Министерство образования и науки
Российской Федерации
Томский государственный университет

Физико-технический факультет

Кафедра теории прочности проектирования

Смолин Игорь Юрьевич

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ (ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ МЕХАНИКУ)

Лекции

Томск – 2007

Содержание

1. Предмет и задачи аналитической динамики, ее связь с другими областями механики

Начнём с того, что разберём ***смысл понятия*** «аналитическая динамика». Из курса теоретической механики вам уже известно, что динамика — это составная часть механики, изучающая движение механических систем под действием приложенных сил. Одним из видов движения являются колебания. Поскольку в аналитической механике в основном рассматриваются динамические задачи, то в узком смысле слова оба термина «*аналитическая механика*» и «*аналитическая динамика*» означают одно и тоже. Для изложения этих предметов характерным является то, что в основу кладутся общие принципы (дифференциальные или интегральные вариационные принципы), а затем из этих принципов аналитическим путем получаются основные дифференциальные уравнения движения. Прилагательное «аналитическая» означает, что применяется аппарат математического анализа, т.е. дифференциального, интегрального, а также вариационного исчислений.

Основное содержание аналитической динамики составляет изложение общих принципов механики, вывод из них основных дифференциальных уравнений движения, исследование этих уравнений и методов их интегрирования.

Какое ***место*** занимает аналитическая механика среди других наук? Аналитическую механику можно рассматривать как часть или как продолжение теоретической механики. В этом аспекте для аналитической динамики характерно рассмотрение не одной материальной точки, а *систем материальных точек*, а также использование *обобщенных координат*. Очень важной составляющей аналитической механики является понятие *вариационных принципов*. Поэтому элементы аналитической динамики можно найти также в книгах, в названии которых есть слова «теоретическая механика» и «вариационные принципы механики». Содержание читаемых курсов аналитической динамики отличается в зависимости от того, студентам какой специальности они читаются: математикам, физикам или инженерам-прикладникам.

В свою очередь и теоретическая механика является частью более общей науки — *классической механики*. А классическая механика на «карте механики» граничит с разделами специальной теории относительности (когда рассматриваются скорости движения тел, сравнимые со скоростью света) и квантовой теории (когда размеры объектов сравнимы с размерами атомов) — её «соседями» являются релятивистская механика и квантовая механика. В чём тут дело? Почему приходится разделять механику на части?

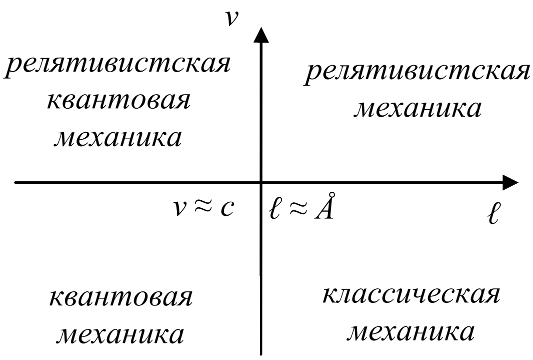

Рис. 1 «Карта механики»

Рабочий инструмент механики вообще — это *модель*, созданная для описания определенного класса явлений. В динамике изучается движение объектов окружающего нас мира, изменение их взаимного расположения в пространстве и времени. Это такие явления реального мира как движения планет, колебания маятника. Модели классической механики включают в качестве составляющих различные математические модели:

евклидово пространство, множества, многообразия, дифференциальные уравнения и многое другое. Другая часть модели — формулировка механических законов взаимодействия введенных объектов. В результате возникает динамическая модель механической системы, позволяющая рассчитывать ее движение.

Встает законный вопрос: какое отношение имеет созданная модель к окружающему нас миру? Этот вопрос решается на основе эксперимента: если поведение реального объекта совпадает с достаточной степенью точности с поведением, предсказанным механической моделью, то мы можем констатировать удовлетворительное качество модели. Это значит, что мы правильно определили характерные свойства интересующих нас объектов и законы их поведения. Однако следует отдавать себе отчет и в том, что созданная модель всегда является приближенной. Более того, невозможно доказать, что данная модель единственно возможная и не существует иного приближенного описания изучаемого объекта на основе другой модели. Это подтверждает вся история механики. Как же следует поступать в этом случае? Предпочтение следует отдавать наиболее простым моделям, которые приводят к необходимому результату кратчайшим путем.

Вместе с тем следует иметь в виду, что всякая модель имеет ограниченную область применения. Если говорить в целом о классической механике, то любые ее модели не смогут описать с нужной степенью точности движение материальных объектов со скоростями, близкими к скорости света, и движение объектов микромира (элементарных частиц). Это задачи релятивистской механики и квантовой механики. Однако классическая механика не утратила своего значения. Она является базой современного технического прогресса в машиностроении, авиации, транспорте, космонавтике.

