.$$

9. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p+1}$.

Наличие множителя e^{-p} дает возможность применения теоремы запаздывания. Найдем оригинал для выражения

$$F_1\left(p\right)=\frac{1}{p+1}\doteqdot f_1\left(t\right).$$

Для изображения $1/p$ оригиналом является 1. С учетом теоремы смещения

$$f_1(t)=e^t,$$

учитывая теорему запаздывания получим

$$f(t)=e^{t-1}\eta(t-1).$$

10. $F(p)=\dfrac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$.

1 способ.

Преобразуем выражение $F(p)$:

$$F(p)=\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}=\frac{p^2+1-2}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{p^2+1}-\frac{2}{(p^2+1)^2}.$$

Воспользуемся результатами решения примеров 1.2. и 3.7. и получим:

$$F\left(p\right)\doteqdot \sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t.$$

Таким образом оригиналом является функция

$$f(t) = t\cos t.$$

2 способ.

Выберем $F_1(p)$ в виде

$$F_1(p) = \frac{p}{(p^2+1)}.$$

Тогда

$$F(p) = -\left(F_1(p)\right)' = -\left(\frac{p}{p^2+1}\right)' = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} \doteqdot t\cos t$$

(в соответствии с теоремой о дифференцировании изображения и с учетом соответствия $\cos t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}$). То есть

$$f(t) = t\cos t.$$

11. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

1 способ.

Воспользуемся теоремой умножения.

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+1)}\frac{1}{(p^2+4)} \doteqdot \frac{1}{2}\int_0^t \cos\tau \sin(2(t-\tau))d\tau = \to$$

Преобразуя произведение $\cos\tau\sin(2(t-\tau))$ получим:

$$\to = \frac{1}{4}\int_0^t \left[\sin(2t-\tau) + \sin(2t-3\tau)\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left[\cos(2t-\tau) + \frac{1}{3}\cos(2t-3\tau)\right]\Bigg|_0^t\right) = \frac{1}{3}\left(\cos t - \cos\left(2t\right)\right).$$

Таким образом огиналом для заданной функции является

$$f(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos(2t)).$$

2 способ.

Разделим дробь $F(p)$ на простые дроби:

$$F(p)=\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}=\frac{Ap+B}{(p^2+1)}+\frac{Cp+D}{(p^2+4)}=$$

$$=\frac{Ap^3+Bp^2+4Ap+4B+Cp^3+Dp^2+Cp+D}{(p^2+1)(p^2+4)}.$$

Найдем неизвестные коэффициенты A,B,C,D из системы уравнений:

$$\begin{matrix} p^3: \\ p^2: \\ p^1: \\ p^0: \end{matrix}\begin{cases} A+C=0, \\ B+D=0, \\ 4A+C=1, \\ 4B+D=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-C, \\ B=-D, \\ 3A=1, \\ B=0, \end{cases} \begin{matrix} A=\dfrac{1}{3}; & C=-\dfrac{1}{3}; \\ B=0; & D=0. \end{matrix}$$

Изображение принимает вид:

$$F(p)=\frac{1}{3}\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{3}\frac{p}{p^2+4}\doteqdot\frac{1}{3}\left(\cos t-\cos(2t)\right).$$

12. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

Выделим в знаменателе изображения $F(p)$ квадрат суммы:

$$p^2+4p+3=p^2+4p+4-1=(p+2)^2-1.$$

Изображение принимает вид:

$$F(p)=\frac{1}{(p+2)^2-1}.$$

Принимая во внимание соответствие

$$F_1(p)=\frac{1}{p^2-1}\doteqdot \operatorname{sh} t,$$

оригинал для заданного изображения получим в виде:

$$F_1(p)=\frac{1}{(p+2)^2-1}\doteqdot e^{-2t}\operatorname{sh} t.$$

13. $F(p)=\dfrac{(1+e^{-Ap})}{p^2(p^2+\omega^2)}$.

1 способ.

Найдем оригинал разделяя дробь на простые дроби:

$$\frac{1}{p^2\left(p^2+\omega^2\right)}=\frac{1}{\omega^2 p^2}-\frac{1}{\omega^2\left(p^2+\omega^2\right)}\doteqdot\frac{t}{\omega^2}-\frac{\sin\left(\omega t\right)}{\omega^3}.$$

С учетом теоремы запаздывания получим ответ:

$$F(p)\doteqdot\frac{t}{\omega^2}-\frac{\sin(\omega t)}{\omega^3}+\frac{t-A}{\omega^2}\eta(t-A)-\frac{\sin(\omega(t-A))}{\omega^3}\eta(t-A).$$

2 способ.

Будем использовать теорему об интегрировании оригинала:

$$\frac{1}{(p^2+\omega^2)}\doteqdot\frac{\sin(\omega t)}{\omega},$$

$$\frac{1}{p(p^2+\omega^2)}\doteqdot\int_0^t\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}d\tau=\frac{1}{\omega^2}-\frac{\cos(\omega t)}{\omega^2},$$

$$\frac{1}{p^2(p^2+\omega^2)}\doteqdot\int_0^t\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{\cos(\omega\tau)}{\omega^2}\right)d\tau=\frac{t}{\omega^2}-\frac{\sin(\omega t)}{\omega^3}$$

С учетом теоремы запаздывания получим ответ:

$$F(p)\doteqdot\frac{t}{\omega^2}-\frac{\sin(\omega t)}{\omega^3}+\frac{t-A}{\omega^2}\eta(t-A)-\frac{\sin(\omega(t-A))}{\omega^3}\eta(t-A)$$

3 способ.

Будем использовать теорему умножения:

$$\frac{1}{p^2}\doteqdot t,\quad \frac{1}{p^2+\omega^2}\doteqdot\frac{\sin\left(\omega t\right)}{\omega}.$$

Тогда

$$\frac{1}{p^2}\frac{1}{p^2+\omega^2}\doteqdot\int_0^t(t-\tau)\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\omega}\left(-\frac{t}{\omega}\cos(\omega\tau)\Big|_0^t-\int_0^t\tau\cos(\omega\tau)d\tau\right)=\frac{t}{\omega^2}-\frac{\sin(\omega t)}{\omega^3}.$$

С учетом теоремы запаздывания получим ответ:

$$F(p)\doteqdot\frac{t}{\omega^2}-\frac{\sin(\omega t)}{\omega^3}+\frac{t-A}{\omega^2}\eta(t-A)-\frac{\sin(\omega(t-A))}{\omega^3}\eta(t-A).$$

3. Применение преобразования Лапласа к решению задач

Преобразование Лапласа может быть применено к решению многих задач математики, таких, как решение задачи Коши[6] для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, решение некоторых интегральных уравнений и их систем, вычисление несобственных интегралов, решение краевых задач для уравнений в частных призводных второго порядка. В настоящем разделе рассматривается применение аппарата преобразования Лапласа к решению некоторых из перечисленных задач.

3.1. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Преобразование Лапласа применяется для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами *n*–того порядка. Рассмотрим это на примере решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка.

Пусть дано уравнение:

$$a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x(t) = f(t),$$

где $a_0,\, a_1,\, a_2 = const,\quad a_0 \neq 0,\quad f(t)$ – функция, удовлетворяющая свойствам функции–оригинала.

Начальные условия: $x(0) = x_0,\quad x'(0) = x_1$.

Пусть

$$x(t) \risingdotseq X(p),\; f(t) \risingdotseq F(p).$$

Применяя к обеим частям заданного уравнения преобразование Лапласа, используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа, вместо

---

[6] **КОШИ, ОГЮСТЕН-ЛУИ**, французский математик, 1789-1857, профессор в парижской политехнической школе. Работы по математике чистой и прикладной. На русский язык переведены: "Алгебраический анализ" (1864) и "Краткое изложение дифференциального и интегрального исчислений" (1831).

дифференциального уравнения с начальными условиями получаем операторное уравнение, алгебраическое:

$$(a_0p^2+a_1p+a_2)X(p)-(a_0px_0+a_1x_1+a_1x_0)=F(p).$$

Выразив $X(p)$ получим так называемое операторное решение:

$$X(p)=\frac{F(p)+a_0p^2+a_1px_0+a_1x_0}{(a_0p^2+a_1p+a_2)}\ .$$

Находя для $X(p)$ оригинал $x(t)$, получаем решение исходной задачи Коши.

Аналогично ищется решение и для случаев уравнений *n*–того порядка.

Рассмотрим несколько примеров.

1. $x''(t)+x(t)=2\cos t,\qquad x(0)=0,\quad x'(0)=-1.$

Обозначим $x(t)\doteqdot X(p)$, тогда

$$x''(t)\doteqdot p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+1,$$

$$\cos t\doteqdot\frac{p}{p^2+1}.$$

Уравнение в изображениях примет вид:

$$p^2X(p)+1+X(p)=\frac{2p}{p^2+1}$$

Из него находим операторное решение

$$X(p)=\frac{2p}{(p^2+1)^2}-\frac{1}{(p^2+1)}.$$

Для полученного изображения $X(p)$ находим оригинал используя свойство линейности и теорему о дифференцировании изображения

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2}=-\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'\doteqdot t\sin t\ .$$

Решением заданной задачи Коши является функция

$$x(t)=(t-1)\sin t\,.$$

2. $y''(t)-6y'(t)+9y(t)=0,\qquad y(0)=A,\quad y'(0)=B.$

Обозначим $y(t)\doteqdot Y(p)$, уравнение в изображениях примет вид:

$$p^2Y(p)-pA-B-6pY(p)+6A+9Y(p)=0\,.$$

Решение в изображениях (операторное решение) получим в виде:

$$Y(p)=\frac{B-6A+Ap}{p^2-6p+9}=\frac{B-3A+(p-3)A}{(p-3)^2}.$$

Оригиналом для этого выражения служит функция $y(t)$, являющаяся решением заданной задачи. Оригинал для $Y(p)$ находим с использованием теоремы смещения, разделяя выражение $Y(p)$ на две дроби:

$$Y\left(p\right)\doteqdot y\left(t\right)=\left(B-3A\right)te^{-3t}+Ae^{-3t}.$$

3. $y''\left(x\right)+y\left(x\right)=\cos x+\sin 2x,\quad y\left(0\right)=y'\left(0\right)=0.$

Введем обозначение $y\left(x\right)\doteqdot Y\left(p\right)$, тогда уравнение в изображениях примет вид

$$p^2Y(p)+Y(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{2}{p^2+4}.$$

Операторное решение

$$Y(p)=\frac{p}{(p^2+1)^2}+\frac{2}{(p^2+1)(p^2+4)}.$$

Оригиналом первого слагаемого является функция

$$\frac{p}{(p^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'\doteqdot\frac{x\sin x}{2}.$$

Оригинал второго слагаемого в выражении $Y(p)$ получим разделяя его на простые дроби:

$$\frac{2}{(p^2+1)(p^2+4)}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+4}\right)\doteqdot\frac{2}{3}(\sin x-\frac{1}{2}\sin(2x)).$$

Решением исходной задачи Коши является функция

$$y(x)=\frac{1}{6}(3x\sin x+4\sin x-2\sin(2x)).$$

4. $x^{IV}\left(t\right)-x''=\sin t,\ x\left(0\right)=0,\ x'\left(0\right)=-1,\ x''\left(0\right)=x'''\left(0\right)=0.$

Переходим в заданном уравнении к изображениям

$$p^4X(p)+p^2-p^2X(p)-1=\frac{1}{p^2+1}$$

Находим операторное решение

$$X(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p^4-p^2)}-\frac{1}{p^2}$$

Оригиналом второго слагаемого является $1\big/ p^2 \risingdotseq t$.

Первое слагаемое в выражении $X(p)$ представим в виде:

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^4-p^2)}=\frac{1}{p^2(p^2+1)(p^2-1)}=$$

$$=-\frac{1}{2p^2}\frac{1}{(p^2+1)}+\frac{1}{2p^2}\frac{1}{(p^2-1)}.$$

По теореме об интегрировании оригинала имеем

$$\frac{1}{(p^2+1)}\risingdotseq \sin t,\ \frac{1}{p(p^2+1)}\risingdotseq \int_0^t \sin\tau d\tau=1-\cos t,$$

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)}\risingdotseq \int_0^t (1-\cos\tau)\,d\tau=t-\sin t.$$

$$\frac{1}{(p^2-1)}\risingdotseq \operatorname{sh} t,\quad \frac{1}{p(p^2-1)}\risingdotseq \int_0^t \operatorname{sh}\tau\,d\tau=\operatorname{ch} t-1,$$

$$\frac{1}{p^2(p^2-1)}\risingdotseq \int_0^t (\operatorname{ch}\tau-1)\,d\tau=\operatorname{sh} t-t.$$

В итоге получим оригинал для $X(p)$ в виде:

$$x(t)=-\frac{1}{2}(t-\sin t),$$

который является решением исходной задачи Коши.

