ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО
ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Томский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(Учебное пособие)

Томск -2005

Рассмотрено и утверждено методической комиссией физико-технического факультета Томского государственного университета.
Протокол N 12 от 11 декабря 2005 г.

Председатель методической комиссии ФТФ,
доктор физ.-мат. наук, профессор В.А. Скрипняк

Рекомендовано кафедрой механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета для студентов, обучающихся по программам базового образования 150300 «Прикладная механика», 140400 - «Техническая физика», специальности 150301 «Динамика и прочность машин» в Томском государственном университете.

Заведующий кафедрой
механики деформируемого твердого тела В.А. Скрипняк

Учебное пособие «Математическая постановка задач линейной теории упругости» разработано для студентов, изучающих курс «Теория упругости» в рамках программ базового образования 150300 -«Прикладная механика», 140400 - «Техническая физика» и специальности 150301 «Динамика и прочность машин» дневной формы обучения.

В пособии рассмотрены основные уравнения теории деформации, теории напряжений и общая математическая постановка задач линейной теории упругости.

Разработчики:
доцент кафедры механики деформируемого твердого тела ФТФ,
кандидат тех. наук, Е.Г. Скрипняк
доцент кафедры механики деформируемого твердого тела ФТФ,
кандидат физ. мат наук, Т.В. Жукова
профессор, доктор физ.-мат. наук В.А. Скрипняк

Рецензент:
Зав. кафедрой
теории прочности и проектирования,
доктор физ.-мат. наук, профессор С.Н. Кульков

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Содержание

Введение

Теория упругости является разделом механики сплошной среды. Твердые тела рассматриваются как области сплошной среды Ω в трехмерном евклидовом пространстве. В отличие от точек пространства точки тела обладают физико-механическими свойствами сплошной среды и называются материальными точками. Положение материальной точки в пространстве характеризуется радиус-вектором $\vec{r}$ с компонентами x^k, $k=1,2,3$. Если в результате внешних механических или термических воздействий произошло изменение расстояний между материальными точками тела, то новое состояние тела принято называть деформированным.

Вектор, соединяющий конечные положения радиус-векторов материальной точки M в исходном $\vec{r}$ и деформированном состоянии $\vec{r}\,'(x^{k'})$, называется вектором перемещений $\vec{u}=\vec{r}-\vec{r}\,'$. Компоненты вектора перемещений являются функциями координат точки M в начальном или в деформированном состояниях. Если перемещения рассматриваются как функции координат материальных точек в начальном состоянии, то способ описания принято называть лагранжевым. В том случае, когда перемещения рассматриваются как функции координат $x^{k'}$, способ описания принято называть эйлеровым.

В теории упругости механическое состояние тел описывается с помощью параметров механического состояния - напряжений, деформаций и перемещений точек тела. Теория упругости рассматривает лишь обратимые процессы деформации. Предполагается, что после снятия нагрузок тела должны восстановить исходное состояние.

Важным естественным предположением линейной теории упругости является ограничение деформаций их малостью. В этих условиях различие между лагранжевым и эйлеровым описаниями исчезает.

Цель решения задач теории упругости заключается в определении 15 параметров механического состояния как функций координат точек тела при внешних воздействиях: 3 компонент вектора перемещения $u_i\ (x^1,x^2,x^3)$, $i = 1,2,3$; 6 компонент тензора деформации - $\varepsilon_{ij}\ (x^1,x^2,x^3)$, $i,j = 1,2,3$ и 6 компонент тензора напряжений $\sigma^{ij}(x^1,x^2,x^3)$, $i,j=1,2,3$.

1. Математическая постановка задач теории упругости

При математической формулировке задач теории упругости выполняются следующие типовые задания:

I . *Геометрическое моделирование;*

II. *Моделирование взаимодействия тела с окружающей средой (граничные условия*;

III. *Моделирование физических свойств материала тела*;

IY. *Определение исходного состояния тела (начальные условия*).

Геометрическое моделирование заключается в том, что реальная конфигурация тела в начальный момент времени t_o с определенной степенью точности определяется областью Ω_o в трехмерном евклидовом пространстве. Вводится система координат $Ox^1x^2x^3$ и век торы базиса $\vec{e}_i$. В трехмерном пространстве положение каждой точки М характеризуется тремя числами x^k, $k=1,2,3$, которые называются координатами. Через каждую точку М могут быть проведены три координатные линии, вдоль каждой из которых изменяется лишь одна из координат. Координатные линии могут быть как прямыми (в афинной системе координат), так и кривыми. Каждая координатная линия представляет собой пересечение двух координатных плоскостей. Уравнение координатных плоскостей $x^k = C$, $k=1,2,3$, где С – постоянная, которая меняется при переходе от одной плоскости к другой.

В каждой точке М можно провести три вектора базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Векторы базиса определяются

$$\vec{e}_i = \lim_{\Delta x^i \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta x^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}.$$

Векторы базиса направлены по касательным к координатным линиям. В общем случае криволинейной неортогональной системы координат векторы базиса не равны по длине, а углы между ними не прямые.

Например, в цилиндрической системе координат $Or\alpha z$ координатными поверхностями являются круговые цилиндрические поверхности $r = const$, плоскости $\alpha = const, z = const$. Координатными линиями r являются прямые линии, α - окружности, z - прямые линии.