Отметим ***основные вехи развития механики***. Механика — наука древняя. Длительный период ее развития характеризовался накоплением экспериментальных фактов, их обобщением, формулировкой простых законов статики. Механика точки как наука была основана Галилео Галилеем (1564–1642) в начале семнадцатого столетия. Здесь также можно отметить имена таких великих ученых как Иоганн Кеплер (1571–1630) и Рене Декарт (1596–1650). В последующее развитие механики большой вклад внёс Христиан Гюйгенс (1629–1695), а также и другие учёные. Однако, переломным моментом следует считать 1687 г., когда вышел в свет знаменитый трактат Исаака Ньютона (1643–1727) «Математические начала натуральной философии». В нем были установлены и сформулированы основные законы классической механики. Его современником был великий немецкий учёный-универсал Готфрид Лейбниц (1646–1716), внесший огромный вклад в развитие дифференциального и интегрального исчислений, а также в становление механики. Он изобрёл счётную машину, ввёл знакомые нам математические знаки для дифференциала и интеграла, умножения и деления.

На фундаменте, заложенном Ньютоном, быстро начало строиться здание механики. В XVIII веке оформляется ряд научных центров в Англии, Франции, Италии, Германии и России. В 1743 г. Жан Даламбер (1717–1783) распространил законы Ньютона на задачи механики твердого тела, сформулировал правила составления уравнений движения, сведя задачи динамики к задаче статики. Следует также назвать следующие имена: Леонард Эйлер (1707–1783), Пьер Лаплас (1749–1827), Якоб Бернулли (1654–1705), Иоганн Бернулли (1667–1748) — дал первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчислений, теория удара, учение о живой силе, вместе с братом Якобом положил начало вариационному исчислению, Даниил Бернулли (1700–1782) — уравнение его имени в гидродинамике. Выдающимся событием в ранней истории аналитической механики стал выход в свет работы Жозефа Луи Лагранжа (1736–1813) «Аналитическая механика» в 1788 г., т.е. через сто лет после «Начал» Ньютона.

Развитие механики со времен Лагранжа связано с именами многих прославленных математиков и механиков. Осуществляется переход к гамильтоновой механике, углубляются и развиваются методы небесной механики. Среди тех, кому принадлежат наиболее фундаментальные открытия в этой области, в первую очередь следует назвать

Уильяма Гамильтона (1805–1865), Карла Якóби (1804–1851), Карла Гаусса (1777–1855) Густава Кирхгофа (1824–1887). Двадцатый век начался с создания Анри Пуанкаре (1854–1912) и Альбертом Эйнштейном (1879–1955) теории относительности, а затем квантовой механики Альбертом Эйнштейном, Максом Планком (1858–1947), Эрвином Шрёдингером (1887–1961), Полем Дираком (1902–1984). Следует отметить, что в создании теории относительности и квантовой механики огромная роль принадлежит методам и подходам, заложенным при развитии аналитической механики.

Вместе с такими фундаментальными исследованиями произошло стремительное развитие новых областей техники, связанных с железнодорожным и автомобильным транспортом, воздухоплаванием, космическими полетами (авиастроение, кораблестроение, ракетостроение, автомобилестроение, робототехника и т.п.) Все эти направления потребовали создания новых механических теорий, описывающих поведение сложных механических систем в различных условиях. Во второй половине двадцатого века механики получили новое мощное средство исследования — быстродействующие электронно-вычислительные машины (компьютеры), что привело к бурному развитию специальных методов исследования — моделирования механических процессов, основанных на численном эксперименте.

Сейчас с точки зрения математических методов и понятий принято выделять три раздела (или метода изложения) классической механики: ньютонову, лагранжеву и гамильтонову. Им соответствуют разные системы лежащих в их основе аксиом и разные математические аппараты. Со времени Ньютона механика развивалась по двум основным направлениям. Одна ветвь, которую автор книги «Вариационные принципы механики» Корнелиус Ланцош называет «векторной механикой», исходит непосредственно из законов движения Ньютона. Основная задача в этом подходе заключается в выявлении всех сил, действующих на каждую частицу в каждый момент времени, после чего движение однозначно определяется. Анализ и синтез сил и моментов составляет, таким образом, основу векторной или *ньютоновой* механики.