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

112. $x'+x=e^{-t},\quad x(0)=1.$

113. $x'-x=1,\quad x(0)=-1.$

114. $x'+2x=\sin t,\quad x(0)=0.$

115. $x''=1,\quad x(0)=0,\ x'(0)=1.$

116. $x'' + x' = 1, \quad x(0) = 0, \ \ x(0) = 1.$

117. $x'' + x = 0, \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 0.$

118. $x'' + 3x' = e^t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = -1.$

119. $x'' - 2x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

120. $x'' + 2x' = t\sin t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0.$

121. $x'' + 2x' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = -1.$

122. $x''' - x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

123. $x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1.$

124. $x''' + x' = t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = -1, \ x''(0) = 0.$

125. $x'' - 2x' + x = e^t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 1.$

126. $x''' + 2x'' + 5x' = 0, \quad x(0) = -1, \ x'(0) = 2, \ x''(0) = 0.$

127. $x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

128. $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, \ x'(0) = 0.$

129. $x'' + 2x' + x = t^2, \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 0.$

130. $x''' + x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1, \ x''(0) = 0.$

131. $x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, \ x'(0) = 1.$

132. $x''' + x'' = t, \quad x(0) = -3, \ x'(0) = 1, \ x''(0) = 0.$

133. $x'' + 2x' + 5x = 3, \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 0.$

134. $x^{IV} + x'' = \cos t, \ x(0) = 0, \ x'(0) = -1, \ x''(0) = x'''(0) = 0.$

135. $x'' + 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

136. $x'' + x = 1, \quad x(0) = -1, \ \ x'(0) = 0.$

137. $x'' + 4x = t, \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 0.$

138. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

139. $x''' + x = 0, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = 2.$

140. $x''' + x'' = \cos t, \quad x(0) = -2,\ x'(0) = x''(0) = 0.$

141. $x''' + x' = e^t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 0.$

142. $x^{IV} - x'' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

143. $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2,\ x'(0) = 0.$

144. $x'' - x = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

145. $x''' + x'' = \cos t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = -2,\ x''(0) = 0.$

146. $x'' + 2x' + x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

147. $x'' - x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

148. $x'' - x = \sin t, \quad x(0) = -1,\ x'(0) = 0.$

149. $x''' + x = e^t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 0.$

150. $x'' + x = 2\sin t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = -1.$

151. $x'' - 2x' + x = t - \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

152. $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

153. $x'' + 4x = 2\cos t\cos 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

154. $x'' + x = te^t + 4\sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

155. $x'' - x' = te^t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

156. $x'' + 4x = f(t),\ x(0) = x'(0) = 0,\ f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 2 - t, & 1 < t < 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

157. $x'' + x' = f(t),\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ f(t) = \begin{cases} b, & 0 < t < a, \\ 2b, & a < t < \infty. \end{cases}$

158. $x'' + 9x = f(t),\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1, f(t) = \begin{cases} t-1,\ 1 < t < 2; \\ 3-t,\ 2 < t < 3; \\ 0, \quad\ t > 3. \end{cases}$

159. $x'' - 2x' + x = f(t),\ x(0) = x'(0) = 0,\ \ f(t) = \begin{cases} 1,\ 0 < t < a, \\ 0,\ a < t < 2a, \\ 1,\ 2a < t < 3a, \\ 0,\ t > 3a. \end{cases}$

Требование, чтобы начальные условия были заданы в точке *t=0* несущественно, так как линейной заменой независимой переменной *t* задача Коши при $t = t_0 \neq 0$ сводится к задаче с начальными условиямив точке $t = 0$. Покажем это на примере дифференциального уравнения второго порядка.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t)$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1,\ \textit{где}\ \ t_0 \neq 0.$

Положим

$$t = \tau + t_0;\ x(t) = x(\tau + t_0) = \tilde{x}(t);\ f(t) = f(\tau + t_0) = \tilde{f}(t).$$

Тогда

$$x'(t) = x'(\tau + t_0) = \tilde{x}'(\tau),$$

$$x''(t) = x''(\tau + t_0) = \tilde{x}''(\tau),$$

И уравнения с начальными условиями примет вид

$$a_0 \tilde{x}''(t) + a_1 \tilde{x}'(t) + a_2 \tilde{x}(t) = \tilde{f}(t),$$

$$\tilde{x}(0) = x_0,\ \ \tilde{x}'(0) = x_1.$$

Мы получили задачу Коши с начальными условиями, заданными в точке $\tau = 0$.

5. Найти решение уравнения $x''(t) + x'(t) = t,$ удовлетворяющее начальным условиям $x(1) = 1,\ x'(1) = 0.$

Положим $t=\tau+1$ *и* $x(t)=x(\tau+1)=\tilde{x}(\tau)$. Тогда данное уравнение и начальные условия примут вид

$$\tilde{x}''(\tau)+\tilde{x}'(\tau)=\tau+1,\ \tilde{x}(0)=1,\ \tilde{x}'(0)=0,$$

так как значению *t=1* отвечает значение $\tau=0$.

Составим операторное уравнение. Пусть $\tilde{x}(t)\doteqdot X(p)$. Тогда

$$\tilde{x}'(\tau)\doteqdot pX(p)-1.$$

$$\tilde{x}''(\tau)\doteqdot p^2X(p)-p.$$

И операторным уравнением будет

$$p^2X(p)-p+pX(p)-1=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

Решая его относительно $X(p)$, найдем

с

Переходя к оригиналам, получим

$$\tilde{x}(\tau)\doteqdot 1+\frac{\tau^2}{2}.$$

Заменив здесь τ на $t-1$, будем иметь искомое решение задачи Коши

$$x(t)=1+\frac{(t-1)^2}{2}.$$

Решить следующие дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями:

160. $x''+x=0;\ x(\pi)=1,\ x'(\pi)=0.$

161. $x''+x'=2t;\ x(1)=1,\ x'(1)=-1.$

162. $x''-x'=-2t;\ x(2)=8,\ x'(2)=6.$

163. $x''+x=-2\sin t;\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

164. $x''+2x'+x=2e^{1-t};\ x(1)=1,\ x'(1)=-1.$

3.2. Решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с использованием интеграла Дюамеля

В рассмотренных выше примерах изображение от правой части дифференциального уравнения легко определялось с использованием определения и свойств преобразования Лапласа. Если же изображение правой части получается сложным (например в виде ряда), то задача Коши для такого уравнения может быть решена с использованием интеграла Дюамеля.

$$pF(p)\Phi(p) \doteqdot f(t)\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau.$$

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами n–того порядка вида:

$$L\left[x(t)\right] = a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t). \qquad (3.1)$$

С начальными условиями:

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0. \qquad (3.2)$$

Найдем решение вспомогательной задачи вида

$$L\left[x_1(t)\right] = 1 \qquad (3.3)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_1'(0) = \ldots = x_1^{(n-1)}(0) = 0. \qquad (3.4)$$

Переходя в операторе $L\left[x_1(t)\right]$ к изображениям получим:

$$L\left[x_1(t)\right] \doteqdot A(p)X_1(p),$$

где $A(p)$ известный многочлен от p, а $X_1(p) \doteqdot x_1(t)$.

Уравнение (3.3) в изображениях примет вид:

$$A(p)X_1(p) = \frac{1}{p} \qquad (3.5)$$

Из уравнения (10) легко находится $X_1(p)$ и его оригинал $x_1(t)$.

Операторное уравнение для задачи (3.1)–(3.2) имеет вид:

$$A(p)X(p) = F(p)$$

и его решение:

$$X\left(p\right)=\frac{F\left(p\right)}{A\left(p\right)}. \tag{3.6}$$

Выразим $A\left(p\right)$ из уравнения (3.5) и подставим в (3.6):

$$X\left(p\right)=pX_1\left(p\right)F\left(p\right). \tag{3.7}$$

Воспользовавшись формулой Дюамеля найдем оригинал для (3.7).

$$pX_1(p)F(p)\doteqdot f(t)x_1(0)+\int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau.$$

С учетом начальных условий (3.4) решение уравнения (3.1) будет иметь вид:

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau\,,$$

где $x_1(t)$ есть решение вспомогательной задачи (3.3)–(3.4).

Рассмотрим примеры решения задачи Коши с использованием формулы Дюамеля.

5. $x''(t)-x'(t)=\dfrac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}, \qquad x(0)=x'(0)=0.$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$x_1''\left(t\right)-x_1'=1,\;\; x_1\left(0\right)=x_1'\left(0\right)=0.$$

Переходим к изображениям и находим операторное решение:

$$p^2X_1(p)-pX_1(p)=\frac{1}{p}, \qquad X_1(p)=\frac{1}{p(p^2-p)}\,.$$

Оригинал найдем, зная соответствие

$$\frac{1}{p-1}\doteqdot e^t$$

и применяя дважды теорему об интегрировании оригинала:

$$\frac{1}{p(p-1)} \doteqdot \int_0^t e^{\tau} d\tau = -1 + e^t,$$

$$\frac{1}{p^2(p-1)} \doteqdot -\int_0^t (1-e^{\tau}) d\tau = e^t - t - 1 = x_1(t).$$

Тогда в соответствии с формулой Дюамеля решением исходной задачи Коши будет:

$$x(t) = \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{(1+e^{\tau})^2}(e^{t-\tau}-1)d\tau = \int_0^t \frac{e^t e^{\tau}}{(1+e^{\tau})^2} d\tau - \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{(1+e^{\tau})^2} d\tau.$$

Вычислим полученные интегралы применив замену переменных в виде:

$$1+e^{\tau} = y, \quad dy = e^{\tau} d\tau.$$

Тогда :

$$e^t \int_{y0}^{y} \frac{dy}{y^2} - \int_{y0}^{y} \frac{(y-1)}{y^2} dy = -\frac{e^t}{y} - \ln y - \frac{1}{y}\Bigg|_{y0}^{y} =$$

$$= -e^t \frac{1}{1+e^{\tau}}\Bigg|_0^t - \ln(1+e^{\tau})\Big|_0^t - \frac{1}{1+e^{\tau}}\Bigg|_0^t = e^t - \ln\left(e^t+1\right)$$

Решением задачи Коши является функция

$$x(t) = e^t - \ln\left(e^t+1\right).$$

Если задача Коши задана с ненулевыми начальными условиями, то при решении ее изложенным методом (с использованием формулы Дюамеля) простой заменой искомой функции ее можно свести к задаче с нулевыми начальными условиями. Рассмотрим пример.

6. $x''(t) - x'(t) = \dfrac{e^{2t}}{(1+e^t)^2} - 2, \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 2.$

Введем переменную $y(t)$ в виде:

$$y(t) = x(t) - x(0) - t\,x'(0),$$

тогда

$$y'(t) = x'(t) - x'(0), \qquad y''(t) = x''(t),$$

и сделаем замену искомой переменной $x(t)$ на $y(t)$ в исходном уравнении:

$$y''(t)-y'(t)-2=\frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}-2\,,\quad y(0)=0,\ \ y'(0)=0.$$

Получили задачу Коши с нулевыми начальными условиями, которую решаем с использованием формулы Дюамеля. Решение такой задачи приведено в примере 5:

$$y(t)=e^t-\ln\left(e^t+1\right)$$

Тогда решение исходной задачи Коши получим в виде:

$$x(t)=\,y(t)+x(0)+tx'(0)=e^t-\ln\left(e^t+1\right)+1+2t\,.$$

С помощью формулы Дюамеля найти решение уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

165. $x''-x'=\dfrac{e^{2t}}{\left(1+e^t\right)^2},\quad x\left(0\right)=\ x'\left(0\right)=0.$

166. $x''+2x'+x=\dfrac{e^{-t}}{1+t},\quad x\left(0\right)=\ x'\left(0\right)=0.$

167. $x''-x'=\dfrac{e^{2t}}{2+e^t},\quad x\left(0\right)=x'\left(0\right)=0.$

168. $x''-x'=\dfrac{1}{1+e^t},\quad x\left(0\right)=x'\left(0\right)=0.$

169. $x''+x'=\dfrac{1}{2+\cos t},\quad x\left(0\right)=x'\left(0\right)=0.$

170. $x''+x'=\dfrac{1}{4+\mathrm{tg}^2\,t},\quad x\left(0\right)=x'\left(0\right)=0.$

171. $x''+x=\dfrac{1}{1+\cos^2 t},\quad x\left(0\right)=x'\left(0\right)=0.$

172. $x''+x=\dfrac{1}{1+\sin^2 t},\quad x\left(0\right)=x'\left(0\right)=0.$

173. $x''-x=\mathrm{th}\,t,\quad x\left(0\right)=x'\left(0\right)=0.$

174. $x'''+x'=\dfrac{1}{2+\sin t},\quad x\left(0\right)=x'\left(0\right)=x''\left(0\right)=0.$

3.3. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом проводится по такой же схеме, что и для одного уравнения. Рассмотрим это на примере системы двух дифференциальных уравнений второго порядка.

Систему двух дифференциальных уравнений второго порядка запишем в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x'' + a_{12}y'' + b_{11}x' + b_{12}y' + c_{11}x + c_{12}y = f_1(t) \\ a_{21}x'' + a_{22}y'' + b_{21}x' + b_{22}y' + c_{21}x + c_{22}y = f_2(t) \end{cases} \tag{3.8}$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

Обозначим $X(p)$, $Y(p)$, $F_1(p)$, $F_2(p)$ изображения функций $x(t)$, $y(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$.

Система уравнений (13) в изображениях примет вид:

$$\begin{cases} (a_{11}p^2 + b_{11}p + c_{11})X(p) + (a_{12}p^2 + b_{12}p + c_{12})Y(p) = \\ = F_1(p) + (a_{11}p + b_{11})x_0 + a_{11}x_1 + (a_{12}p + b_{12})y_0 + a_{12}y_1, \\ (a_{21}p^2 + b_{21}p + c_{21})X(p) + (a_{22}p^2 + b_{22}p + c_{22})Y(p) = \\ = F_2(p) + (a_{21}p + b_{21})x_0 + a_{21}x_1 + (a_{22}p + b_{22})y_0 + a_{22}y_1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Решая систему уравнений (3.9) относительно $X(p)$ и $Y(p)$ найдем $X(p)$ и $Y(p)$, а затем их оригиналы $x(t)$, $y(t)$, которые будут решением исходной задачи Коши для системы уравнений (3.8).