Векторы базиса для цилиндрической системы координат определяются

$$|\vec{e}_1| = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta r} = 1, |\vec{e}_2| = \lim_{\Delta \alpha \to 0} \frac{r\Delta \alpha}{\Delta \alpha} = r, |\vec{e}_3| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1.$$

Векторы базиса меняются при переходе от точки к точке пространства как по длине, так и по направлению $\vec{e}_i(x^k)$. Базис $\vec{e}_i$ принято называть основным, а векторы базиса ковариантными.

Наряду с основным базисом вводится взаимный базис $\vec{e}^j$, так, что скалярные произведения векторов основного и взаимного базисов равны символам Кронекера

$$\vec{e}_i \vec{e}^j = \delta_i^j$$

Векторы взаимного базиса $\vec{e}^{j}$ называются контравариантрыми.
Эта область рассматривается как исходная для определения последовательных областей Ω_t, занимаемых телом в моменты времени $t \in (t_o, t_c)$. В области Ω_t отыскиваются функции, описывающие механическое состояние тела. При малых деформациях Ω_t мало отличается от Ω_o.

Моделирование взаимодействия тела с окружающей средой состоит в идеализации и упрощении реального взаимодействия. В результате определяются связи рассматриваемого тела с другими телами (граничные условия) в интервале времени $t \in (t_o, t_c)$.

Моделирование физических свойств материала тела состоит в формулировке системы уравнений, описывающих механическое состояние тела в рамках подхода механики сплошных сред (МСС). Система уравнений МСС включает три группы уравнений:

1 Группа	**Уравнение сохранения импульса** [уравнения движения **а)** или равновесия б)] $$\nabla_j \sigma_{ij} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad а) \qquad (1)$$ $$\nabla_j \sigma_{ij} + \rho f_i = 0 \quad б)$$ где ρ - плотность, $\ddot{u}_i$ - вторая производная от перемещения по времени , f_i - компоненты массовых сил.
2 Группа	**Геометрические уравнения** **Соотношения Коши** (описывающие связь между компонентами вектора перемещений и компонентами тензора деформаций). $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (2)$$
3 Группа	**Физические уравнения** **Закон Гука** (определяющие уравнения, устанавливающие связь компонентов тензоров напряжений и деформаций) $$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3),$$ где $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, λ и μ - коэффициенты Ламе, δ_{ij} -символ Кронекера.

Определение исходного состояния тела состоит в задании параметров механического состояния в момент времени to для всех точек тела в области Ωo *(начальные условия).*

Постановка математической задачи теории упругости для элемента конструкции сводится к ***записи в конкретном виде***

- Системы уравнений теории упругости
- Граничных условий
- Начальных условий

2. Основные гипотезы механики деформируемого твердого тела, используемые в теории упругости

1. Гипотеза сплошности

Тело рассматривается как некоторая односвязная пространственная область Ωo, внутри которой материал рассматривается как сплошная среда. Для произвольной точки сплошной среды вводятся тензорные параметры механического состояния - тензор напряжения $\sigma = \sigma^{ij}\bar{e}_i\,\bar{e}_j$, тензор деформации $\varepsilon = \varepsilon_{ij}\,\bar{e}^i\,\bar{e}^j$ и вектор перемещения $u_i = u_i\,\bar{e}^i$. Напряжения и деформации описываются тензорами второго ранга, перемещения - тензором первого ранга. Компоненты тензоров напряжения, деформации и перемещения являются непрерывными функциями координат точек среды x_i. Гипотеза сплошности позволяет использовать математический аппарат дифференцируемых функций для описания напряжений, деформаций и перемещений.

2. Гипотеза однородности

Материал тела считается однородным, т.е. все механические свойства материала тела считаются одинаковыми для любых точек данного тела. Данная гипотеза совместно с гипотезой сплошности обеспечивает непрерывность функций напряжений, деформаций и перемещений.

3. Гипотеза о малости деформаций

Гипотеза о малости деформаций позволяет линеаризовать связь компонент тензора деформаций и перемещений.

4. Гипотеза изотропности свойств среды

Материал считается изотропным или анизотропным. Данная гипотеза уменьшает количество подлежащих экспериментальному определению независимых упругих констант для материала (компонентов тензора упругих постоянных). Из 81 компоненты для общего случая упругого тела независимыми в случае изотропного тела остаются лишь 2 компоненты (модуля упругости).

3. Параметры механического состояния упругих тел

В рамках теории упругости механическое состояние твердых тел описывается с помощью тензорных величин (инвариантных относительно систем координат): тензора напряжений, тензора деформаций, вектора перемещений.

Тензор напряжений вводится в окрестности материальной точки среды

$$\sigma = \sigma^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j , \qquad (4)$$

где $\vec{e}_i$ - ковариантные векторы базиса для системы координат x_i (i,j = 1,2,3),

σ^{ij} - девять компонент тензора напряжений.

В изотропной среде тензор напряжений обладает симметрией $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$. Поэтому независимыми являются только шесть компонент тензора напряжений. Отметим, что инвариантной величиной (т.е. не зависящей от выбора системы координат) является тензор напряжений σ. Компоненты тензора σ_{ij} при переходе к другой системе координат будут изменяться.