В отличие от Ньютона, который предлагал действие силы измерять ее импульсом — векторной величиной, Лейбниц ратовал за другую величину — vis viva или «живую силу», считая именно ее правильным мерилом динамического действия силы — мерой количества движения. Импульс (количество движения) он называл «мёртвой силой». Эта «живая сила» Лейбница совпадает с точностью до несущественного множителя 2 с величиной, которую сегодня мы называем кинетической энергией. В то же время он заменил «силу» Ньютона «работой силы». Эта «работа силы» была впоследствии заменена еще более фундаментальной величиной — потенциальной энергией. Таким образом, Лейбниц является основателем второй ветви механики, в которой изучение движения исходит из двух основных скалярных величин — кинетической энергии и потенциальной энергии. Это является характерной чертой *лагранжева* и *гамильтонова* подходов в аналитической механике.

Путь от ньютоновой механики к лагранжевой и затем к гамильтоновой — это путь усложнения математических методов, обобщения рассматриваемых систем и повышение уровня абстракции. Ньютонову механику можно рассматривать как составную часть лагранжевой механики, а дагранжеву — как часть гамильтоновой.

Следует также отметить органическую связь развития механики и математики. Почти все перечисленные выше учёные считаются и механиками и математиками. Многие современные математические теории возникли из проблем механики. Решение различных механических задач требовало развитие новых математических методов и, наоборот, строгий математический аксиоматически-абстрактный вид изложения теорий способствовал дальнейшему развитию механики и пониманию физического смысла применяемых математических формулировок и методов.

2. Основные положения аналитической механики. Классификация механических систем

2.1. Основные понятия. Законы и вариационные принципы механики

Объектом изучения механики является *механическая система* — это система материальных точек. Однако понятие системы материальных точек в аналитической механике достаточно широкое. Так, например, абсолютно твердое тело — это тоже система бесконечного количества материальных точек. Движение такого тела, однако, можно описать конечным набором параметров. Механической системой также является различные механизмы типа маятников, кривошипов, валов, шестеренок и т.д.

Основная задача механики заключается в нахождении закона движения механической системы, т.е. в определении координат точек механической системы как функций времени $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$, $z_i = z_i(t)$ или $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Жирными латинскими буквами будем обозначать векторы. В данном случае представлен радиус-вектор точки *i*.

Для того, чтобы определить эти функции, нужно записать для них некие выражения (уравнения). Математическая *формулировка* задачи обычно заканчивается тем, что уравнения движения удается записать как дифференциальные уравнения для координат. Проинтегрировав эти уравнения, можно получить закон движения. Таким образом, основная задача разбивается на две: записать уравнения движения и проинтегрировать эти уравнения. Вторая задача, связанная с решением уравнений, относится скорее к математике. А для решения первой задачи нужны некоторые исходные положения. История науки сложилась так, что многие ученые пытались как-то сформулировать их, используя для этого те знания, которые получены человечеством на основе обобщения многочисленных опытных данных. Остановимся подробнее на этих исходных положениях.

В основе любой точной науки лежит система аксиом — исходных положений, принимаемых без доказательства за истинные. Они носят разное название, но общим для них является то, что их нельзя доказать чисто теоретически. Их справедливость доказывается опытом, практикой. В зависимости от того, какие аксиомы положены в основу механики, можно получить разные изложения содержания этой науки. В механике их называют *основными законами или принципами*.

Важно понимать, что различные принципы и законы обладают той или иной степенью общности, поэтому построенная на них механика будет справедлива только в тех пределах, в которых имеют силу принятые принципы или законы.

В основе ньютоновой механики лежат *законы Ньютона*, которые принимаются без доказательства, как подтверждаемые экспериментально на многих примерах. В рамках ньютонова формализма в механике главным является правильное определение всех сил, действующих на механическую систему. Если это сделано, то, используя открытые Ньютоном законы, можно записать дифференциальные уравнения движения. Это обычный подход, знакомый нам еще со средней школы.

В основе *лагрнжева формализма* аналитической динамики лежат *вариационные принципы*. Они также принимаются без доказательства, хотя можно показать их эквивалентность законам Ньютона и даже вывести из них. Например, уравнение Эйлера вариационной задачи задает уравнение движения для заданной механической системы. Существует довольно много формулировок вариационных принципов.

Принято делить основные положения, с одной стороны, на *дифференциальные* и *интегральные формулировки*, а с другой стороны, — на *вариационные принципы* и (невариационные) *законы*.