Рассмотрим пример:

7. Решить задачу Коши для системы уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) - y'(t) - 2x(t) + 2y(t) = 1 - 2t, \\ x''(t) + 2y'(t) + x = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$$

Переходим к изображениям, приняв обозначение $x(t) \doteqdot X(p)$, $y(t) \doteqdot Y(p)$, тогда система уравнений в изображениях запишется в виде:

$$\begin{cases} pX - pY - 2X + 2Y = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p^2}, \\ p^2 X + 2pY + X = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим $Y(p)$

$$Y(p) = -\frac{p^2+1}{2p} X(p),$$

подставим в первое уравнение системы и получим операторное решение для $X(p)$:

$$X(p) = \frac{2}{p^3 - 3p - 2} - \frac{4}{p(p^3 - 3p - 2)}.$$

Оригинал первого слагаемого находим разбивая его на простые дроби:

$$\frac{2}{p^3 - 3p - 2} = \frac{2}{(p-2)(p+1)^2} = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{p+1+3}{(p+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{(p+1)} - \frac{3}{(p+1)^2}\right) \risingdotseq \frac{2}{9}(e^{2t} - e^{-t} - 3te^{-t}).$$

(При нахождении этого оригинала используется теорема смещения и теорема умножения.)

Оригинал второго слагаемого можно найти используя теорему об интегрировании оригинала и найденный оригинал первого слагаемого:

$$-2\frac{2}{p(p^3 - 3p - 2)} \risingdotseq -\frac{4}{9}\int_0^t (e^{2\tau} - e^{-\tau} - 3\tau e^{-\tau})d\tau =$$

$$= -\frac{2}{9}(e^{2t} + 8e^{-t} + 6te^{-t} - 9).$$

Суммируя полученные оригиналы в соответствии со свойством линейности получим решение $x(t)$:

$$x(t) = 2(1 - e^{-t} - te^{-t}).$$

$Y(p)$ представим в виде:

$$Y(p) = -\frac{1}{2}(pX(p) + \frac{X(p)}{p}).$$

Оригинал для $Y(p)$ найдем применяя для первого слагаемого теорему о дифференцировании оригинала, для второго – теорему об интегрировании оригинала:

$$pX(p) \doteqdot x'(t) + x(0) = 2t\,e^{-t},$$

$$\frac{X(p)}{p} \doteqdot \int_0^t x(\tau)d\tau = 2\int_0^t (1 - e^{-\tau} - \tau e^{\tau})d\tau = 4e^{-t} + 2te^{-t} + 2t - 4.$$

Решение $y(t)$ получаем в виде:

$$y(t) = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}.$$

Таким образом, решением заданной задачи Коши для системы уравнений получено в виде:

$$x(t) = 2(1 - e^{-t} - te^{-t}).$$
$$y(t) = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}.$$

Решить системы уравнений:

175. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \ \ x(0) = 1, \quad y(0) = -1. \end{cases}$

176. $\begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \ \ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

177. $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t^t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \ \ x(0) = x'(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

178. $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, \ \ x(0) = x'(0) = y'(0) = 0, \ y(0) = 1. \end{cases}$

179. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \ \ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

180. $\begin{cases} x' - y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \ \ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

181. $\begin{cases} x' = -x + y + z + e^{t}, \\ y' = x - y + z + e^{3t}, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0. \\ z' = x + y + z + 4, \end{cases}$

182. $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \; z(0) = 1. \\ z' = -x - y, \end{cases}$

183. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \; z(0) = 1. \\ z' = 3x + y, \end{cases}$

184. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0. \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases}$

3.4. Приложение операционного исчисления к вычислению некоторых интегралов

Используя преобразование Лапласа можно вычислять некоторые несобственные интегралы. Рассмотрим примеры.

Вычисление интегралов с использованием определения преобразования Лапласа:

1. $\int\limits_0^\infty e^{-2x} \sin(5x) dx.$

По определению преобразования Лапласа известно:

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(x) e^{-px} dx.$$

Принимая за $f(x)$ $\sin(5x)$ и определяя для него изображение, получим:

$$F(p) = \frac{5}{p^2 + 25}.$$

В заданном интеграле $p=2$, тогда

$$\int_0^\infty e^{-2x}\sin(5x)dx = F(2) = \frac{5}{2^2+25} = \frac{5}{29}.$$

2. $\int_0^\infty y^3 e^{-2y} dy$

По определению преобразования Лапласа для случая $p=2$ находим:

$$\int_0^\infty y^3 e^{-2y} dy = F(2) = \frac{3!}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8},$$

так как

$$y^3 \doteqdot \frac{3!}{p^4}.$$

Вычисление интегралов с использованием формулы Парсеваля[7].

Если заданы функции – оригиналы $f(x)$ и $\varphi(y)$ и их изображения $F(y)$ и $\Phi(x)$:

$$f(x) \doteqdot F(y), \qquad \varphi(y) \doteqdot \Phi(x),$$

то выполняется равенство

$$\int_0^\infty f(x)\Phi(x)dx = \int_0^\infty F(y)\varphi(y)dy.$$

Это равенство называется формулой Парсеваля. Докажем это соотношение.

$$\int_0^\infty f(x)\Phi(x)dx = \int_0^\infty f(x)\int_0^\infty \varphi(y)e^{-yx}dydx =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(y)\left(\int_0^\infty f(x)e^{-yx}dx\right)dy = \int_0^\infty \varphi(y)F(y)dy.$$

---

[7] **ПАРСЕВАЛЬ МАРК АНТУАН** (27.04.1755, Розье-о-Салин, - 16.08.1836, Париж) – французский математик. Основные труды по дифференциальным уравнениям, теории функций действительного переменного, где известно равенство Парсеваля.

В частном случае в соответствии с формулой Парсеваля можно записать:

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}dx = \int_0^\infty F(p)dp.$$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$

По формуле Парсеваля (частный случай) имеем:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{1}{y^2+1}dy$$

(так как $\sin x \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$).

$$\int_0^\infty \frac{1}{y^2+1}dy = \operatorname{arctg} y\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Получили

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{(x+2)^5}dx$

В соответствии с формулой Парсеваля примем:

$$f(x) = x^3; \qquad \Phi(x) = \frac{1}{(x+2)^5};$$

Найдем для них соответствующие изображение и оригинал:

$$F(y) = \frac{3!}{y^4}; \qquad \varphi(y) = \frac{y^4}{4!}e^{-2y} .$$

Тогда:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{(x+2)^5}dx = \int_0^\infty \frac{3!}{y^4}\frac{y^4}{4!}e^{-2y}dy = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-2y}dy = \frac{1}{8}.$$

При вычислении ***интегралов с параметрами*** можно перейти к изображениям по этому параметру, сделать вычисления и затем вернуться к оригиналу. Рассмотрим это на примерах:

5. $J(t)=\int\limits_0^\infty \dfrac{\cos tx}{x^2+a^2}dx.$

Перейдем в подинтегральном выражении к изображениям по параметру t:

$$\cos tx \doteqdot \frac{p}{p^2+x^2}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx \doteqdot \int\limits_0^\infty \frac{pdp}{(p^2+x^2)(x^2+a^2)} = \rightarrow$$

Разделяя подинтегральное выражение на простые дроби получим:

$$\rightarrow = \frac{p}{p^2-a^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}dx - \frac{p}{p^2-a^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{p^2+x^2}dx =$$

$$= \frac{p}{p^2-a^2}\left(\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} - \frac{1}{p}arctg\frac{x}{p}\right)\Bigg|_0^\infty =$$

$$= \frac{p}{p^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{p}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{a(p+a)} \doteqdot \rightarrow$$

Переходим к оригиналу и получаем:

$$\rightarrow \doteqdot \frac{\pi}{2a}e^{-at} \quad .$$

В итоге получаем

$$J(t) = \frac{\pi}{2a}e^{-at} \quad .$$

6. $J(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \operatorname{ch} at e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau.$

Вид интеграла $J(t)$ идентичен теореме Эфроса. Поэтому можно записать:

$$J(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\operatorname{ch}at\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau \doteqdot \frac{F\left(\sqrt{p}\right)}{\sqrt{p}},$$

где

$$F\left(p\right)\doteqdot f\left(t\right)=\operatorname{ch}at \doteqdot \frac{p}{p^2-a^2}.$$

В этом случае

$$F(\sqrt{p})=\frac{\sqrt{p}}{p-a^2};$$

и тогда

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}=\frac{1}{p-a^2}.$$

Переходя к оригиналу в полученном выражении определим:

$$J(t)=e^{a^2t}.$$

Для вычисления некоторых определенных интегралов возможно применение теоремы умножения, например:

7. $J(t)=\int_0^t (t-\tau)^m\tau^n d\tau$

Перейдем к изображению с использованием теоремы умножения:

$$J(t)=\int_0^t (t-\tau)^m\tau^n d\tau \doteqdot \frac{m!}{p^{m+1}}\frac{n!}{p^{n+1}}=$$

$$=\frac{m!n!}{p^{m+n+2}}\doteqdot \frac{m!n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}$$

и получаем значение интеграла.

В частности, если задан интеграл

$$J(t)=\int_0^1 (1-\tau)^2\tau^3 d\tau,$$

то

$$J(t)=\int_0^1 (1-\tau)^2\tau^3 d\tau \doteqdot \frac{2!3!}{p^7}\doteqdot \frac{2!3!}{6!}1=\frac{1}{60}$$

8. $J(t)=\int\limits_0^t \cos(t-\tau)e^{\tau}d\tau.$

По теореме умножения вычисляем:

$$\int\limits_0^t \cos(t-\tau)e^{\tau}d\tau \doteqdot \frac{p}{(p^2+1)(p-1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{p-1}{p^2+1}\right)\doteqdot \frac{1}{2}(e^t-\cos t+\sin t).$$

В частности в случаях, когда $t=2\pi$ и $t=\pi/2$ можно получить:

$$t=2\pi,\quad J(t)=\int\limits_0^t \cos\tau\, e^{\tau}d\tau=\frac{1}{2}(e^{2\pi}-1),$$

$$t=\frac{\pi}{2},\quad J(t)=\int\limits_0^t \sin\tau\, e^{\tau}d\tau=\frac{1}{2}(e^{\pi/2}+1).$$

9. $J(a,b)=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-ax^2}}{x^2+b^2}dx.$

Сделаем замену переменных

$$y=x^2,\quad dy=2xdx\,,$$

тогда интеграл перепишется в виде:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-ax^2}}{x^2+b^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-ay}}{\sqrt{y}(y+b^2)}dy\,.$$

По формуле Парсеваля, приняв соответствие

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\doteqdot\sqrt{\frac{\pi}{x}},\qquad \frac{e^{-ay}}{y+b^2}\doteqdot e^{-b^2(t-a)}\eta(t-a),$$

получим:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-ay}}{\sqrt{y}(y+b^2)}dy=\int\limits_0^{\infty}e^{-b^2(x-a)}\eta(x-a)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}dx\,.$$

Полученный интеграл можно выразить через интеграл вероятности, если применить замену переменных:

$$s=b^2\sqrt{x}\,,\ ds=b^2\,\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\int_0^\infty e^{-b^2(x-a)}\eta(x-a)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{b}\int_{b\sqrt{a}}^{\infty}e^{-s^2}e^{ab^2}\,ds=\frac{\pi}{2b}e^{ab^2}\,(1-erf\,(b\sqrt{a})).$$

Таким образом

$$J(a,b)=\int_0^\infty\frac{e^{-ax^2}}{x^2+b^2}\,dx=\frac{\pi}{2b}e^{ab^2}\,(1-erf\,(b\sqrt{a})).$$

Используя преобразование Лапласа вычислить интегралы:

185. $\int\limits_0^\infty e^{-2x}\cos(6x)dx.$

186. $\int\limits_0^\infty y^5e^{-2y}dy$

187. $\int\limits_0^\infty e^{-2x}\sin(3x)\cos(2x)dx.$

188. $\int\limits_0^\infty\frac{x-\sin x}{x^3}\,dx.$

189. $\int\limits_0^\infty\frac{x^{15}}{(x+2)^{19}}\,dx.$

190. $J(t)=\int\limits_0^\infty\frac{\sin(tx)}{x^2+a^2}dx.$

191. $J(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty\left(\operatorname{ch}(at)-1\right)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau.$

192. $J(t)=\int\limits_0^t(t-\tau)^5\tau^7d\tau.$

193. $J(t)=\int\limits_0^t\tau\cos(t-\tau)e^{-\tau}d\tau.$

194. $\int\limits_0^\infty\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx.$

Решить интегральные уравнения:

195. $\varphi(x)=\sin x+\int\limits_0^x(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

196. $\varphi(x)=x+\frac{1}{2}\int\limits_0^x(x-t)^2\,\varphi(t)\,dt.$

197. $\varphi(x) = x + \int\limits_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\,dt.$

198. $\varphi(x) = \cos x + \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

199. $\varphi(x) = 1 + x + \int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt.$

200. $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{2} + \int\limits_0^x (x-t)\,e^{-(t-x)}\varphi(t)\,dt.$

201. $\varphi(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2\,\varphi(t)\,dt.$

202. $\varphi(x) = x + 2\int\limits_0^x \left[(x-t) - \sin(x-t)\right]\varphi(t)\,dt.$

203. $\varphi(x) = \sin x + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt.$

204. $\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int\limits_0^x \left[3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2\right]\varphi(t)\,dt.$

205. $\varphi(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\int\limits_0^x \sin 2(x-t)\varphi(t)\,dt.$

206. $\varphi(x) = e^x - 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt.$

207. $\varphi(x) = 1 + \dfrac{1}{6}\int\limits_0^x (x-t)^3\,\varphi(t)\,dt.$

208. $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt.$

209. $\varphi(x) = \operatorname{sh} x + \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt.$

Решить интегральные уравнения:

210. $\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x.$

211. $\int\limits_0^x J_0(x-t)\varphi(t)\,dt = \sin x.$

212. $\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt = \sin x.$

213. $\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = \sin x.$

214. $\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt = x + x^2.$

215. $\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt = x^2 e^x.$

216. $\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt = \operatorname{sh} x.$

217. $\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt = x.$

3.5. Решение задач математической физики методом преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа может быть применено для решения уравнений в частных производных. Применение преобразования Лапласа позволяет привести исходное дифференциальное уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению для изображений. Решая полученное уравнение и находя оригинал от решения в изображениях, получаем решение исходной задачи.