Главные оси и главные компоненты тензора напряжений

Главные оси выбираются так, чтобы они совпадали с осями сопутствующей декартовой системы координат, для которой только компоненты тензора σ^{11}, σ^{22}, σ^{33} отличны от нуля, а все остальные компоненты равны нулю. В главной системе координат, ковариантные и контравариантные компоненты тензора напряжений совпадают

$$\sigma^{ij} = \sigma_{ij} .$$

Соответствующие значения компонент тензора $\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_2 = \sigma_{22}$, $\sigma_3 = \sigma_{33}$ называются главными и обозначаются с одним индексом. Матрица компонент тензора в главной системе координат является диагональной.

Для нахождения главных компонент и главных осей тензора следует:

1. Вычислить ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты тензора

$$T_{ij} = T^{RS} g_{iR} g_{jS}\ ,\ T^{ij} = T_{RS}\, g^{iR} g^{jS}\ , T^i_j = T^{iS} g_{jS}\, , T^i{}_j = T_{sj}\, g^{iS}\ ,$$

где $g_{iR} = \vec{e}_i\ \vec{e}_j$, $g^{iR} = \vec{e}^i\ \vec{e}^R$, $g^i_S = \vec{e}^i\ \vec{e}_S$ компоненты метрического тензора.

2. Вычислить инварианты тензора

$$I_1 = T^1_1 + T^2_2 + T^3_3 = T^i_i, I_2 = (1/2)[\ (T^i_i\ )^2 - T^i_j\ T^j_i], I_3 = \det\ (T^i_j).$$

3. Из решения кубического уравнения $(T_k)^3 - I_1\ (T_k)^2 + I_2 T_k - I_3 = 0$ найти главные компоненты T_k, обозначая их так, чтобы $T_1 \geq T_2 \geq T_3$.

4. Выполняем проверку

$$I_1 = T_1 + T_2 + T_3\ ,\ I_2 = T_1 T_2 + T_3 T_2 + T_1 T_3\ ,\ I_3 = T_1 T_2 T_3\ .$$

5. Определяем положение главных осей η_1 ,η_2 , η_3 из решения трех систем линейных алгебраических уравнений. Из решения каждой системы определяются направляющие косинусы одной из главных осей относительно 3 осей координат.

$$(T_1^1 - T_k)\, n_k^1 + T_2^1\, n_k^2 + T_3^1\, n_k^3 = 0,$$
$$T_1^2\, n_k^1 + (T_2^2 - T_k)\, n_k^2 + T_3^2\, n_k^3 = 0,$$
$$T_1^3\, n_k^1 + T_2^3\, n_k^2 + (T_3^3 - T_k)\, n_k^3 = 0,$$

где k принимает значения 1, 2, 3, n_k^j - направляющие косинусы главной оси η^k относительно осей X^j .

Тензор напряжений часто удобно представлять в виде суммы двух тензоров - шарового тензора P (давления) и тензора девиатора S^{ij}

$$\sigma^{ij} = -P\,\delta^{ij} + S^{ij}\ ,\ P = (1/3)\,\sigma_{kk}\ ,\quad S = S^{ij} e_i\, e_j\, , \qquad (5)$$

где δ^{ij} - символ Кронекера.

4. Граничные условия в задачах теории упругости

Необходимым элементом математической постановки задач теории упругости является формулировка граничных условий (ГУ). Граничные условия в идеализированном виде конкретизируют взаимодействие упругого тела с окружающей средой. При формулировке ГУ используются результаты геометрического моделирования, в ходе кото

рого были определены поверхности, ограничивающие рассматриваемое тело. При этом выполняются две операции :

1. Поверхность тела разбивается на части, соответствующие геометрическим поверхностям, которые можно описать каноническими уравнениями.
2. Для каждой части поверхности формулируются ГУ.

Граничные условия в задачах теории упругости могут быть заданы в четырех формах :

- *в напряжениях (силовые ГУ) ;*
- *в перемещениях (кинематические ГУ);*
- *в смешанном виде (смешанные ГУ) ;*
- *контактные ГУ .*

Силовые ГУ задаются для точек, лежащих на поверхности тела S_σ, и могут быть сформулированы как **локальные,** либо как **интегральные**.

Локальные силовые ГУ справедливы для каждой точки на поверхности тела S_σ и имеют вид

$$\sigma^{ij} n_j = F^i \quad , \qquad (6)$$

где n_j - направляющие косинусы между нормалью к поверхности S_σ в данной точке и осью координат x_j, $n_j \bullet n_j = 1$; F^i - проекции поверхностных сил на ось x_i в рассматриваемой точке.