Основные положения механики, устанавливающие какое-либо общее свойство движения для каждого *момента времени* называются *дифференциальными*, а те положения, которые справедливы только для конечного *промежутка времени*, называются *интегральными*. Так, законы Ньютона и принцип Даламбера являются дифференциальными принципами, а закон сохранения энергии может служить примером интегрального принципа. *Вариационными* называются те принципы, которые устанавливают какое-либо свойство истинного движения, отличающее его от всех других воображаемых движений, удовлетворяющих некоторым условиям, характерным для данного принципа. В формулировке невариационных принципов (*законов*) не производится никакого сравнения с допустимыми движениями, они просто утверждают истинность некого положения.

Выбор того или иного подхода можно рассматривать как вопрос философский, хотя он имеет и прагматический оттенок, поскольку в конкретных ситуациях позволяет иногда быстрее и легче решить проблему.

В любом подходе для правильной постановки задачи нужно четко определить свойства объекта, который мы изучаем. Иначе можно получить неверные уравнения и даже если их правильно решить, результат получится неверный. Для этого нужно точно определить *свойства механической системы*, с которой мы имеем дело. Различие в свойствах механических систем может существенно влиять на аналитическое исследование их движения. Поэтому эти свойства лежат в основе классификации механических систем.

Всякая механическая система с точки зрения аналитической механики рассматривается как система материальных точек, связанных *различного рода связями* — ограничениями, наложенными на форму движения. Поэтому, первым определяющим свойством механической системы является *тип наложенных связей*. Исходя из того, какой тип связи наложен на механическую систему, получаются разные формы уравнений аналитической динамики. Этим объясняется важность четкого определения типов связей, наложенных на точки системы.

Второе важное свойство механической системы — это *количество степеней свободы*.

Перейдем к определению разновидностей связей и механических систем.

2.2. Типы механических систем и связей

Мы будем рассматривать движение системы N материальных точек относительно некоторой инерциальной системы координат (в частности, прямоугольной декартовой). Положение каждой точки задается радиусом-вектором $\mathbf{r}_n$ (или, что тоже самое, набором трех пространственных координат, например декартовых x_n, y_n, z_n). Если положения, скорости и ускорения точек никоим образом не ограничены, то такая система называется *свободной*. Но такое встречается редко. Чаще всего приходится иметь дело с такими системами, в которых присутствуют ограничения на положение или скорости ее точек (очень редко ускорений). Такие ограничения часто вызываются другими телами. *Пример* — движение шарика по поверхности. Такие системы называются *несвободными*, а сами ограничения в математической записи называются *связями*.

Связи, задаваемые неравенствами, называются *односторонними* или *неудерживающими*. В этом случае движение можно разбить на два вида: свободное и связанное, когда связь имеет вид уравнения. Поэтому в дальнейшем ограничимся *двусторонними* или *удерживающими* связями, которые задаются уравнениями. Аналитически некоторая общего вида удерживающая связь задается уравнением

$$f(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i) = 0, \qquad (1)$$

в которое входят время t, радиусы-векторы $\mathbf{r}_i$ и скорости $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ всех точек системы. (Вообще говоря, могут входить и ускорения.) Здесь принято, что точкой сверху обозначается производная по времени. Таким обозначением пользовались еще во времена Ньютона.

В частности функция f может не содержать некоторых из рассмотренных выше переменных в явном виде, т.е. частная производная по этой переменной равна нулю. Именно это обстоятельство лежит в основе классификации связей, а также и систем.

Если функция f не зависит явно от времени, то связь называется *стационарной*, а механическая система называется *склерономной* (от греч. *склерос* — твердый). Если же время явно входит в выражение функции, то связь называется *нестационарной*, а система — *реономной* (от греч. *реос* — течение, поток). Эту терминологию ввел Больцман.

Если в уравнение входят и координаты и скорости, то связь называется *кинематической* или *дифференциальной*, поскольку она является, по сути дела, дифференциальным уравнением относительно радиусов-векторов или координат точек. В аналитической механике обычно ограничиваются рассмотрением линейных функций относительно скоростей, т.е. линейных дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{c}_i \dot{\mathbf{r}}_i + D = 0 . \tag{2}$$

Если в уравнение не входят скорости, то связь называется *геометрической* или *конечной*. Каждая конечная связь влечет за собой дифференциальную, уравнения которой получаются ее почленным дифференцированием по времени.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial r_i} \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 . \tag{3}$$

По построению такой связи мы знаем, что ее можно проинтегрировать и получить другую конечную связь, аналогичную исходной, но содержащую еще константу интегрирования $f(t, \mathbf{r}_i) - c = 0$. Поэтому связь (3) называется *дифференциальной интегрируемой* связью, а связь (2) — дифференциальной неинтегрируемой.