Рассмотрим случай, когда искомая функция *u* зависит от двух независимых переменных x и t. Переменная x – пространственная координата, переменная t – время.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

Найти решение *u(x,t)* для $0 \le x \le l, \quad t > 0$.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x,t\right), \quad a^2 = const. \tag{3.10}$$

Краевые условия:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = \psi_1(t), \quad u(l,t) = \psi_2(t).$$

Пусть искомая функция *u(x,t)* удовлетворяет условиям функции оригинала. Предположим, что имеется соответствие $U(x,p) \risingdotseq u(x,t)$ и найдем изображения функций $f\left(x,t\right),\ \psi_1\left(t\right),\ \psi_2\left(t\right)$:

$$f(x,t) \risingdotseq F(x,p), \quad \psi_1(t) \risingdotseq \Psi_1(p), \quad \psi_2(t) \risingdotseq \Psi_2(p).$$

Тогда:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \risingdotseq \frac{d^2 U}{d x^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \risingdotseq pU(x,p) - \varphi(x) ,$$

уравнение (15) в изображениях примет вид:

$$a^2 \frac{d^2 U}{d x^2} - pU(x,p) + \varphi(x) + F(x,p) = 0 \tag{3.11}$$

с граничными условиями:

$$U(0,p) = \Psi_1(p), \qquad U(l,p) = \Psi_2(p). \tag{3.12}$$

Решая задачу (3.11) с условиями (3.12) получаем операторное решение *U(x,p)* задачи (3.10). Находя оригинал для полученнной функции *U(x,p)* получаем решение поставленной задачи *u(x,t)*.

Аналогично решаются другие краевые задачи для уравнения теплопроводности, краевые задачи для уравнения колебаний, имеющего вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x,t\right), \quad a^2 = const\,.$$

Рассмотрим примеры решения некоторых задач математической физики с использованием преобразования Лапласа.

1. Решить задачу о прогреве полубесконечного тела, имеющего начальную температуру u_0, на границе $x=0$ которого поддерживается температура u_1. Определить величину теплового потока на границе $x=0$.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u\left(0,t\right) = u_1,\quad \frac{\partial u\left(\infty,t\right)}{\partial x} = 0,\ u\left(x,0\right) = u_0\,. \quad (3.13)$$

Перейдем к изображениям в задаче (3.13). Если принять, что $u(x,t)$ соответствует изображение $U(x,p)$ то выполняются соответствия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot \frac{d^2 U}{dx^2},\quad \frac{\partial u}{\partial t} \doteqdot pU\left(x,p\right) - u_0\,,$$

и уравнение в изображениях примет вид:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U\left(x,p\right) + \frac{u_0}{a^2} = 0\,.$$

В полученном уравнении возникла неоднородность вида $u_0 \big/ a^2$. Такое уравнение можно решать, находя общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения, и их сумма будет являться решением полученного неоднородного уравнения. Однако удобнее от возникшей неоднородности избавиться сделав замену переменных в задаче (3.13). Введем новую переменную

$$\overline{u}(x,t) = u(x,t) - u_0\,.$$

Тогда задача (3.13) перепишется в виде:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2},\ \overline{u}(0,t) = u_1 - u_0,\ \frac{\partial\, \overline{u}(\infty,t)}{\partial\, x} = 0,\ \overline{u}(x,0) = 0\,. \quad (3.14)$$

Тогда приняв соответствие:

$$\overline{u}(x,t) \doteqdot U(x,p),\ \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial\, x^2} \doteqdot \frac{d^2 U}{d\, x^2},\ \frac{\partial\, \overline{u}}{\partial\, t} \doteqdot pU(x,p)$$

В изображениях задача (3.14) перепишется в виде:

$$\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{p}{a^2}U\left(x,p\right)=0 \tag{3.15}$$

С граничными условиями:

$$U\left(0,p\right)=\frac{u_1-u_0}{p},\ \frac{dU\left(\infty,p\right)}{dx}=0. \tag{3.16}$$

Общее решение уравнения (3.15) имеет вид:

$$U\left(x,p\right)=Ae^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+Be^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Из второго граничного условия (3.16),

$$\frac{dU(\infty,p)}{d\,x}=\left.\left(-A\frac{\sqrt{p}}{a}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+B\frac{\sqrt{p}}{a}e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)\right|_{x=\infty}=0,$$

находим, что $B=0$. Из первого граничного условия (3.16),

$$U\left(0,p\right)=\left.Ae^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right|_{x=0}=\frac{u_1-u_0}{p},$$

находим $A=\dfrac{u_1-u_0}{p}$. Решение задачи (3.15) – (3.16):

$$U\left(x,p\right)=\frac{u_1-u_0}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \tag{3.17}$$

Если теперь для этого выражения найдем оригинал $\overline{u}\left(x,t\right)$, то он будет решением задачи (3.14). Этот оригинал можно найти применяя теорему Эфроса. Воспользовавшись разобранным в п.2.2 примером 5 запишем оригинал для операторного решения (3.17):

$$\overline{u}(x,t)=(u_1-u_0)\left(1-erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right).$$

Решение задачи (1.13):

$$u(x,t)=\overline{u}(x,t)+u_0=u_1-(u_1-u_0)erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right). \tag{3.18}$$

Полученное решение $u(x,t)$ дает распределения температуры в полубесконечном теле в любой момент времени t.

Определим поток тепла на границе $x=0$. Поток тепла q пропорционален градиенту температуры $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Поэтому его можно найти, продифференцировав выражение (3.18) и определив его значение при $x=0$. Однако проще найти производную от изображения (3.17) при $x=0$ и найти для полученного выражения оригинал:

$$\frac{dU(x,p)}{dx} = -\frac{u_1-u_0}{p}\frac{\sqrt{p}}{a}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\Bigg|_{x=0} = -\frac{u_1-u_0}{a}\frac{1}{\sqrt{p}} \div -\frac{u_1-u_0}{a\sqrt{\pi t}},$$

тогда величина теплового потока определяется формулой:

$$q = \frac{\partial u(o,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{u_1-u_0}{a}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

$$q = -\lambda\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \lambda\frac{u_1-u_0}{a\sqrt{\pi t}},$$

где λ – коэффициент теплопроводности вещества.

Из полученного выражения видно, что поток тепла на границе полубесконечного тела $x=0$ пропорционален $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ и в начальные моменты времени имеет очень большие значения, и во времени уменьшается, причем при $t \to \infty \quad q \to 0$.

2. Решить задачу о прогреве полубесконечного тела с начальной температурой $u(x,0)=0$, когда на его границе $x=0$ происходит конвективный теплообмен с коэффициентом теплообмена $\alpha = const$ со средой, имеющей температуру u_1.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(u-u_1)\Big|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial u(\infty,t)}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = 0\end{gathered} \qquad (3.19)$$

Переходим к изображениям:

$$u(x,t) \doteqdot U(x,p),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot \frac{d^2 U}{dx^2},\ \ \frac{\partial u}{\partial t} \doteqdot pU(x,p).$$

Задача (3.19) в изображениях примет вид:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U(x,p) = 0. \tag{3.20}$$

С граничными условиями:

$$\frac{dU(0,p)}{dx} + \alpha\left(U(0,p) - \frac{u_1}{p}\right) = 0,\ \frac{dU(\infty,p)}{dx} = 0. \tag{3.21}$$

Общее решение уравнения (3.20) имеет вид:

$$U(x,p) = Ae^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + Be^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Из второго граничного условия (3.21) находим $B=0$.
Из первого граничного условия (3.21) находим:

$$\frac{dU(0,p)}{d\,x} + \alpha(U(0,p) - \frac{u_1}{p}) = -A\frac{\sqrt{p}}{a} + \alpha\left(A - \frac{u_1}{p}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{a\alpha u_1}{p\left(a\alpha - \sqrt{p}\right)}.$$

Решение задачи (3.20)–(3.21) получаем в виде:

$$U(x,p) = \frac{a\alpha u_1}{p\left(a\alpha - \sqrt{p}\right)} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{3.22}$$

Найдем оригинал $u(x,t)$ для полученного изображения (3.22), который будет решением исходной задачи (3.19). Для нахождения оригинала воспользуемся теоремой Эфроса.

$$u(x,t) \doteqdot U(x,p) = \frac{F\left(\sqrt{p}\right)}{\sqrt{p}} =$$
$$= \frac{\dfrac{a\alpha u_1}{\sqrt{p}\left(a\alpha - \sqrt{p}\right)} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau, \tag{3.23}$$

где

$$f\left(t\right) \doteqdot F\left(p\right).$$

Найдем $f(t)$. В данном случае $F(p)$ имеет вид:

$$F(p)=\frac{a\alpha u_1}{p(a\alpha-p)}e^{-\frac{p}{a}x}.$$

Разделим полученную дробь на простые дроби

$$\frac{a\alpha u_1}{p(a\alpha-p)}e^{-\frac{p}{a}x}=u_1\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{a\alpha-p}\right)e^{-\frac{p}{a}x},$$

и с учетом теоремы запаздывания получим $f(t)$ в виде

$$f\left(t\right)=u_1\eta\left(t-\frac{x}{a}\right)-u_1e^{a\alpha\left(t-\frac{x}{a}\right)}\eta\left(t-\frac{x}{a}\right).$$

Подставляя $f(t)$ в (3.23) получаем решение задачи (3.19):

$$\begin{gathered}u(x,t)=\frac{u_1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^t\left(\eta\left(\tau-\frac{x}{a}\right)-e^{a\alpha\left(\tau-\frac{x}{a}\right)}\eta\left(\tau-\frac{x}{a}\right)\right)d\tau= \\ =\frac{u_1}{\sqrt{\pi t}}\int_{x/a}^t e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau-\frac{u_1}{\sqrt{\pi t}}\int_{x/a}^t e^{-\frac{\tau^2}{4t}+a\alpha\tau}d\tau.\end{gathered} \tag{3.24}$$

Первое слагаемое в (3.24) выражается через интеграл вероятности:

$$u_1\left(1-erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right).$$

Во втором слагаемом под экспонентой выделим полный квадрат:

$$\left(\frac{\tau^2}{4t}-a\alpha\tau\right)=\left(\left(\frac{\tau}{2\sqrt{t}}\right)^2-2\frac{\tau}{2\sqrt{t}}a\alpha\sqrt{t}+a^2\alpha^2t\right)-a^2\alpha^2t=$$

$$=\left(\frac{\tau}{2\sqrt{t}}-a\alpha\sqrt{t}\right)^2-a^2\alpha^2t.$$

и оно перепишется в виде:

$$\frac{u_1}{\sqrt{\pi t}}e^{a^2\alpha^2t-\alpha x}\int_{x/a}^t e^{-\left(\frac{\tau}{2\sqrt{t}}-a\alpha\sqrt{t}\right)^2}d\tau.$$

Вводя замену переменных

$$s = \frac{\tau}{2\sqrt{t}} - a\alpha\sqrt{t},$$

интеграл перепишется в виде:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} u_1 e^{a^2\alpha^2 t - \alpha x} \int\limits_{\frac{\tau}{2\sqrt{t}} - a\alpha\sqrt{t}}^{\infty} e^{-s^2} ds = u_1 e^{a^2\alpha^2 t - \alpha x}\left(1 - erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - a\alpha\sqrt{t}\right)\right)$$

.

И в итоге решение задачи (3.19) получено в виде:

$$u(x,t) = u_1\left(1 - erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - e^{a^2\alpha^2 t - \alpha x}\left(1 - erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - a\alpha\sqrt{t}\right)\right)\right)$$

.

3. Решить задачу о прогреве полубесконечного стержня с начальной температурой $u(x,0)=0$, на боковых стенках которого происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру $u_1 = 0$, а на границу стержня $x=0$ падает тепловой поток с интенсивностью q.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u,\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = -q,\ \frac{\partial u(\infty,t)}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = 0. \quad (3.25)$$

Переходим к изображениям, приняв соответствие

$$u(x,t) \risingdotseq U(x,p)$$

и тогда задача (3.25) запишется в виде:

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{p}{a^2}U(x,p) - \frac{\alpha}{a^2}U = 0 \quad (3.26)$$

с граничными условиями:

$$\frac{dU(0,p)}{dx} = -\frac{q}{p},\ \frac{dU(\infty,p)}{dx} = 0. \quad (3.27)$$

Общее решение уравнения (3.26) имеет вид:

$$U(x,p) = Ae^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + Be^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Из граничных условий (3.27) определяем $B=0$ и находим A:

$$\frac{dU(0,p)}{d\,x} = -A\frac{\sqrt{p+\alpha}}{a}e^{-\frac{\sqrt{p+\alpha}}{a}x}\Bigg|_{x=0} = -\frac{q}{p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{qa}{p\sqrt{p+\alpha}}.$$

И получаем операторное решение в виде:

$$U(p,x) = \frac{qa}{p\sqrt{p+\alpha}}e^{-\frac{\sqrt{p+\alpha}}{a}x}.$$

Найдем для этого выражения оригинал. Известно, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \doteqdot \frac{e^{-\sqrt{p}\tau}}{\sqrt{p}}.$$

Тогда

$$\frac{e^{-\sqrt{p}\frac{x}{a}}}{\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}},$$

а с учетом теоремы смещении

$$\frac{qa}{\sqrt{p+a}}e^{-\frac{\sqrt{p+a}}{a}x} \doteqdot \frac{qa}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}e^{-at}.$$

В соответствии с теоремой об интегрировании оригинала получаем интеграл

$$\frac{qa}{p\sqrt{p+\alpha}}e^{-\frac{\sqrt{p+\alpha}}{a}x} \doteqdot aq\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}e^{-\alpha\tau}d\tau = u(x,t),$$

который является решением задачи (3.25).