В компонентной форме локальные силовые ГУ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma^{11} l + \sigma^{12} m + \sigma^{13} n &= F^1 , \\ \sigma^{21} l + \sigma^{22} m + \sigma^{23} n &= F^2 , \\ \sigma^{31} l + \sigma^{32} m + \sigma^{33} n &= F^3 . \end{aligned} \qquad (7)$$

$$l=\cos(x_1,\nu),\ m=\cos(x_2,\nu),\ n=\cos(x_3,\nu),\ l_2+m_2+n_2=1. \quad (8)$$

<u>Интегральные силовые ГУ</u>, как правило, задаются для части поверхности S_ν. Интегральные силовые ГУ применяются, как правило, если часть поверхности тела S_ν является плоскостью. Они означают, что сумма напряжений, действующих по поверхности тела, равна внешним силам.

$$\sigma_\nu=\sigma^{11}l^2+\sigma^{22}m^2+\sigma^{33}n^2+2\sigma^{12}lm+2\sigma^{13}ln+2\sigma^{23}mn,$$
$$\tau_\nu=\sqrt{(f^1)^2+(f^2)^2+(f^3)^2-(\sigma_\nu)^2}, \quad (9)$$
$$P_\nu=\sqrt{(\sigma_\nu)^2+(\tau_\nu)^2},$$

где σ_ν, τ_ν ,P_ν - нормальное, касательное и полное напряжения на площадке с нормалью ν .

Кинематические <u>граничные условия</u> записываются для точек поверхности тела S_u в двух формах.

<u>Для перемещений точек</u>

$$u_i=\varphi_i(x_j),\ x_j\in S_u. \quad (10)$$

<u>Для скоростей перемещений точек тела</u>

$$\dot u_i=\psi_i(x_j),\ x_j\in S_u. \quad (11)$$

В компонентной форме условия эквивалентны трем уравнениям.

<u>Смешанные ГУ</u> задаются в том случае, если на одной и той же части поверхности тела одновременно задаются некоторые компоненты вектора перемещения или скорости, а также некоторые компоненты вектора поверхностных сил.

$$\sigma^{ij}(x_k)\,n_j=f^i(x_k),$$
$$x_k\in S_m, \quad (12)$$
$$u_i=\varphi_i(x_j)$$

<u>Контактные ГУ</u> задают равенство перемещений и напряжений на части поверхности рассматриваемого тела S_c с теми же величинами других тел, находящихся во взаимодействии.

5. Основные задачи статики упругого тела

В зависимости от вида граничных условий различают три типа основных статических задач теорий упругости.

<u>Основная задача первого типа</u> состоит в определении компонент тензора поля напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$ внутри области Ω, занятой телом, и трех компонент вектора перемещения точек $u_i(x_k)$ внутри области Ω и точек поверхности тела S по заданным массовым силам f_j и поверхностным силам F_j. Искомые девять функций должны удовлетворять основным уравнениям и граничным условиям (6).

<u>Основная задача второго типа</u> состоит в определении перемещений точек $u_i(x_k)$ внутри области Ω и компонент тензора поля напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$ по заданным массовым силам f_j и по заданным перемещениям $u_i(x_k)$ в Ω и на поверхности тела S_u. Искомые функции $\sigma_{ij}(x_k)$ и $u_i(x_k)$ должны удовлетворять основным уравнениям (1)-(3) и граничным условиям (10). Заметим, что граничные условия (10) отражают требование о непрерывности определяемых функций на границе тела Su, т. е. когда внутренняя точка М (x^k) стремится к некоторой точке поверхности S, функция $u_i(x_k)$ должна стремиться к заданному значению $u_i(x_k)$ в данной точке поверхности.

<u>Основная задача третьего типа</u> *или смешанная.* Задача состоит в том, что по заданным поверхностным силам F_j на одной части поверхности тела S_σ и по заданным перемещениям $u_i(x_k)$ на другой части поверхности тела S_u, а также по заданным массовым силам f_j требуется определить компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$ и перемещения $u_i(x_k)$, удовлетворяющие основным уравнениям (1) - (3) при выполнении смешанных граничных условий (12).

Получив решение данной задачи, можно определить усилия связей на S_u, которые должны быть приложены в точках поверхности S_u, чтобы реализовать заданные перемещения на этой поверхности, а также можно вычислить перемещения точек поверхности $u_i(x_k)$.

Различают две постановки задач теорий упругости: *прямую и обратную.*

Прямая задача состоит в определении пятнадцати функций $u_i(x_k)$, $\varepsilon_{ij}(x_k)$ и $\sigma_{ij}(x_k)$, определяющих напряженно-деформированное состояние тела в зависимости от внешнего воздействия на него, т.е. пятнадцати функций, удовлетворяющих системе основных уравнений (1)-(3) и граничным условиям задачи.

Обратная задача состоит в отыскании соответствующих граничных условий, которым соответствуют заданные непрерывные функции координат точек тела, в качестве которых могут выступать либо перемещения $u_i(x_k)$, либо компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$, удовлетворяющие основным уравнениям (1)-(3).

Решение обратной задачи значительно проще, чем решение прямой задачи. Особенно просто решается обратная задача, если задаться перемещениями $u_i(x_k)$. При заданных непрерывных функциях $u_i(x_k)$ удовлетворяются уравнения совместности Сен-Венана.

Решение обратной задачи выполняется в следующем порядке:

- на основании соотношений Коши (2) определяются компоненты тензора деформаций;
- из закона Гука (3) определяются компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$, соответствующие принятым функциям $u_i(x_k)$;
- из уравнений равновесия (1) и граничных условий (9) определяются внешние силы f_j и F_j, при которых осуществляются заданные перемещения.

Если задаваться компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$, то решение обратной задачи несколько усложняется. Перемещения $u_i(x_k)$ находятся интегрированием уравнений (2), что возможно, если компоненты тензора деформации ε_{ij}, которые определяются законом Гука, будут удовлетворять дифференциальным зависимостям Сен-Венана. Это обстоятельство и осложняет решение обратной задачи.