Теперь выделим очень важный класс систем. Если на точки системы не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется *голономной*. Такое определение ввел Г. Герц (от греч. *голос* – целый, в смысле интегрируемый, = лат. *integer* целый; и *номос* – закон, греч. или называть лат.). Другое определение состоит в том, что на систему наложены *голономные связи*, т.е. конечные или дифференциальные интегрируемые. Если присутствует дифференциальная неинтегрируемая связь, то система называется *неголономной* и сами дифференциальные неинтегрируемые связи иногда называют неголономными. Все эти сведения сведены в таблицу 1.

Таблица 1. Типы связей и механических систем

Особенность функции	Название связи	Название системы
не зависит явно от времени	стационарная	склерономная
зависит явно от времени	нестационарная	реономная
зависит явно от скорости	кинематическая (дифференциальная неинтегрируемая)	неголономная
не зависит явно от скорости	геометрическая (конечная или дифференциальная интегрируемая)	голономная

Примеры. Движение материальной точки по движущейся (деформируемой) поверхности, задаваемой уравнением $f(x, y, z, t) = 0$: связь — конечная нестационарная, система — голономная реономная. Движение системы частиц, расстояние между которыми постоянно $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = \ell^2$ — связи конечные стационарные, система голономная склерономная. Если частиц бесконечно много, то это абсолютно твердое тело, однако его движение эквивалентно движению двух таких точек. Если рассмотреть только две точки, движущихся в плоскости, то это эквивалентно движению абсолютно жесткого стержня длиной ℓ.

Пример неголономной связи — движение конька. Это движение двух материальных точек, соединенных жестким стержнем, которые могут двигаться только так, чтобы скорость середины стержня была направлена вдоль стержня. Т.е. присутствует дифференциальная неинтегрируемая связь

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2}$$

Последняя важная для классификации механических систем разновидность связей связана с понятием *виртуальных перемещений*, знакомых вам с курса теоретической механики. Оно позволяет ввести понятие *идеальных* связей.

2.3. Возможные и виртуальные перемещения. Идеальные связи

Совокупность бесконечно малых перемещений $d\mathbf{r}_i$, которые частица с номером i может совершить за время dt, двигаясь и удовлетворяя условиям связи, называют *возможными перемещениями*. Перемещение, которое частица совершает в действительности за время dt, находится среди возможных перемещений.

Рассмотрим две системы возможных перемещений для одного и того же момента времени и одного и того же положения системы. Запишем выражение для разности между этими перемещениями $\delta\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}'_i$. Эти перемещения называются *виртуальными перемещениями*. Физический смысл виртуальных перемещений: это те перемещения, которые были бы возможны на поверхности (если она представляет собой связь), если в данный момент времени эту поверхность мгновенно остановить. Поэтому говорят, что виртуальные перемещения совпадают с возможными перемещениями при «замороженных» связях. Отсюда же и другое название, используемое в вариационном исчислении, — *изохронная или синхронная вариация перемещений*. При стационарных связях виртуальные перемещения совпадают с возможными. Для реономных систем они существенно отличаются от возможных перемещений. Соответствующие скорости $\delta\mathbf{v}_i$ называются *виртуальными скоростями*.

Используем традиционный ньютонов подход и рассмотрим, как влияют связи с точки зрения действующих на механическую систему сил. Наличие связей приводит к появлению дополнительных сил, которые называются *силами реакции*. Равнодействующая реакций всех связей на i-тую точку обозначается $\mathbf{R}_i$. В отличие от активных сил, которые нам известны, реакции являются неизвестными величинами.

Выделим важный класс связей. Связи называются *идеальными*, если сумма работ реакций этих связей на любых виртуальных перемещениях всегда равна нулю, т.е. если

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \delta\mathbf{r}_i = 0\,. \tag{4}$$

Уравнение (4) — математическое условие идеальности связей. Физический смысл состоит в том, что мы пренебрегаем силами трения. Мы считаем, что налагаемые ограничения являются «идеальными» в общепринятом смысле — идеально жесткое соединение, идеальный шарнир, идеально гладкая поверхность.

Для случая идеальных связей удается построить красивый и стройный математический аппарат решения задач механики.

Многие практически важные механизмы на определённом временном промежутке могут рассматриваться как механические системы с идеальными связями: движение по гладкой поверхности, как неподвижной, так и подвижной, абсолютно твердое тело, соприкосновение твердых тел с идеально гладкими поверхностями или идеальным сцеплением. Исключение составляют системы, в которых пренебрегать силами трения нельзя, это — *системы с неидеальными связями*. Хотя и в этом случае можно считать связи идеальными, а силы трения рассматривать как неизвестные активные силы, для которых необходимые дополнительные соотношения получаются из экспериментов.