4. Решить задачу о прогреве полубесконечного тела с начальной температурой $u(x,0)=0$, на границе $x=0$ которого температура меняется во времени пропорционально $\cos(\omega t)$.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(0,t) = b\cos(\omega t),\ \frac{\partial u(\infty,t)}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = 0. \quad (3.28)$$

Переходим к изображениям, приняв соответствие

$$u(x,t) \doteqdot U(x,p)$$

и тогда задача (3.28) запишется в виде:

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{p}{a^2}U(x,p) = 0. \qquad (3.29)$$

С граничными условиями:

$$U(0,p) = b\frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad \frac{dU(\infty,p)}{dx} = 0. \qquad (3.30)$$

Общее решение уравнения (3.29) имеет вид:

$$U(x,p) = Ae^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + Be^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Из граничных условий (3.30) определяем $B=0$ и находим A:

$$U(x,p) = Ae^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\Big|_{x=0} = \frac{bp}{p^2+\omega^2} \Rightarrow A = \frac{bp}{p^2+\omega^2}.$$

И получаем операторное решение в виде:

$$U(x,p) = \frac{bp}{p^2+\omega^2}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Найдем для этого выражения оригинал. Используя теорему Эфроса находим:

$$u(x,t) \doteqdot \frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{\dfrac{b\left(\sqrt{p}\right)^3}{p^2+\omega^2}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau, \quad (3.31)$$

где

$$f(t) \doteqdot F(p) = \frac{bp^3}{p^4+\omega^2}e^{-\frac{p}{a}x}.$$

Найдем функцию $f(t)$. Для этого будем использовать вторую теорему разложения. Найдем особые точки функции $F(p)$. Такими точками являются

$$p_1 = \sqrt{\frac{\omega}{2}}(1+i), \ p_2 = -\sqrt{\frac{\omega}{2}}(1+i), \ p_3 = \sqrt{\frac{\omega}{2}}(1-i), \ p_4 = -\sqrt{\frac{\omega}{2}}(1-i).$$

Все эти точки являются простыми полюсами. Для нахождения вычетов в этих особых точках можно использовать формулу

$$\underset{p_k}{res}\left(\frac{Q(p)}{R(p)}\right)=\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}.$$

Тогда получим $f(t)$ в виде:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{4}\underset{p_k}{res}\left(\frac{bp^3}{p^4+\omega^2}e^{pt}\right)=$$

$$=\frac{b}{4}\left[e^{\left(t-\frac{x}{a}\right)(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2}}}+e^{-\left(t-\frac{x}{a}\right)(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2}}}+e^{\left(t-\frac{x}{a}\right)(-1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2}}}+e^{-\left(t-\frac{x}{a}\right)(-1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\right]=$$

$$=\frac{b}{4}\left[e^{\left(t-\frac{x}{a}\right)}e^{i\left(t-\frac{x}{a}\right)\sqrt{\frac{\omega}{2}}}+e^{-\left(t-\frac{x}{a}\right)}e^{i\left(t-\frac{x}{a}\right)\sqrt{\frac{\omega}{2}}}+e^{\left(t-\frac{x}{a}\right)}e^{-i\left(t-\frac{x}{a}\right)\sqrt{\frac{\omega}{2}}}+e^{-\left(t-\frac{x}{a}\right)}e^{-i\left(t-\frac{x}{a}\right)\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\right]=$$

$$=\frac{b}{4}\left[\left(e^{\left(t-\frac{x}{a}\right)}+e^{-\left(t-\frac{x}{a}\right)}\right)e^{i\left(t-\frac{x}{a}\right)\sqrt{\frac{\omega}{2}}}+\left(e^{\left(t-\frac{x}{a}\right)}+e^{-\left(t-\frac{x}{a}\right)}\right)e^{-i\left(t-\frac{x}{a}\right)\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\right].$$

Воспользовавшись тригонометрической формой представления комплексных чисел преобразуем выражение.

$$\frac{b}{4}\left(2\,\mathrm{ch}\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)\left(\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)\right)+i\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)+$$

$$+2ch\left(t-\frac{x}{a}\right)\left(\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)-i\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)\right)=$$

$$=b\,\mathrm{ch}\left(t-\frac{x}{a}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)=f(t).$$

Подставляем полученное $f(t)$ в (3.31) и получаем решение задачи (3.28) в виде:

$$u(x,t)=\frac{b}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\mathrm{ch}\left(\tau-\frac{x}{a}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\tau-\frac{x}{a}\right)\right)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau.$$

5. Решить задачу о теплообмене пластинки конечной толщины l, имеющей начальную температуру $u(x,0)$, на правой границе которой поддерживается температура u_0 , а левая граница теплоизолирована.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 , \ u(l,t) = u_0, \ u(x,0) = 0 . \quad (3.32)$$

Переходим к изображениям, приняв соответствие

$$u(x,t) \doteqdot U(x,p),$$

и тогда задача (3.32) запишется в виде:

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U(x,p) = 0 \qquad (3.33)$$

С граничными условиями:

$$\frac{dU(0,p)}{dx} = 0, \ U(l,p) = \frac{u_0}{p} . \qquad (3.34)$$

Общее решение уравнения (3.33) имеет вид:

$$U(x,p) = A_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + B_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}, \qquad (3.35)$$

которое для задач, в которых x меняется в конечных пределах, удобнее преобразовать к другому виду. Если принять

$$A = \frac{A_1 + B_1}{2}, \quad B = \frac{A_1 - B_1}{2}$$

то (3.35) преобразуется к виду:

$$U(x,p) = A\,\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right) + B\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right). \qquad (3.36)$$

Используя граничные условия (39) составляем систему двух уравнений для нахождения двух неизвестных A и B:

$$\begin{cases} U(l,p) = A\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\sqrt{p}}{a}l\right) + B\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{\sqrt{p}}{a}l\right) = \dfrac{u_0}{p}, \\ \dfrac{dU(0,p)}{d\,x} = A\dfrac{\sqrt{p}}{a}1 + B\dfrac{\sqrt{p}}{a}0 = 0, \end{cases}$$

из которой следует

$$A = 0, \qquad B = \frac{u_0}{p\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{\sqrt{p}}{a}l\right)}.$$

Тогда решение в изображениях принимает вид:

$$U(x,p) = \frac{u_0}{p\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{\sqrt{p}}{a}l\right)}\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right). \qquad (3.37)$$

Будем искать оригинал от изображения (3.37) используя вторую теорему разложения. Особые точки функции (3.37) находятся из уравнения

$$p\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) = 0.$$

Оно выполняется при

$$p = 0 \text{ и } \mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) = 0.$$

Косинус гиперболический ch*(z)* может принимать нулевые значения только в области комплексных значений аргумента. Введем обозначение $\dfrac{\sqrt{p}}{a}l = i\mu$, тогда

$$\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) = \mathrm{ch}(i\mu) = \cos\mu = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \mu_k = \frac{\pi}{2} + \pi k \;\Rightarrow\; p_k = -\mu_k^2\frac{a^2}{l^2},\;\; k = 1, 2, \ldots \qquad (3.38)$$

Все особые точки являются простыми полюсами, поэтому:

$$u(x,t) = \underset{p_0}{res}\left(\frac{Q(p)}{R(p)}e^{pt}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\underset{p_k}{res}\left(\frac{Q(p)}{R(p)}e^{pt}\right) =$$
$$= \frac{Q(p_0)}{R'(p_0)}e^{p_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t}, \qquad (3.39)$$

где

$$Q(p)=\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right),\qquad R(p)=p\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right).$$

Найдем

$$R'(p):\quad \left[R(p)\right]'=\left[R(\mu(p))\right]'=R'(\mu)\frac{d\mu}{dp}=\frac{R'(\mu)}{\left[\dfrac{dp}{d\mu}\right]}.$$

В нашем случае

$$R(\mu)=-\mu^2\frac{a^2}{l^2}\operatorname{ch}i\mu=-\mu^2\frac{a^2}{l^2}\cos\mu,$$

$$R'(\mu)\Big|_{\mu=\mu_k}=\mu_k^2\frac{a^2}{l^2}\sin\mu_k-2\mu_k\frac{a^2}{l^2}\cos\mu_k,$$

$$\left.\frac{dp}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_k}=-2\mu_k\frac{a^2}{l^2}.$$

Учитывая значения μ_k из (3.38) получим:

$$R'(\mu)\Big|_{\mu=\mu_k}=(-1)^{k+1}\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{a^2}{l^2},$$

$$\left.\frac{d\,p}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_k}=-2\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)\frac{a^2}{l^2}.$$

При этом $Q(p_k)e^{p_k t}$ примет вид:

$$Q(p_k)e^{p_k t}=u_0\operatorname{ch}\left(i\mu_k\frac{x}{l}\right)e^{-\mu_k^2\frac{a^2}{l^2}t}=u_0\cos\left(\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)\frac{x}{l}\right)e^{-\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{a^2}{l^2}t}$$

и вычет в точке p_k определится по формуле:

$$-2\frac{u_0\cos\left(\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)\frac{x}{l}\right)e^{-\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{a^2}{l^2}t}}{(-1)^{k+1}\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

В точке $p_0=0$ вычет находится аналогично

$$\underset{p_0}{res}\left(\frac{Q(p)}{R(p)}e^{pt}\right)=\frac{Q(p_0)}{R'(p_0)}e^{p_0t}=$$

$$=\frac{u_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{p_0}}{a}l\right)+p_0\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p_0}}{a}l\right)\frac{l}{2\sqrt{p_0}a}}=u_0.$$

Суммируя вычеты во всех особых точках получим решение $u(x,t)$ в виде:

$$u(x,t)=u_0-u_0 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)\frac{x}{l}\right)e^{-\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{a^2}{l^2}t}}{(-1)^{k+1}\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

6. Решить задачу об остывании слоя толщины $2l$, имеющего начальную температуру $u(x,0)=0$ в среде с температурой u_1.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\alpha\big(u(l,t)-u_1\big)=0,\ \ u(x,0)=0.\end{gathered}\tag{3.40}$$

Переходим к изображениям, приняв соответствие

$$u(x,t)\doteqdot U(x,p)$$

и тогда задача (3.40) запишется в виде:

$$\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{p}{a^2}U(x,p)=0.\tag{3.41}$$

С граничными условиями:

$$\frac{dU(0,p)}{dx}=0,\ \ \frac{dU(l,p)}{dx}+\alpha\left(U(l,p)-\frac{u_1}{p}\right)=0.\tag{3.42}$$

Общее решение уравнения (3.41)

$$U(x,p) = A\,\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right) + B\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right). \qquad (3.43)$$

Используя первое граничное условие (3.42) находим константу A:

$$\frac{dU(0,p)}{dx} = A\frac{\sqrt{p}}{a}1 + B\frac{\sqrt{p}}{a}0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0$$

Из второго граничного условия (3.42) находим вторую константу:

$$\frac{dU(l,p)}{dx} + \alpha\left(U(l,p) - \frac{u_1}{p}\right) =$$

$$= B\frac{\sqrt{p}}{a}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) + B\alpha\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) - \alpha\frac{u_1}{p} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$B = \frac{\alpha u_1}{p\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) + \alpha\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)\right)}.$$

Тогда решение в изображениях принимает вид:

$$U(x,p) = \frac{\alpha u_1}{p\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) + \alpha\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)\right)}\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right). \qquad (3.44)$$

Будем искать оригинал от изображения (3.44) используя вторую теорему разложения. Особые точки функции (3.40) находятся из уравнения

$$p\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) + \alpha\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)\right) = 0. \qquad (3.45)$$

Оно выполняется при

$$p = 0 \text{ и } \frac{\sqrt{p}}{a}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) + \alpha\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) = 0.$$

Введем обозначение

$$\frac{\sqrt{p}}{a}l = i\mu,$$

тогда

$$p = -\mu^2 \frac{a^2}{l^2},$$

и выражение в скобках преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} & i\frac{\mu}{l}\,\mathrm{sh}(i\mu) + \alpha\,\mathrm{ch}(i\mu) = -\frac{\mu}{l}\sin\mu + \alpha\cos\mu = 0 \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow\ \mathrm{tg}(\mu) = \frac{\alpha l}{\mu}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Из полученного трансцендентного уравнения (3.46) определяются точки μ_k, в которых (3.45) выполняется. При этом

$$p_k = -\mu_k^2 \frac{a^2}{l^2}.$$

Точки $p = 0$ и $p_k = -\mu_k^2 \dfrac{a^2}{l^2}$ являются особыми точками типа полюс. Определим порядок полюса. Для этого можно определить порядок нуля в знаменателе в выражении (3.44) (он определяется порядком первой не равной нулю в этой точке производной).

$$g(p) = p\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) + \alpha\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)\right)\Bigg|_{p=p_k} = 0,$$

$$g'(p_k) = \left(\frac{\sqrt{p}}{a}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) + \alpha\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)\right)\Bigg|_{p=p_k} +$$

$$+p\left(\left(\frac{1}{2a\sqrt{p}} + \frac{\alpha l}{2a\sqrt{p}}\right)sh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) + \frac{l}{2a^2}ch\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)\right)\Bigg|_{p=p_k} \neq 0.$$

Таким образом точки p_k являются простыми полюсами. В соответствии со второй теоремой разложения запишем:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \operatorname*{res}_{p_0}\left(\frac{Q(p)}{R(p)}e^{pt}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname*{res}_{p_k}\left(\frac{Q(p)}{R(p)}e^{pt}\right)= \\
&= \frac{Q(p_0)}{R'(p_0)}e^{p_0 t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t},
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

Где

$$
Q(p)=\alpha u_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right),
$$

$$
R(p)=p\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)+\alpha \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)\right).
$$

Найдем $R'(p)$:

$$
\left[R(p)\right]'=\left[R(\mu(p))\right]'=R'(\mu)\frac{d\mu}{dp}=\frac{R'(\mu)}{\left[\dfrac{dp}{d\mu}\right]}.
$$