Как правило, наибольший интерес представляют решения прямых задач теории упругости.

Прямую задачу удобно решать, если за основные неизвестные функции, определяемые в первую очередь, принимаются либо перемещения $u_i\,(x_k)$, либо напряжения $\sigma_{ij}(x_k)$. Эти два пути решения прямой задачи называют соответственно решением в перемещениях и решением в напряжениях.

6. Решение задач теории упругости в перемещениях

6.1. Основные уравнения теории упругости в перемещениях. Уравнения Ламе

Некоторые прямые задачи теории упругости, в частности, в которых заданы кинематические граничные условия , удобно решать в перемещениях.

При выборе этого метода решения система основных уравнений записывается так, чтобы неизвестными являлись только 3 функции перемещений точек тела $u_i\ (x_1, x_2, x_3)$, $i = 1,2,3$.

Это можно сделать путем исключения компонент тензора напряжений из уравнений равновесия (1), с помощью закона Гука (3) и переходя к перемещениям с помощью соотношений Коши (2).

$$\nabla_j \sigma_{ij} + \rho f_i = 0\ , \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\,\delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij}\ . \tag{3}$$

Продифференцируем (2) по координате x_j

$$\sigma_{ij,j} = \lambda\theta_{,j}\,\delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij,j}\,. \tag{13}$$

Используя равенство (13), дифференциальные уравнения равновесия (1) можно привести к виду

$$\boxed{\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = -\frac{\rho}{\mu} f_i\ .} \tag{14}$$

Три дифференциальных уравнения (14) (i = 1, 2, 3), представляют собой уравнения ***равновесия упругого тела в перемещениях***. Эти уравнения называются *уравнениями Ламе* (Lame G.) и отражают геометрическую, статическую и физическую стороны задачи теории упругости. ***Фактически уравнения Ламе эквивалентны системе уравнений теории упругости (1)-(3).***

Уравнения (14) могут быть записаны в виде одного векторного уравнения. Умножая равенство (14) на орт $\vec{e}_i$ и учитывая, что $\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\vec{e}_i = \nabla\theta = \mathrm{grad}\ \theta$, получим

$$\boxed{\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \vec{u} = -\frac{\rho}{\mu}\overline{F}}, \tag{15}$$

где ν - коэффициент Пуассона.

Во многих задачах массовые силы можно считать равными нулю, и тогда уравнения Ламе (14) принимают вид

$$\boxed{\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0}. \tag{16}$$

Отсюда, поскольку $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \theta$ и $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} = \nabla^2\theta$, вытекает, что

$$\nabla^2\theta = 0\ . \tag{17}$$

Из (17) следует, что объемная деформация θ (при отсутствии массовых сил или когда они постоянны) удовлетворяет уравнению Лапласа и, следовательно, θ является гармонической функцией. Применяя к равенству (16) дифференциальный оператор Лапласа (∇^2) и учитывая свойство (17), получим

$$\boxed{\nabla^2 \nabla^2 u_i = 0}. \tag{18}$$

Из (18) следует, что компоненты вектора перемещения u_i являются бигармоническими функциями. Это заключение справедливо и при постоянных массовых силах, так как в этом случае при выполнении операций дифференцирования правая часть равенства (14) исчезает. Заметим, что уравнения (18) не означают, что перемещения (при отсутствии массовых сил) являются **произвольными бигармоническими функциями**. Эти функции должны удовлетворять дифференциальным уравнениям более низкого порядка - уравнениям Ламе (14).

При решении задачи в перемещениях для искомых функций $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1,2,3$ необходимо иметь условия на границе тела в зависимости от приложенных поверхностных сил. На основании формулы закона Гука имеем

$$\sigma_{ij} n_j = \lambda \theta n_j \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} n_i \right). \tag{19}$$

Учитывая, что $n_j \delta_{ij} = n_i$, получим

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right) n_1 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_2}\right) n_2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3}\right) n_3 = \frac{\partial u_i}{\partial n},$$

где $\frac{\partial u_i}{\partial n}$ - производная функции u_i по нормали к поверхности тела.

Силовые граничные условия могут быть преобразованы к виду

$$\lambda \theta n_i + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} + \frac{\partial u_j}{\partial n} \right) = F_i. \tag{20}$$

Уравнения Ламе (14) вместе с граничными условиями (20) составляют краевую задачу линейной теории упругости для определения всех трех компонентов вектора перемещения $u_i(x_1,x_2,x_3)$, $i = 1,2,3$. Компо ненты тензора деформации вычисляются по формуле (2), компоненты тензора напряжений находятся по формуле (3).

6.2. Решение задач в перемещениях. Решение Папковича-Нейбера.

Уравнение Ламе (16) для **задач статики упругого тела** при отсутствии массовых сил может быть сведено к уравнению **эллиптического типа** (18). Отметим, что динамические задачи теории упругости сводятся к другому классу - к классу гиперболических уравнений. Статические задачи теории упругости наиболее часто сводятся к следующим краевым задачам для эллиптического уравнения (18) :

- краевой задаче Дирихле;
- краевой задаче Неймана;
- смешанной краевой задаче.