2.4. Степени свободы. Независимые и обобщенные координаты

Наша цель — сопоставить количество имеющихся у нас уравнений количеству неизвестных, которые нам нужно определить.

Итак, вернемся к нашей механической системе. Мы имеем N материальных точек. Их положение в трехмерном пространстве описывается $3N$ координатами x_i, y_i, z_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, которые подчиняются $3N$ уравнениям движения (пока будем исходить из законов Ньютона)

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i - \mathbf{R}_i , \; i = 1, 2, \ldots, N , \tag{5}$$

где m_i — масса i-й точки, $\boldsymbol{w}_i$ — ее ускорение, а $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{R}_i$ — соответственно равнодействующая активных сил и равнодействующая сил реакций, действующих на точку с номером i.

На эту систему наложено K голономных связей

$$f_k(t, \mathbf{r}_i) = 0 , \; k = 1, 2, \ldots, K , K < N , i = 1, 2, \ldots, N \tag{6}$$

и M неголономных связей, линейных по скоростям,

$$f_m(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i) = 0 , \; m = 1, 2, \ldots, M , K < N , i = 1, 2, \ldots, N . \tag{6'}$$

Итого имеем систему $3N$+K+M уравнений, при этом $K + M < N$ — иначе не будет никакого движения. А количество неизвестных равно $6N$, т.к. для каждой точки надо определить 3 координаты и 3 составляющих сил реакции. $3N$+K+M<$6N$ и система является неопределенной. Но у нас есть еще одно уравнение — условие идеальности связей (4). Уравнение всего одно, однако, это уравнение не совсем обыкновенное, в него входят вариации координат — виртуальные перемещения. Необычность состоит в том, что виртуальные перемещения могут быть выбраны произвольно, но не все, а только за вычетом количества наложенных связей, т.е. $3N - K - M$. И если мы выразим зависимые виртуальные перемещения через независимые и приравняем нулю коэффициенты при этих независимых приращениях, то получим нужное нам число недостающих соотношений.

Если связи идеальные, то, используя условие идеальности (4) можно избавиться от неизвестных нам сил связи, и свести систему уравнений (5) к уравнению

$$\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 , \tag{7}$$

которое называется *<u>общим уравнением динамики</u>*, и выражает *<u>вариационный принцип Даламбера-Лагранжа</u>*. Именно его Лагранж принял в качестве основного принципа механики.

Лагранж развил математический аппарат решения такой системы уравнений, который сейчас называется <u>методом неопределенных множителей Лагранжа</u>. Он изучается в курсе математического анализа. Мы не будем его повторять.

Так вот, если воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа, то благодаря вариационному условию идеальных связей (4), вместо сил связи к основной группе неизвестных — координатам — добавятся еще одна группа неизвестных — неопределенные множители Лагранжа по одному на каждое уравнение связей. Но в этом случае количество неизвестных тоже будет равно $3N$+K+M, т.е. равно количеству уравнений, и система становится определенной. Однако это слабое утешение, поскольку в целом, метод решения такой системы уравнений получается очень громоздким, т.к. количество уравнений получается довольно большим даже для небольшого количества точек, и растет с увеличением количества связей.

Интуитивно понятно, что при наличии ограничений движение будет проще, чем произвольное неограниченное (например, движение по плоскости проще чем произвольное движение в пространстве, если огран ичивающих плоскостей две, то движение еще проще – по прямой). Математически это означает, что не все координаты будут независимы. Количество *<u>независимых координат</u>* будет меньше количества реальных координат, но этого количества достаточно для описания положения системы.

Раз меньше количество необходимых координат, то хотелось бы уменьшить и количество уравнений. Поэтому желательно с самого начала иметь уравнения, описывающие систему в терминах независимых координат. Впервые этот подход был предложен Лагранжем в 1788 г. в его выдающемся труде «Аналитическая механика». Посмотрим, как можно перейти к описанию движения механических систем в независимых координатах.

Разность между числом декартовых координат точек механической системы и числом уравнений связи называется *числом степеней свободы* системы $n = 3N - K - M$. Число степеней свободы принято обозначать малой латинской буквой n, а большой N — общее количество точек в системе.

Примеры. Свободная материальная точка в пространстве имеет три степени свободы. Если на эту точку наложена геометрическая связь, предписывающая ей двигаться в плоскости, то она имеет две степени свободы.