В нашем случае

$$
R(\mu)=-\mu^2\left(\frac{\mu}{l}i\operatorname{sh}(i\mu)+\alpha\operatorname{ch}(i\mu)\right)=\mu^2\left(\frac{\mu}{l}\sin(\mu)-\alpha\cos(\mu)\right),
$$

$$
R'(\mu)\Big|_{\mu=\mu_k}=\mu_k^2\left(\frac{\mu_k}{l}\cos(\mu_k)+\frac{\sin(\mu_k)}{l}+\alpha\sin(\mu_k)\right),
$$

$$
\left.\frac{dp}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_k}=-2\mu_k\frac{a^2}{l^2},
$$

$$
Q(p_k)e^{p_k t}=\alpha u_1\operatorname{ch}\left(i\mu_k\frac{x}{l}\right)e^{-\mu_k^2\frac{a^2}{l^2}t}=\alpha u_1\cos\left(\mu_k\frac{x}{l}\right)e^{-\mu_k^2\frac{a^2}{l^2}t},
$$

и тогда вычет в точке p_k определится по формуле:

$$
-\frac{\alpha u_1\cos\left(\mu_k\dfrac{x}{l}\right)e^{-\mu_k^2\frac{a^2}{l^2}t}\,2a^2}{\mu_k l^2\left(\dfrac{\mu_k}{l}\cos(\mu_k)+\dfrac{\sin(\mu_k)}{l}+\alpha\sin(\mu_k)\right)}.
$$

Найдем вычет в точке $p_0 = 0$. В этой точке значения

$$Q(p_0)e^{-p_0 t} = \alpha u_1,$$

$$R'(p_0) = \left(\frac{\sqrt{p_0}}{a}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p_0}}{a}l\right) + \alpha\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{p_0}}{a}l\right)\right) +$$

$$+ p_0\left(\frac{\sqrt{p_0}}{a}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p_0}}{a}l\right) + \alpha\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{p_0}}{a}l\right)\right)' = \alpha.$$

Просуммировав вычеты во всех особых точках получим решение задачи (3.39) в виде:

$$u(x,t) = u_1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha u_1 \cos\left(\mu_k \dfrac{x}{l}\right) e^{-\mu_k^2 \frac{a^2}{l^2} t}\, 2a^2}{\mu_k l^2 \left(\dfrac{\mu_k}{l}\cos(\mu_k) + \dfrac{\sin(\mu_k)}{l} + \alpha\sin(\mu_k)\right)}.$$

7. Решить задачу о колебании полубесконечной струны, если к ней приложена сила, меняющаяся по закону $f(t) = B\sin(\omega t)$.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\sin(\omega t),$$
$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(\infty,t)}{\partial x} = 0. \qquad (3.48)$$

Переходим к изображениям, приняв соответствие

$$u(x,t) \risingdotseq U(x,p),$$

тогда задача (3.48) запишется в виде:

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2}U(x,p) = -\frac{B\omega}{c^2\left(p^2+\omega^2\right)}. \qquad (3.49)$$

С граничными условиями:

$$U(0,p) = 0, \quad \frac{dU(\infty,p)}{dx} = 0. \qquad (3.50)$$

Решение уравнения (3.49) имеет вид:

$$U(x,p) = Ae^{-\frac{p}{c}x} + Be^{\frac{p}{c}x} + U_c.$$

Будем искать U_c в соответствии с видом правой части (3.49) не зависящем от x. Тогда в уравнении (54) $\frac{d^2U_c}{dx^2} = 0$ и частное решение уравнения (3.49) получается в виде:

$$U_c(p) = \frac{B\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}.$$

Используя второе граничное условие (3.50) находим константу B:

$$\frac{dU(\infty,p)}{dx} = -A\frac{p}{c}e^{-\frac{p}{c}x} + B\frac{p}{c}e^{\frac{p}{c}x} = 0 \quad \Rightarrow B = 0.$$

Из первого граничного условия (3.50) находим вторую константу:

$$U(0,p) = Ae^{-\frac{p}{c}0} + \frac{B\omega}{p^2(p^2+\omega^2)} = 0 \;\Rightarrow\; A = -\frac{B\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}.$$

Тогда решение в изображениях принимает вид:

$$U(x,p) = -\frac{B\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}e^{-\frac{p}{c}x} + \frac{B\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}. \qquad (3.51)$$

Находя оригинал от изображения (3.51) получим решение задачи (3.48). Оригинал для функции (3.51) можно найти, используя дважды теорему интегрирования оригинала, либо путем разложения функции на простые дроби, либо используя теорему умножения, и затем в оригинале для первого слагаемого учесть теорему запаздывания.

Запишем решение задачи (3.48):

$$u(x,t) = \frac{1}{\omega}\left(t-\frac{x}{a}\right)\eta\left(t-\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{\omega^2}\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)\eta\left(t-\frac{x}{a}\right) -$$

$$-\frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\sin(\omega t).$$

8. Стержень длины l находится в состоянии покоя, его конец $x=0$ закреплен. В момент времени $t=0$ к свободному концу стержня приложена сила F (на единицу площади сечения стержня), направленная вдоль стержня. Найти колебания стержня.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le l, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{F}{E}. \tag{3.52}$$

Переходим к изображениям, приняв соответствие $u(x,t) \risingdotseq U(x,p)$ и задача (3.52) запишется в виде:

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} U(x,p) = 0 \tag{3.53}$$

с граничными условиями:

$$U(0,p) = 0, \quad \frac{dU(l,p)}{dx} = \frac{F}{E}\frac{1}{p}. \tag{3.54}$$

Общее решение уравнения (3.53) имеет вид:

$$U(x,p) = A\,\mathrm{ch}\left(\frac{p}{c}x\right) + B\,\mathrm{sh}\left(\frac{p}{c}x\right).$$

Используя второе граничное условие (3.54) находим константу A:

$$U(0,p) = A\,\mathrm{ch}\left(\frac{p}{c}x\right) + B\,\mathrm{sh}\left(\frac{p}{c}x\right)\Bigg|_{x=0} = 0 \;\Rightarrow\; A = 0.$$

Из первого граничного условия (3.54) находим вторую константу:

$$\frac{dU(l,p)}{dx} = B\frac{p}{c}\mathrm{ch}\left(\frac{p}{c}l\right) = \frac{F}{E}\frac{1}{p} \;\Rightarrow\; B = \frac{cF}{E}\frac{1}{p^2\,\mathrm{ch}\left(\frac{p}{c}l\right)}.$$

Тогда решение в изображениях принимает вид:

$$U(x,p) = \frac{cF}{E}\frac{1}{p^2 ch\left(\frac{p}{c}l\right)}\mathrm{sh}\left(\frac{p}{c}x\right). \tag{3.55}$$

Будем искать оригинал от изображения (3.55) используя вторую теорему разложения. Для этого найдем особые точки приравняв нулю знаменатель в (3.55).

$$p^2\operatorname{ch}\left(\frac{p}{c}l\right)=0.$$

Это равенство выполняется при $p=p_0=0$ и при

$$\operatorname{ch}\left(\frac{p}{c}l\right)=\operatorname{ch}(i\mu)=\cos\mu=0 \Rightarrow \mu_k=\pm\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ k=0,1,2,...$$

Из последнего равентства находим:

$$p_k=i\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{c}{l},\ \ \overline{p}_k=-i\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{c}{l},\ \ k=0,1,2,...\ –$$

комплексно–сопряженные корни. Особые точки p_0, p_k, $\overline{p}_k$, являются полюсами первого порядка. Для комплексно–сопряженных корней выполняется равенство

$$\underset{p_k}{res}\left(F(p)\right)+\underset{\overline{p}_k}{res}\left(F(p)\right)=2\operatorname{Re}\left(\underset{p_k}{res}\left(F(p)\right)\right).$$

Тогда, согласно второй теореме разложения решение задачи (3.52) запишется в виде:

$$u(x,t)=\underset{p_0}{res}\left(U(x,p)e^{pt}\right)+2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\underset{p_k}{res}\left(U(x,p)e^{pt}\right). \qquad (3.56)$$

Найдем вычет в точке p_0:

$$\underset{p_0}{res}\left(U(x,p)e^{pt}\right)=\frac{cF}{E}\underset{p_0}{res}\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{p}{c}x\right)}{p^2\operatorname{ch}\left(\frac{p}{c}l\right)}e^{pt}\right)=$$

$$=\frac{cF}{E}\lim_{p\to 0}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{p}{c}x\right)}{\left(p^2\operatorname{ch}\left(\frac{p}{c}l\right)\right)}e^{pt}p=\frac{cF}{E}\lim_{p\to 0}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{p}{c}x\right)}{\left(p\operatorname{ch}\left(\frac{p}{c}l\right)\right)}=\frac{Fx}{E}.$$

Действительная часть вычета в точке p_k:

$$\operatorname{Re}\underset{p_k}{res}\left(U(x,p)e^{pt}\right)=\frac{cF}{E}\operatorname{Re}\underset{p_k}{res}\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{p}{c}x\right)}{p^2\operatorname{ch}\left(\frac{p}{c}l\right)}e^{pt}\right)=$$

$$=\frac{cF}{E}\operatorname{Re}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{p_k}{c}x\right)}{\left(2p_k\operatorname{ch}\left(\frac{p_k}{c}l\right)+p_k{}^2\operatorname{sh}\left(\frac{p_k}{c}l\right)\frac{l}{c}\right)}e^{p_k t}. \tag{3.57}$$

Учитывая, что

$$\operatorname{ch}\left(\frac{p_k}{c}l\right)=0, \qquad p_k=i\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$$

преобразуем (62):

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\operatorname{sh}\left(i\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{x}{c}\right)}{\left(-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2\frac{c^2}{l^2}\frac{l}{c}\operatorname{sh}\left(i\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\right)\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{c}{l}t}\right]=$$

$$=\operatorname{Re}\left[\frac{i\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{x}{l}\right)}{\left(-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2\frac{c}{l}i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{c}{l}t}\right]=$$

$$=\operatorname{Re}\left[\frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{x}{l}\right)\left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{c}{l}t\right)+i\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{c}{l}t\right)\right)}{\left(-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2\frac{c}{l}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\right)}\right]=$$

$$=\frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{x}{l}\right)\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{c}{l}t\right)}{\left((-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2\frac{c}{l}\right)}.$$

Таким образом, решение задачи (3.52) получено в виде:

$$u(x,t)=\frac{Fx}{E}+2\frac{cF}{E}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{x}{l}\right)\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{c}{l}t\right)}{\left((-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2\frac{c}{l}\right)}.$$

Решить следующие задачи:

218. Найти распределение температуры в однородном полуограниченном стержне $0\le x<\infty$, если его начальная температура равна нулю, а температура левого конца поддерживается равной $u_0=const$. Боковая поверхность стержня теплоизолирована.

$$u_t=a^2u_{xx},\quad u(x,0)=0,\ u(0,t)=u_0,\ u_x(\infty,t)=0.$$

219. Найти распределение температуры в однородном полуограниченном стержне $0\le x<\infty$, если его начальная температура u_0 постоянна, а температура левого конца поддерживается равной нулю. Боковая поверхность стержня теплоизолирована.

$$u_t=a^2u_{xx},\quad u(x,0)=u_0,\quad u(0,t)=0,\quad u_x(\infty,t)=0.$$

220. Найти распределение температуры в однородном полуограниченном стержне $0\le x<\infty$ с тепловой изоляцией боковой поверхности, если начальная температура стержня равна нулю и температура левого конца $x=0$ изменяется по закону $u(0,t)=f(t)$.

$$u_t=a^2u_{xx},\quad u(x,0)=0,\ u(0,t)=f(t),\quad u_x(\infty,t)=0.$$

221. Найти распределение температуры в однородном полуограниченном стержне $0\le x<\infty$ с тепловой изоляцией боковой поверхности, если начальная температура стержня равна нулю, а на границу $x=0$ падает тепловой поток интенсивности q.

$$u_t=a^2u_{xx},\quad u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=-q,\quad u_x(\infty,t)=0.$$

222. Найти распределение температуры в однородном полуограниченном стержне $0\le x<\infty$ с тепловой изоляцией боковой поверхности, если начальная температура стержня равна нулю, а на границе $x=0$ происходит конвективный теплообмен с окружающей средой с температурой u_0.

$$u_t=a^2u_{xx},\quad u(x,0)=0,\ u_x(0,t)-\alpha\big(u(0,t)-u_0\big)=0,$$

$$u_x(\infty,t)=0.$$

223. Найти распределение температуры в однородном полуограниченном стержне $0 \le x < \infty$, если его начальная температура равна нулю, температура левого конца поддерживается равной $u_0 = const$, через боковую поверхность стержня происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру равную нулю.

$$u_t = a^2 u_{xx} - Hu, \quad u(x,0) = 0, \; u(0,t) = u_0, \; u_x(\infty,t) = 0.$$

224. Найти распределение температуры в однородном полуограниченном стержне $0 \le x < \infty$, если его начальная температура равна нулю, на границу $x=0$ падает тепловой поток интенсивности q, через боковую поверхность стержня происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру равную нулю.

$$u_t = a^2 u_{xx} - Hu, \quad u(x,0) = 0, \; u_x(0,t) = -q, \quad u_x(\infty,t) = 0.$$

225. На границах $x=0$ и $x=l$ пластинки толщины l в течение всего времени удерживаются температура равная нулю. Начальная температура пластинки равна u_0, причем $u_0 = \mathrm{const} \ne 0$. Определить распределения температуры в пластинке в любой момент времени.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x,0) = u_0, u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0.$$

226. На границе $x=0$ пластинки толщины l поддерживается постоянная температура u_c, граница $x=l$ теплоизолирована. Начальная температура пластинки равна u_0, причем $u_0 = \mathrm{const} \ne 0$. Определить распределения температуры в пластинке в любой момент времени.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x,0) = u_0, u(0,t) = u_c, \; u_x(l,t) = 0.$$

227. Граница $x=0$ пластинки толщины l теплоизолирована, на границе $x=l$ происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру u_0, начальная температура пластинки равна 0. Определить распределения температуры в пластинке в любой момент времени.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x,0) = 0, \; u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) + \alpha u(l,t) = \alpha u_0.$$

228. Струна длины l закреплена с двух сторон и имеет начальное отклонение в виде $\sin(2\pi x / l)$. Определить отклонения струны от положения равновесия во времени, если начальная скорость струны равна нулю.