Задача Дирихле состоит в отыскании гармонической функции ϕ, которая бы удовлетворяла гармоническому уравнению в замкнутой области Ω и соответствовала заданным ее значениям на границе S.

Задача Неймана состоит в отыскании гармонической функции ϕ, которая бы удовлетворяла гармоническому уравнению в замкнутой области Ω и соответствовала заданным значениям ее нормальной производной на границе S, которая должна удовлетворять условию

$$\oint \frac{d\phi}{dn} dS = 0.$$

Смешанная краевая задача (третья краевая задача) состоит в отыскании гармонической функции ϕ, которая бы удовлетворяла гармоническому уравнению в замкнутой области Ω и соответствовала заданным ее значениям на одной части границы S и заданным значениям ее нормальной производной на другой части границы S.

Краевые задачи этих типов могут быть решены численными методами при помощи интегральных уравнений Фредгольма второго рода, а в случае плоской задачи теории упругости, когда можно пренебречь

зависимостью искомой функции от одной из координат,- с помощью метода конформных отображений.

Отличительной чертой краевых задач для эллиптических уравнений является то, что найден целый ряд их аналитических решений. Общее решение уравнений Ламе было получено П. Ф. Папковичем в 1932 г., а позднее - в 1934 другим путем - Нейбером. При равновесии однородного изотропного тела в случае отсутствия массовых сил уравнения Ламе определяются равенством (16). Решение этих уравнений ищется в следующем виде:

$$\boxed{u_i = \varphi_i + \frac{\partial \psi}{\partial x_i}}, \tag{21}$$

где φ_i (i = 1,2,3) - гармонические функции, удовлетворяющие уравнению $\nabla^2 \varphi_i = 0$, ψ - скалярная функция, подлежащая определению.

Объемная деформация в случае выполнения (21) зависит от φ_i и ψ

$$\theta = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + \nabla^2 \psi \,. \tag{22}$$

В (22) по повторяющемуся индексу идет суммирование. Подставляя в уравнения Ламе (16) выражения (21) и(22) и учитывая, что $\nabla^2 \varphi_i = 0$, найдем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} \nabla^2 \psi + \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right] = 0 \,. \tag{23}$$

Из уравнения (23) следует, что

$$\nabla^2 \psi = - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \tag{24}$$

Учитывая, что $\nabla^2 \varphi_i = 0$ и $\nabla^2 (\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_i) = 0$, из (24) следует, что функция ψ должна быть бигармонической, т. е. должна удовлетворять уравнению

$$\nabla^2 (\nabla^2 \psi) = 0. \qquad (25)$$

Учитывая, что любая гармоническая функция является также и бигармонической, можно показать, что если φ_i - гармонические функции, то функции $\psi_1 = x_1 \varphi_1$, $\psi_2 = x_2 \varphi_2$, $\psi_3 = x_3 \varphi_3$ будут бигармоническими. Следовательно, можно утверждать, что частное решение бигармонического уравнения можно выбрать в виде

$$\psi = C x_k \varphi_k , \qquad (26)$$

где C - постоянная.

Последовательно дифференцируя равенство (26) и свертывая полученные равенства по индексам i и j, получим

$$\nabla^2 \psi = C \nabla^2 (x_k \varphi_k) = 2 C \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} . \qquad (27)$$

Из сопоставления равенств (24) и (27) находим

$$C = - \frac{1}{4 (1 - \nu)} . \qquad (28)$$

Общее решение уравнения (24) должно представляться суммой его частного решения (26) и произвольной гармонической функции φ_0, т. е.

$$\boxed{\psi = - \frac{1}{4 (1 - \nu)} (x_k \varphi_k + \varphi_0)} , \qquad (29)$$

где k = 1,2,3 и по повторяющемуся индексу идет суммирование.

Тогда общее решение уравнений Ламе (16) на основании (21) и (29) будет выражено через четыре произвольные, независимые друг от друга гармонические функции. Равенство (29) является функциональным представлением решения задачи теории упругости в *форме Папковича-Нейбера* для изотропного однородного тела.

В решении Папковича-Нейбера, не нарушая его общности, можно сохранить только три гармонические функции φ_i :

$$\boxed{u_i = \varphi_i - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_k \varphi_k)}. \qquad (30)$$

Формула (30) определяет решение задачи теории упругости для односвязной области Ω при условии, что $\nu \neq 0.25$.

7. Решение задач теории упругости в напряжениях
7.1. Уравнения Бельтрами-Мичелла

При решении прямых задач теории упругости с силовыми граничными условиями удобно за основные неизвестные принять компоненты тензора напряжений σ_{ij}, т. е. решать задачу в напряжениях.