Рассмотрим голономную систему, т.е. у нас есть уравнения связей, зависящие от координат. Введем $n = 3N - K$ новых независимых координат q_j с помощью неких соотношений

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t),\ i = 1, 2, \ldots, N,\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

которые согласованы с уравнениями голономных связей, т.е. если подставить выражения (8) в эти уравнения, мы получаем тождество. Формула (8) показывает, что для голономных систем можно дать другое определение: *числом степеней свободы называется количество независимых координат, определяющих положение системы*.

Замечание. В случае присутствия также и M неголономных связей, тоже можно ввести $I = 3N - K$ новых координат, но только они не все будут независимыми, а лишь $3N - K - M$. Но выразить их явно не удается из-за того, что остальные связи неинтегрируемые.

Формулы (8), по сути, задают правила преобразований координат. Координаты реального физического пространства преобразуются в фиктивные координаты n-мерного пространства, называемого *конфигурационным пространством.* Каждая точка этого пространства описывает определенную конфигурацию, т.е. положение механической системы. Это понятие новых фиктивных координат для механической системы является обобщением понятий сферических координат для одной материальной точки. Поэтому их называют *обобщенными координатами*. Некоторые обобщенные координаты при этом могут быть безразмерными (например, угол в цилиндрической или сферической системе координат).

Основное изложение методов аналитической механики ведется в обобщенных координатах. Полное число частиц, образующих механическую систему, а также их декартовы координаты, несущественны при аналитическом методе исследования. Важны лишь обобщенные координаты и некоторые определенные функции от них. Движению *механической системы* в реальном пространстве соответствует движение всего лишь *одной точки* в конфигурационном пространстве.

Пример обобщенных координат. Положение жесткого звена, вращающегося в плоскости вокруг неподвижной точки, вполне определяется заданием величины угла поворота. Двойной маятник описывается двумя угловыми координатами. Конфигурационные пространства, соответственно, будут одномерным и двумерным.

2.5. Обобщенные силы и потенциальная энергия

Следующая наша цель перейти от сил к другим характеристикам — работе и энергии. Кроме того, нам нужно получить для них выражения через обобщенные координаты и скорости. Начнем с правой части уравнения движения Ньютона, где стоят силы.

Аналитическая механика стремится к формулировке в *инвариантных* величинах и формах (например, дифференциальных). Инвариантный — значит не зависимый от системы координат. Сила, как вектор, инвариантна. Но мы обычно имеем дело в уравнениях с компонентами силы, значения которых зависят от системы координат.

Поэтому понятие силы в лагранжевой механике не играет той основной роли, какое она имеет в механике Ньютона. Основное значение имеет работа этих сил, ведь ее значение не зависит от системы координат, поскольку она — величина скалярная. Хотя, совсем исключить силы из рассмотрения не удается. (Справедливости ради отметим, что Герц предложил изложение «бессиловой механики»)

Рассмотрим элементарную работу активных сил на виртуальных перемещениях. Выразим ее через обобщенные координаты, используя формулу (8).

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i . \tag{9}$$

Величины Q_i

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\delta A_i}{\delta q_i} \tag{10}$$

называются <u>*обобщенными силами*</u>, хотя правильнее было бы их называть компонентами вектора обобщенной силы, действующей на точку в конфигурационном пространстве. Последнее выражение в (10) используется для нахождения величины обобщенной силы на практике, вычисляя предварительно приращение работы δA_i, при котором только одна координата q_i получает некоторое виртуальное приращение.

Можно предложить несколько принципов классификации сил. По природе происхождения силы появляются либо за счет внешнего поля, либо в результате взаимодействия частиц. С точки зрения аналитического подхода предлагается другое деление. Это деление зависит от того, является ли элементарная работа сил δA полным дифференциалом, или нет. Если такой дифференциал существует, то силы называют <u>*потенциальными*</u>. Вводят понятие <u>*потенциальной энергии*</u> или <u>*потенциала*</u> $\Pi(q_1, \dots, q_n, t)$, так, что $\delta\Pi = -\delta A$ и

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \tag{11}$$

<u>Замечание</u>. Некоторые авторы потенциальной энергией называют функцию $\Pi(q_1, \dots, q_n)$, только если она не зависит явно от времени.

Силы, имеющие потенциал, замечательны с двух точек зрения. Во-первых, они <u>удовлетворяют закону сохранения энергии</u>; по этой причине они называются «консервативными силами». Во-вторых, несмотря на то, что обобщенная сила имеет n компонент, все эти компоненты могут быть вычислены из <u>*одной скалярной функции*</u> П. Для применения в механике вариационных методов важно только последнее свойство, а то, что при этом сохраняется энергия системы, несущественно.

Главное свойство потенциальных сил — их работа зависит только от начального и конечного положения точки их приложения и не зависит от вида траектории.