$u_{tt}=a^2u_{xx}$, $u(x,0)=\sin(2\pi x/l)$, $u_t(x,0)=0$, $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$.

229. Струна длины *l* закреплена на границе *x=0*, не закреплена на границе *x=l* и имеет начальное отклонение в виде $\sin(3\pi x/(2l))$. Определить отклонения струны от положения равновесия во времени, если начальная скорость струны равна нулю. $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $u(x,0)=\sin(3\pi x/(2l))$, $u_t(x,0)=0$, $u(0,t)=0$,

$u_x(l,t)=0$.

230. Струна длины *l* закреплена с двух сторон и находится в положении равновесия. В начальный момент времени точкам струны придали начальную скорость, зависящую от координаты в виде $\sin(\pi x/l)$. Определить отклонения струны от положения равновесия во времени. $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=\sin(\pi x/l)$,

$u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$.

231. Струна длины *l* закреплена на границе *x=0*, не закреплена на границе *x=l* и имеет начальное отклонение в виде $(x-l)^2$. Определить отклонения струны от положения равновесия во времени, если начальная скорость струны равна нулю.

$u_{tt}=a^2u_{xx}$, $u(x,0)=(x-l)^2$, $u_t(x,0)=0$, $u(0,t)=0$,

$u_x(l,t)=0$.

232. Струна длины *l* закреплена с двух сторон и имеет начальное отклонение в виде $4hx(l-x)/l^2$. Определить отклонения струны от положения равновесия во времени, если начальная скорость струны равна нулю.

$u_{tt}=a^2u_{xx}$, $u(x,0)=4hx(l-x)/l^2$, $u_t(x,0)=0$, $u(0,t)=0$,

$u(l,t)=0$.

233. Стержень длины *l* расположен на горизонтальной плоскости, закреплен на границе *x=0*, не закреплен на границе *x=l*. В начальный момент времени поддерживающая стержень плоскость убирается и на

стержень начинает действовать сила тяжести. Определить отклонения стержня от положения равновесия во времени, затухание не учитывать.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g\,, \qquad u(x,0) = 0\,,\; u_t(x,0) = 0\,, u(0,t) = 0\,,$$
$$u_x(l,t) = 0\,.$$

234. Стержень длины *l* расположен на горизонтальной плоскости, закреплен с двух сторон. В начальный момент времени поддерживающая стержень плоскость убирается и на стержень начинает действовать сила тяжести. Определить отклонения стержня от положения равновесия во времени, затухание не учитывать.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g\,, \qquad u(x,0) = 0\,,\; u_t(x,0) = 0\,, u(0,t) = 0\,,$$
$$u(l,t) = 0\,.$$

235. Стержень длины *l*, конец которого $x=0$ закреплен, находится в состоянии покоя. В момент времени $t=0$ к свободному концу стержня приложена сила Q (на единицу площади), направленная вдоль стержня. Найти смещение $u(x,t)$ стержня по истечении времени t с момента приложения силы Q.

236. Тяжелый растяжимый стержень, длина которого в нерастянутом состоянии равна *l*, вертикально подвешен за конец $x=0$, а конец $x=l$ оставлен свободным. Найти вынужденные колебания стержня.

237. Найти вынужденные поперечные колебания струны, закрепленной на конце $x=0$ и подверженной на другом конце $x=l$ действию возмущающей гармонической силы, вызывающей смещение $A\sin\omega t$.

238. Струна длины *l* закреплена на концах $x=0$ и $x=l$. В момент времени $t=0$ она натянута в точке $x=c$ ($0<c<l$) на расстояние, равное единице, от оси Ox, затем струна отпущена без сообщения ее точкам начальной скорости. Определить отклонение $u(x,t)$ точек струны для любого момента времени.

Приложение 1

ТАБЛИЦА ИЗОБРАЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

	Оригинал	Изображение
1.	1	$\frac{1}{p}$
2.	$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{p+\lambda}$
3.	t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$
4.	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5.	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6.	$\mathrm{sh}\ \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7.	$\mathrm{ch}\ \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
8.	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$
9.	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
10.	$\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}\,(a\geq 0)$

Приложение 2

ОТВЕТЫ

1. а) да; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) нет; ж) нет; з)да; и) нет; к) да; л) да; м) да.

2. $\dfrac{1}{p^2}$. 3. $\dfrac{1}{(p-1)^2}$. 4. $\dfrac{3}{p^2+9}$. 5. $\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$. 6. $\dfrac{p+1}{p^2}$.

7. $\dfrac{1-p}{p^2+1}$. 8. $\dfrac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$. 9. $\dfrac{1}{p-a}$. 10. $\dfrac{4}{p^2+16}$. 11. $\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$.

12. $\dfrac{3}{p^2-9}$. 13. $aF(pa)$. 14. $\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$.

15. $\dfrac{m\left(p^2+m^2-n^2\right)}{\left(p^2+m^2+n^2\right)^2-4m^2n^2}$. 16. $\dfrac{p^3+7p}{\left(p^2+9\right)\left(p^2+1\right)}$.

17. $\dfrac{2mnp}{\left(p^2+m^2-n^2\right)^2-4m^2n^2}$. 18. $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{p}+\dfrac{p}{p^2+16}-\dfrac{4p}{p^2+1}\right)$.

19. $\dfrac{p\left(p^2+m^2+n^2\right)}{\left(p^2+m^2+n^2\right)^2-4m^2n^2}$. 20. $\dfrac{p^2+2}{p\left(p^2+4\right)}$.

21. $\dfrac{6}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+9\right)}$. 22. $\dfrac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$.

23. $\dfrac{p^4+16p^2+24}{p\left(p^2+4\right)\left(p^2+16\right)}$. 24. $\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$. 25. $\dfrac{1}{(p-1)^2}$.

26. $\dfrac{2p^3-6p}{\left(p^2+1\right)^3}$. 27. $\dfrac{2\left(p^2+p+1\right)}{\left(p^2-1\right)^2}$. 28. $\dfrac{2p^2+4p+8}{\left(p^2+4\right)^2}$.

29. $\dfrac{6p}{\left(p^2-1\right)^2}$. 30. $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$. 31. $\dfrac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p\left(p^2+\omega^2\right)^2}$.

32. $\dfrac{4}{\left(p^2-4\right)^2}$. 33. $\dfrac{p^2+2\omega^2}{p^2\left(p^2+4\omega^2\right)}$. 34. $\dfrac{1}{p^2-\omega^2}$. 35. $\dfrac{2}{p\left(p+1\right)^3}$.

36. $\ln\dfrac{p}{p-1}$. 37. $\ln\dfrac{p+1}{p}$. 38. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{p}$. 39. $\ln\dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p}$.

40. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2+1}$. 41. $\ln\dfrac{p}{p-1}-\dfrac{1}{p}$. 42. $\ln\dfrac{p+1}{p-1}$. 43. $\ln\dfrac{b}{a}$.

44. $\operatorname{arctg}\dfrac{a}{\alpha}$. 45. $\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{m}$. 46. $A\ln\dfrac{\delta}{\alpha}+B\ln\dfrac{\delta}{\beta}+C\ln\dfrac{\delta}{\gamma}$.

47. $\ln\dfrac{b}{a}$. 48. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{a+b}{a-b}\right|$. 49. $\dfrac{1}{\left(p-2\right)^2+1}$. 50. $\dfrac{p-m}{\left(p-m\right)^2+n^2}$.

51. $\dfrac{3!}{\left(p+1\right)^4}$. 52. $\dfrac{1}{\left(p-1\right)^2-1}$. 53. $\dfrac{p^2-2p}{\left(p^2-2p+2\right)^2}$.

54. $\dfrac{1}{2\left(p-3\right)}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p-3}{\left(p-3\right)^2+4}$.

55. $\dfrac{1}{2\left(p+\alpha\right)}+\dfrac{p+\alpha}{2\left[\left(p+\alpha\right)^2+4\beta^2\right]}$. 56. $\dfrac{e^{-bp}}{p^2+1}$.

57. $\dfrac{e^{-bp}}{2p}+\dfrac{pe^{-bp}}{2(p^2+4)}$. 58. $\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$. 59. $\dfrac{1-e^{-p}}{p}$.

60. $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$. 61. $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$. 62. $\dfrac{1-e^{-ap}}{p^2}$.

63. $\dfrac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p^2}$. 64. $F(p)=\dfrac{1}{ap^2}\left(2e^{-2ap}-1\right)+\dfrac{2}{p}e^{-ap}$.

65. $F(p)=\dfrac{e^{-ap}}{p}(2-e^{-ap}-e^{-2ap})$.

66. $F(p)=-\frac{1}{p}+\frac{1}{ap^2}+\frac{ap-2}{ap^2}e^{-ap}+\frac{1}{ap^2}e^{-2ap}$.

67. $F(p)=\frac{1}{p}+\frac{1-2ap}{ap^2}e^{-ap}-\frac{1}{ap^2}e^{-2ap}$.

68. $F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}e^{-ap}+\frac{2}{ap^2}e^{-3ap}$. 69. $\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$.

70. $\frac{p}{(p-2)(p^2+1)}$. 71. $\frac{2}{p^2(p^2-1)}$.

72. $\frac{n!F(p)}{p^{n+1}}$. 73. $\frac{2}{p^3(p+2)}$. 74. $(t-1)^2\eta(t-1)$.

75. $(t-2)\eta(t-2)$. 76. $e^{t-2}\eta(t-2)$. 77. $e^{-3(t-3)}\eta(t-3)$.

78. $e^{-2t}\sin t$. 79. $\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3}\right)$. 80. $(1-t)e^{-t}$.

81. $\frac{1}{2}t\sin t$. 82. $1-e^{-t}-te^{-t}$. 83. $\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t$.

84. $\frac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t$. 85. $t-\sin t$.

86. $\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t$.

87. $1-ne^{-t}+\frac{1}{2}n(n-1)e^{-2t}-...+(-1)^n e^{-nt}$.

88. $\frac{2}{3}e^{-t/2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-t\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$.

89. $e^{-t}\left(1-t^2\right)$. 90. $\frac{1}{3}e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{1}{3}e^{-t}$.

91. $\frac{3}{5}+\frac{e^{-2t}}{5}(4\sin t-3\cos t)$. 92. $\frac{1}{9}\left(e^{-2t}-e^{t}+3te^{t}\right)$.

93. $2e^{t}+e^{t/2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

94. $\frac{1}{3}te^{t}-\frac{1}{3}te^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

95. $\frac{1}{2}e^{t-1}\sin 2(t-1)\eta(t-1)+\cos 3(t-2)\eta(t-2)$.

96. $(t-3)e^{-(t-3)}\eta(t-3)$. 97. $e^{t-1}\eta(t-1)-\eta(t-1)$.

98. $\sin(t-2)\eta(t-2)+2\sin(t-3)\eta(t-3)+3\sin(t-4)\eta(t-4)$.

99. $\operatorname{sh}(t-1)\eta(t-1)+\operatorname{ch}2(t-2)\eta(t-2)$.

100. $\frac{1}{3}\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{5}e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-$
$-\frac{1}{20}\cos 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{10}\sin 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)$.

101. $(t-1)\eta(t-1)+(t-2)^{2}\eta(t-2)+(t-3)^{3}\eta(t-3)$.

102. $\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)-\cos\left(t-\frac{1}{3}\right)\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)$.

103. $1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$. 104. $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}\doteqdot 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{a^{2}}{4t}}-a\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$.

105. $\left(t+\frac{\alpha^{2}}{2}\right)\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)-\alpha\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{\alpha^{2}}{4t}}$.

106. $ae^{hx+a^{2}h^{2}t}\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)$.

107. $\frac{1}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{e^{a(at+\alpha)}}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)$.

108. $\Phi(p)F\left(\sqrt{p}\right)=\frac{1}{p-1}\doteqdot e^{t}$. 109. $I(t)=e^{-t}$.

110. $I(t)=2te^{t}$. 111. $I(t)=2te^{-t}$. 112. $x(t)=(t+1)e^{-t}$.

113. $x(t)=-1$. 114. $x(t)=\frac{e^{-2t}-\cos t+2\sin t}{5}$.

115. $x(t)=t+\frac{1}{2}t^{2}$. 116. $x(t)=t$. 117. $x(t)=\cos t$.

118. $x(t)=\frac{1}{4}e^{t}+\frac{5}{12}e^{-3t}-\frac{2}{3}$. 119. $x(t)=\frac{1}{4}\left(1-e^{2t}+2te^{2t}\right)$.

120. $x(t)=\frac{2}{25}e^{-2t}-\frac{2}{25}\cos t+\frac{14}{25}\sin t-\frac{1}{5}t\sin t-\frac{2}{5}t\cos t$.

121. $x(t)=\frac{1}{4}\left(e^{-t}-te^{-t}-\cos t\right)$.

122. $x(t)=\frac{1}{2}e^{t}-t-1+\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$.

123. $x(t)=\frac{1}{2}t^{2}-1+\cos t-\sin t$. 124. $x(t)=t-\sin t$.

125. $x(t)=\frac{1}{2}t^{2}e^{t}+te^{t}$. 126. $x(t)=\frac{3}{5}e^{-t}\sin 2t-\frac{4}{5}e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{5}$.

127. $x(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^{t}\cos t+e^{t}\sin t\right)$.

128. $x(t)=2+\frac{1}{2}\left(e^{-t}-\cos t+\sin t\right)$.

129. $x(t)=t^{2}-4t+6-5e^{-t}-te^{-t}$.