При этом для упрощения решения задачи основные уравнения следует представить только через искомые функции σ_{ij}. Система трех дифференциальных уравнений равновесия (1), содержащая шесть искомых функций σ_{ij}, имеет неоднозначное решение. Функции σ_{ij},определяющие действительное напряженное состояние тела, будучи статически возможными и связанные законом Гука (3) с функциями ε_{ij} , должны подчиняться, как и функции ε_{ij}, **условиям совместности деформаций Сен-Венана.** Уравнения совместности, записанные для компонент тензора напряжений, называются уравнениями Бельтрами-Мичелла. Для их вывода продифференцируем по координате x_j уравнения Ламе (14)

$$\frac{\partial(\nabla^2 u_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \qquad (31)$$

Выполняя свертывание по индексам i и j, получим

$$\nabla^2 \frac{\partial(u_i)}{\partial x_i} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} = -\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \qquad (32)$$

Поскольку $\frac{\partial (u_i)}{\partial x_i} = \theta$, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} = \nabla^2 \theta$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f_s}{\partial x_s}$ из (32) следует

$$2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \theta = -\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial f_s}{\partial x_s}. \qquad (33)$$

Из закона Гука (3) и соотношения P = (1/3) σ_{kk} вытекает, что

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{ss}. \qquad (34)$$

С учетом (34) из равенства (33) получим

$$\nabla^2 \sigma_{ss} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \rho \frac{\partial f_s}{\partial x_s}. \qquad (35)$$

В уравнении Ламе (14), свободный индекс **i** можно заменить на любой другой, например

$$\nabla^2 u_j + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = -\frac{\rho}{\mu} f_j .$$

Дифференцируя последнее равенство по координате X_i, получим

$$\frac{\partial (\nabla^2 u_j)}{\partial x_i} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}. \qquad (36)$$

Сложив равенства (31) и (36) будем иметь

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{2}{(1-2\nu)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\rho}{\mu}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right). \qquad (37)$$

На основании (2) и (3) имеем

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 2\varepsilon_{ij} = 2[(1+\nu)\,\sigma_{ij} - \nu\sigma_{ss}\,\delta_{ij}\,] \,/\, E \quad (38)$$

Учитывая (38), (37) и равенство $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, получим

$$(1+\nu)\,\nabla^2\sigma_{ij} - \nu\,\delta_{ij}\nabla^2\sigma_{ss} + \frac{\partial^2\sigma_{ss}}{\partial x_i\partial x_j} = -(1+\nu)\,\rho\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}+\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \quad (39)$$

Используя равенство (35), окончательно получим

$$\boxed{\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{(1+\nu)}\frac{\partial^2\sigma_{ss}}{\partial x_i\partial x_j} = -\frac{\nu}{(1-\nu)}\rho\,\frac{\partial f_s}{\partial x_s}\delta_{ij} - \rho\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}+\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)}. \quad (40)$$

В наиболее часто встречающихся задачах, когда массовые силы отсутствуют или ими можно пренебречь, имеем

$$\boxed{\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{(1+\nu)}\frac{\partial^2\sigma_{ss}}{\partial x_i\partial x_j} = 0}. \quad (41)$$

Уравнение (41) было получено Е. Бельтрами (E. Beltrami) в 1892 г. Уравнение (40) определяет шесть соотношений, которые связывают компоненты тензора напряжений. Эти соотношения впервые были получены Дж. Мичеллом (Michell A.G.M.) в 1900 г., поэтому эти соотношения называют уравнениями Бельтрами-Мичелла.

Эти уравнения представляют собой условия совместности, выраженные через компоненты тензора напряжения.

При решении задач теории упругости в напряжениях отыскиваются шесть функций $\sigma_{ij}(x_k)$, которые должны удовлетворять уравнению равновесия (1), уравнению Бельтрами-Мичелла (40) и граничным условиям (6). По полученным функциям из алгебраических уравнений закона Гука (3) отыскиваются компоненты тензора деформаций. Так как при нахождении функций $\sigma_{ij}(x_k)$ удовлетворялись условия совместности Бельтрами-Мичелла, то функции $\varepsilon_{ij}(x_k)$ будут удовлетворять дифференциальным соотношениям Сен-Венана, т. е. необходимым и достаточным условиям интегрируемости уравнений (2). Тогда путем интегрирования уравнений (2) определяются перемещения u_i (x_1,x_2,x_3), $i = 1,2,3$.

Из (41) следует, что первый, или линейный, инвариант тензора напряжений представляет собой (при отсутствии массовых сил или в случае их постоянства) гармоническую функцию. Применяя к равенству (41) оператор Лапласа и учитывая, что линейный инвариант тензора напряжений - гармоническая функция, получим

$$\nabla^2 (\nabla^2 \sigma_{ij}) = 0 . \qquad (42)$$

Таким образом, компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$ являются бигармоническими функциями координат точек тела, когда массовые силы постоянны или равны нулю.

7.2. Решение задач теории упругости в напряжениях Решение Максвелла и Морера, Круткова

При отсутствии массовых сил или их постоянстве, статическая задача линейной теории упругости может быть решена в общем виде. При этом все компоненты тензора напряжения $\sigma_{ij}(x_k)$ выразятся через произвольные функции координат. Эти функции называют функциями напряжений. Наиболее известными являются решения, предложенные Максвеллом (Maxwell J.C.), Морером (Morera G.), Крутковым.