130. $x(t)=2t+\frac{1}{2}\left(e^{t}+\cos t-\sin t\right)$.

131. $x(t)=\frac{1}{2}t\sin t-\cos t+\sin t$.

132. $x(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t-4+e^t.$

133. $x(t)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t.$

134. $x(t)=\frac{1}{2}(\cos t+\operatorname{ch} t)-t-1.$

135. $x(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^t\cos t-e^{-t}\sin t\right).$

136. $x(t)=1-\cos t.$ 137. $x(t)=\frac{1}{4}t+\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t.$

138. $x(t)=\frac{3}{25}-\frac{t}{5}-\frac{3}{25}e^t\cos 2t+\frac{4}{25}e^t\sin 2t.$

139. $x(t)=e^{-t}-e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$

140. $x(t)=-1-\frac{1}{2}\left(\sin t+\cos t+e^{-t}\right).$

141. $x(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t-1.$

142. $x(t)=\operatorname{ch} t-\frac{1}{2}t^2-1.$ 143. $x(t)=2+\frac{1}{2}\left(e^t+\sin t-\cos t\right).$

144. $x(t)=e^t\left(1-t+\frac{1}{2}t^2\right)-1.$ 145. $x(t)=-\frac{3}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t.$

146. $x(t)=2e^{-t}+te^{-t}+t-2.$

147. $x(t)=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-3\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$

148. $x(t)=-\frac{1}{4}e^t-\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin t.$

149. $x(t)=\frac{1}{2}e^{t}-\frac{5}{6}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$

150. $x(t)=\cos t-t\cos t.$ 151. $x(t)=2+t-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}te^{t}-\frac{3}{2}e^{t}.$

152. $x(t)=1-\frac{22}{25}e^{-t}-\frac{6}{5}te^{-t}-\frac{3}{25}\cos 2t+\frac{4}{25}\sin 2t.$

153. $x(t)=\frac{t}{4}\sin 2t+\frac{1}{12}(\cos 2t-\cos 4t).$

154. $x(t)=\frac{1}{2}(t-1)e^{t}+\frac{1}{2}\cos t+2\sin t-2t\cos t.$

155. $x(t)=e^{t}\left(\frac{t^{2}}{2}-t+1\right).$

156.
$$x(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\eta(t)-\left[(t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right]\times$$
$$\times\eta(t-1)+\frac{1}{2}\left[(t-2)-\frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right]\eta(t-2).$$

157. $x(t)=\left[b+(1-b)\cos t\right]\eta(t)+\left[b-b\cos(t-a)\right]\eta(t-a).$

158.
$$x(t)=\frac{1}{3}\sin 3t\eta(t)+\frac{1}{9}\left[(t-1)-\frac{1}{3}\sin 3(t-1)\right]\eta(t-1)-$$
$$-\frac{2}{9}\left[(t-2)-\frac{1}{3}\sin 3(t-2)\right]\eta(t-2)+$$
$$+\frac{1}{9}\left[(t-3)-\frac{1}{3}\sin 3(t-3)\right]\eta(t-3).$$

159. $x(t)=\sum_{k=0}^{3}(-1)^{k}\left[1-e^{t-ka}+e^{t-ka}(t-ka)\right]\eta(t-ka).$

160. $x(t)=-\cos t.$ 161. $x(t)=(t-1)^{2}+e^{1-t}.$ 162. $x(t)=t^{2}+2t.$

163. $x(t)=\left(t-1-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos t.$ 164. $x(t)=\left(t^2-2t+2\right)e^{1-t}.$

165. $x(t)=\dfrac{1}{2}(e^t-1)-\ln\dfrac{1+e^t}{2}.$

166. $x(t)=e^{-t}\left[(t+1)\ln(t+1)-t\right].$

167. $x(t)=(e^t+2)\ln\dfrac{e^t+2}{3}-e^t+1.$

168. $x(t)=e^t-1-(t+\ln 2)(e^t+1)+(e^t+1)\ln(e^t+1).$

169. $x(t)=\sin t\left(t-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{tg\,\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\cos t\ln(2+\cos t)-\ln 3\cos t.$

170. $$x(t)=\frac{1}{3}-\frac{9-\pi\sqrt{3}}{27}\cos t+\frac{\sqrt{3}}{36}\sin t\ln\left|\frac{\sqrt{3}\sin t-2}{\sqrt{3}\sin t+2}\right|-$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{9}\cos t\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cos t).$$

171. $x(t)=\cos t\ \operatorname{arctg}(\cos t)-\dfrac{\pi}{4}\cos t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\cdot\ln\left|\dfrac{\sin t-\sqrt{2}}{\sin t+\sqrt{2}}\right|.$

172. $$x(t)=\sin t\operatorname{arctg}(\sin t)+$$
$$+\cos t\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}\right|-\ln(3+2\sqrt{2})\right\}.$$

173. $x(t)=-\operatorname{sh}t+2\operatorname{ch}t\left(\operatorname{arctg}e^t-\dfrac{\pi}{4}\right).$

$$x(t) = \ln 2\cos t - \cos t \ln(2+\sin t) - t\sin t +$$

174. $$+\frac{2}{\sqrt{3}}(2\sin t+1)\left(\operatorname{arctg}\frac{2tg\frac{t}{2}+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right).$$

175. $x(t)=e^t$, $y(t)=-e^t$. 176. $x(t)=e^t$, $y(t)=e^t$.

177. $x(t)=2(1-e^{-t}-te^{-t})$, $y(t)=2-t-2e^{-t}-2te^{-t}$.

178. $x(t)=\frac{1}{4}(e^t-e^{3t}+2te^{3t})$, $y(t)=\frac{1}{4}(5e^t-e^{3t}-2te^{3t})$.

179. $x(t)=e^t(\cos t-2\sin t)$, $y(t)=e^t(\cos t+3\sin t)$.

180. $x(t)=e^t-\frac{11}{34}e^{4t}-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\sin t-\frac{1}{2,},$

$$y(t)=-\frac{2}{3}e^t+\frac{22}{51}e^{4t}+\frac{4}{17}\cos t-\frac{1}{17}\sin t.$$

181. $x(t)=-\frac{1}{15}e^{-2t}+\frac{13}{12}e^{-t}-2+\frac{1}{6}e^t+\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{3}{20}e^{3t},$

$$y(t)=\frac{1}{15}e^{-2t}+\frac{13}{12}e^{-t}-2-\frac{1}{6}e^t+\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{7}{20}e^{3t},$$

$$z(t)=-\frac{13}{12}e^{-t}-\frac{1}{2}e^t+\frac{4}{3}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{3t}.$$

182. $x(t)=-e^t$, $y(t)=0$, $z(t)=e^t$.

183. $x(t)=\frac{3e^{-2t}}{4(2+a)}+\frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)}+\frac{3e^{at}}{a^2-4},$

$$y(t)=-\frac{e^{-2t}}{4(2+a)}+\frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)}+\frac{(a+1)e^{at}}{a^2-4}.$$

184. $x(t)=2-e^{-t}$, $y(t)=2-e^{-t}$, $z(t)=2e^{-t}-2$.

185. $\frac{1}{20}$. 186. $\frac{45}{4}$. 187. $\frac{27}{145}$. 188. $\ln\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$. 189. $-\frac{15!}{18!}\frac{1}{4}$.

190. $\dfrac{1}{p^2-a^2}\ln\sqrt{\dfrac{a^2+x^2}{p^2+x^2}}$. 191. $\operatorname{sh}\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$. 192. $\dfrac{t^{13}}{10296}$.

193. $-\dfrac{1}{2}\sin t+\dfrac{1}{2}te^{-t}$. 194. $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+a^2}{x^2+b^2}}$.

195. $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}x+\dfrac{1}{2}\sin x$.

196. $\varphi(x)=\dfrac{1}{3}\left(e^x-e^{-x/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}+\sqrt{3}e^{-x/2}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

197. $\varphi(x)=x+\dfrac{1}{6}x^3$. 198. $\varphi(x)=\dfrac{2}{5}e^{2x}+\dfrac{3}{5}\cos x+\dfrac{1}{5}\sin x$.

199. $\varphi(x)=2+x-e^{\frac{x}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

200. $\varphi(x)=-\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{1}{16}e^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{12}x^3$.

201. $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}e^{-x}+\dfrac{1}{6}e^x+\dfrac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

202. $\varphi(x)=\dfrac{1}{3}\left(e^x-e^{-x}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}x\right)$. 203. $\varphi(x)=xe^x$.

204. $\varphi(x)=e^x$. 205. $\varphi(x)=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cos\sqrt{3}x$.

206. $\varphi(x)=\operatorname{ch}x-xe^{-x}$. 207. $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch}x+\cos x)$.

208. $\varphi(x)=x-\dfrac{1}{6}x^3$. 209. $\varphi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$.

210. $\varphi(x)=1-x$. 211. $\varphi(x)=\sin x$. 212. $\varphi(x)\equiv 1$.

213. $\varphi(x)=e^{-x}$. 214. $\varphi(x)=1+2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$.

215. $\varphi(x)=2xe^x-x^2e^x$. 216. $\varphi(x)\equiv 1$.

217. $\varphi(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

218. $u(x,t)=u_0\left(1-\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right)=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/(2a\sqrt{t})}^{\infty}e^{-u^2}du$.

219. $u(x,t)=u_0\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{x/(2a\sqrt{t})}e^{-u^2}du$.

220. $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_{x/a}^{\infty}\varphi(\tau-x/a)e^{-\tau^2/4t}d\tau$, где $\varphi(\tau-x/a)$ является оригиналом $\varphi(\tau-x/a)\eta(\tau-x/a)\doteqdot pF\left(p^2\right)e^{-p\frac{x}{a}}$, где $F(p)$ является изображением заданной функции $f(t)$.

221. $u(x,t)=2qa\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)-qx\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$.

222. $u(x,t)=u_0\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)-$
$-u_0\exp\left(\alpha^2a^2t+\alpha x\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+\alpha a\sqrt{t}\right)$.

223.
$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left(\exp\left(-\sqrt{H}\frac{x}{a}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}-\sqrt{Ht}\right)+\exp\left(\sqrt{H}\frac{x}{a}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+\sqrt{Ht}\right)\right)$.

224.
$u(x,t)=\frac{qa}{2}\left(\exp\left(-\sqrt{H}\frac{x}{a}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}-\sqrt{Ht}\right)+\exp\left(\sqrt{H}\frac{x}{a}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+\sqrt{Ht}\right)\right)$.

225. $u(x,t)=\dfrac{4u_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2k-1}e^{-\left[(2k-1)a\pi/l\right]^2 t}\sin\dfrac{(2k-1)\pi x}{l}.$

226.

$$u(x,t)=u_c+2(u_0-u_c)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left((\pi/2+\pi k)x/l\right)}{(\pi/2+\pi k)}e^{-(\pi/2+\pi k)^2\left(a^2/l^2\right)t}$$

227.

$$u(x,t)=u_0-\frac{2\alpha u_0 a^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\mu_k x/l\right)e^{-\mu_k^2\frac{a^2}{l^2}t}}{\mu_k\left(\mu_k\cos(\mu_k)/l+\sin(\mu_k)/l+\alpha\sin(\mu_k)\right)},$$ где

μ_k определяется из трансцендентного уравнения $\mathrm{tg}(\mu)=\dfrac{\alpha l}{\mu}.$

228. $u(x,t)=\cos\left(\dfrac{2\pi a}{l}t\right)\sin\left(2\pi\dfrac{x}{l}\right).$

229. $u(x,t)=\cos\left(\dfrac{3\pi a}{2l}t\right)\sin\left(\dfrac{3\pi x}{2l}\right).$

230. $u(x,t)=\sin\left(\dfrac{\pi a}{l}t\right)\sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right).$

231.

$$u(x,t)=2l^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left((\pi/2+\pi k)x/l\right)\cos\left((\pi/2+\pi k)at/l\right)}{(\pi/2+\pi k)}-$$

$$-4l^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left((\pi/2+\pi k)x/l\right)\cos\left((\pi/2+\pi k)at/l\right)}{(\pi/2+\pi k)^3}.$$

232. $u(x,t)=\dfrac{32h}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin\left((2k+1)\pi x/l\right)\cos\left((2k+1)\pi at/l\right)}{(2k+1)^3}.$

233.

$$u(x,t)=\frac{2gl^2}{a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left((\pi/2+\pi k)x/l\right)\cos\left((\pi/2+\pi k)at/l\right)}{(\pi/2+\pi k)^3}-\frac{gx^2}{2a^2}+\frac{gxl}{a^2}.$$

234.

$$u(x,t)=-\frac{4gl^2}{a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2k+1)\pi x/l\right)\cos\left((2k+1)\pi at/l\right)}{\left((2k+1)\pi\right)^3}-\frac{gx^2}{2a^2}+\frac{gxl}{a^2}\cdot$$

235.

$$u(x,t)=\frac{Q}{E}x-\frac{8Ql}{\pi^2 E}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cdot\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}}{(2n+1)^2}.$$

236.

$$u(x,t)=\frac{gx(2l-x)}{2a^2}-$$

$$-\frac{16gl^2}{\pi^3 a^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cdot\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}}{(2n+1)^3}.$$

237.

$$u(x,t)=\frac{A\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t}{\sin\frac{\omega l}{a}}-$$

$$-\frac{Aa\omega}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{an\pi t}{l}}{\omega^2-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}.$$

238. $$u(x,t)=\frac{2l^2}{c(l-c)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi c}{l}\cdot\cos\frac{an\pi t}{l}}{n^2}.$$

Список литературы

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: «Наука», 1981. – 304с.
2. Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. – М.: «Высшая школа», 1976. – 184с.
3. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Пер. с нем. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. – 208с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров определения, теоремы, формулы. – М.: Наука. 1984. – 831с.
5. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М. Наука. 1974. – 320с.
6. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М. Высшая школа. 1965. – 465с.