Все эти решения ищутся в виде, который переводит уравнения равновесия (1) в тождества. Максвелл предложил искать решение через три произвольные функции $\varphi_1(x_i)$, $\varphi_2(x_i)$, $\varphi_3(x_i)$, имеющие непрерывные частные производные. и подобрать эти функции так, чтобы выполнялись равенства

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2}\ ;\ \sigma_{31} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_3}\ ,\ \sigma_{23} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3}. \qquad (43)$$

Равенства (43) удовлетворяют условию симметрии тензора напряжения. Для того, чтобы удовлетворялось уравнение равновесия (1), необходимо выполнение условия

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^{\ 2}} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_3^{\ 2}}\right). \qquad (44)$$

Интегрируя (44) по x_1 и отбрасывая произвольные постоянные, т.к. функции $\varphi_1(x_i), \varphi_2(x_i), \varphi_3(x_i)$ являются произвольными, имеем

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^{\ 2}} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_3^{\ 2}}. \qquad (45)$$

Аналогично получаем из двух других уравнений равновесия

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^{\ 2}} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^{\ 2}}\ ,\ \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^{\ 2}} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^{\ 2}}. \qquad (46)$$

Соотношения (44)-(46) задают решение задачи теории упругости через три произвольные функции $\varphi_1(x_i), \varphi_2(x_i), \varphi_3(x_i)$. Это решение является общим и удовлетворяет уравнениям равновесия. Нахождение этих функций представляет самостоятельную математическую задачу, которая существенно упрощается, если существуют гипотезы относительно изменения касательных напряжений в теле.
Тогда

$$\varphi_1 = -\iint \sigma_{23}\, dx_2\, dx_3\ ,\ \varphi_2 = -\iint \sigma_{13}\, dx_1\, dx_3\ ,\ \varphi_3 = -\iint \sigma_{12}\, dx_1\, dx_2 \qquad (47)$$

Постоянные интегрирования в (47) отбрасываются в силу произвольности выбора функций $\varphi_1(x_i), \varphi_2(x_i), \varphi_3(x_i)$.

Решение Морера предполагает несколько иной выбор функций напряжений $\varphi_1(x_i)$, $\varphi_2(x_i)$, $\varphi_3(x_i)$. Предполагается, что диагональные компоненты тензора напряжения определяются смешанными производными от функций напряжений по координатам

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{48}$$

Подставляя (48) в уравнения равновесия, интегрируя по координатам, в результате разрешения относительно сдвиговых компонент тензора напряжения получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3}\right),\\
\sigma_{23} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right),\\
\sigma_{13} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right).
\end{aligned} \tag{49}$$

Определение функций напряжений Морера (48) - (49) упрощается, если существует гипотеза относительно распределения в теле диагональных компонент тензора напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}. Тогда

$$\varphi_1 = \iint \sigma_{11}\, dx_2\, dx_3, \quad \varphi_2 = \iint \sigma_{22}\, dx_1\, dx_3, \quad \varphi_3 = \iint \sigma_{33}\, dx_1\, dx_2 . \tag{50}$$

Крутков показал, что решение можно искать через произвольные функции более высоких порядков. Он ввел произвольную функцию $F(x_i)$ с непрерывными частными производными вплоть до 6 порядка.

Смысл решения Круткова заключается в том, что компоненты тензора напряжения задаются в виде рядов

$$\sigma_{11}=\sum_{m=1}^{\infty}(b_m+C_m)\frac{\partial^4 F_m}{\partial x_2^{\,2}\,\partial x_3^{\,2}},\ \sigma_{22}=\sum_{m=1}^{\infty}(a_m+C_m)\frac{\partial^4 F_m}{\partial x_1^{\,2}\,\partial x_3^{\,2}},$$

$$\sigma_{33}=\sum_{m=1}^{\infty}(b_m+a_m)\frac{\partial^4 F_m}{\partial x_2^{\,2}\,\partial x_1^{\,2}},\ \sigma_{12}=-\sum_{m=1}^{\infty}C_m\frac{\partial^4 F_m}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3^{\,2}},\qquad (51)$$

$$\sigma_{23}=-\sum_{m=1}^{\infty}a_m\frac{\partial^4 F_m}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_1^{\,2}},\ \sigma_{13}=-\sum_{m=1}^{\infty}b_m\frac{\partial^4 F_m}{\partial x_3\,\partial x_1\,\partial x_2^{\,2}}.$$

Постоянные коэффициенты рядов a_m, b_m, c_m подбираются так, чтобы ряды сходились. Тогда в зависимости от необходимой точности решения можно использовать ограниченное число членов ряда.

Следует отметить, что решение задач теории упругости (как в напряжениях, так и в перемещениях) сводится к определению трех произвольных функций (либо функций напряжений либо перемещений).

Контрольные вопросы

---

1. Для чего необходимо задание граничных условий в задачах теории упругости?
2. Какие типы ГУ применяются при постановке задач теории упругости?
3. Какие два основных пути применяются для решения задач теории упругости?
4. В чем состоит прямая задача теории упругости?
5. В чем состоит обратная задача теории упругости?
6. Как классифицируются по постановке статические задачи теории упругости?
7. Изложите план решения задач линейной теории упругости в перемещениях.
8. Изложите план решения задач линейной теории упругости в напряжениях.
9. Выполнить преобразования и получить формулы (14), (17), (18), (23), (27), (29).
10. В каком общем виде можно искать решение прямых задач линейной теории упругости?
11. Выполнить преобразования и получить формулы (32), (35).
12. Запишите в координатной форме уравнения (14), (40), (41).
13. Какой смысл имеют уравнения Ламе?
14. Какой смысл имеют уравнения Бельтрами-Мичелла?