<u>***Примеры***</u> потенциальных сил — электромагнитные и гравитационные силы.

Существует еще один интересный вид сил, который определяется *одной скалярной функцией*, которая, однако, кроме координат и времени зависит еще и от <u>скоростей</u> $U = U(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$. Ее называют <u>*силовой функцией*</u>, а взятую с противоположным знаком — <u>*обобщенным потенциалом*</u> $-U = V = V(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$. Соответствующая им обобщенная сила задается выражением

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} .$$

<u>***Примером***</u> такой силы является электромагнитная сила Лоренца, действующая на частицу при наличии электрического и магнитного полей. Она порождается именно такой силовой функцией.

Механические системы, в которых силы имеют обычный или обобщенный потенциал называют <u>*натуральными системами*</u>. Это ещё одно добавление к классификации систем.

Следующие, примечательные с точки зрения дальнейшего рассмотрения силы мы введем, анализируя уравнения Лагранжа второго рода.

2.6. Кинетическая энергия

Левая часть уравнения Ньютона характеризует инертные свойства массы в форме «массы, умноженной на ускорение» или «скорости изменения импульса». Аналитическая механика показала, что в действительности фундаментальной величиной, характеризующей инерцию массы, является не импульс, а кинетическая энергия.

Кинетическая энергия — это скалярная величина, определенная как $mv^2/2$ для одной частицы и как

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \tag{12}$$

для системы частиц. Выразим скорости частиц через обобщенные координаты и скорости, воспользовавшись для этого выражением (8):

$$\mathbf{v}_i^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)^2 . \tag{13}$$

Таким образом, если раскрыть скобки, для кинетической энергии следует выражение

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k + \sum_{i=1}^{n} a_i\dot{q}_i + a_0 = T_2 + T_1 + T_0 . \tag{14}$$

Коэффициенты a_{ik}, a_i, a_0 являются функциями обобщенных координат и времени, определяемыми следующим выражениями

$$a_{ik}(q_1, \ldots, q_n, t) = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i}\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} , \tag{15}$$

$$a_i(q_1, \ldots, q_n, t) = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i}\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t} , \tag{16}$$

$$a_0(q_1, \ldots, q_n, t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t}\right)^2 . \tag{17}$$

А функции T_2, T_1, T_0 являются так называемыми однородными функциями обобщенных скоростей второй, первой и нулевой степени, соответственно. В случае *склерономной* системы время не входит явно в уравнения связей, а значит и в зависимость между $\mathbf{r}_j$ и q_i. Поэтому коэффициенты a_i, a_0 равны нулю и получается, что кинетическая энергия склерономной системы является однородной функцией второй степени, не зависит от времени явно и равна

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k . \tag{18}$$

Для *реономной* системы кинетическая энергия определяется полным выражением (14).

Можно попытаться еще более упростить выражение (18), если выбором преобразования обобщенных координат попытаться привести матрицу коэффициентов к диагональному виду. Как известно из курса аналитической алгебры это всегда можно сделать для симметрической матрицы коэффициентов. Наше выражение (18) как раз обладает этим свойством по определению (15), т.е. является квадратичной формой. (*Квадратичная форма* — это однородная функция 2-й степени с симметричной матрицей коэффициентов).

3. Вариационный принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа для голономных систем

3.1. Вариационный принцип Гамильтона

Мы переходим к изучению вариационных принципов механики. Теоретическое значение вариационных принципов очень велико. Оно не ограничивается только механикой как теоретической, так и сплошных сред. Вариационные принципы находят широкое применение в разработке новых идей в физике, а также новых методов в математике. Они дают альтернативный путь для составления уравнений движения, а в ряде случаев и граничных условий. Именно поэтому их можно положить в основу изложения механики. Мы рассмотрим только один вариационный принцип, который носит имя Гамильтона или Гамильтона–Остроградского.

В основе любого вариационного принципа лежит вариационная задача. Вариационная задача — это задача нахождения функций, доставляющих экстремальное значение некому интегралу от искомых функций. Первая часть этой задача — определение стационарности интеграла, т.е. когда равна нулю первая его вариация. Знак второй вариации показывает, является ли найденный экстремум минимумом или максимумом, или не является экстремумом вовсе.

Рассмотрим два момента времени. В каждый из них положение всех точек нашей механической системы полностью определяется набором независимых обобщенных координат, т.е. некоторой точкой конфигурационного пространства. Итак, считаем, что нам заданы два момента времени и все значения обобщенных координат в эти моменты времени. Через определенные таким образом две точки в пространстве конфигураций можно провести множество различных кривых (траекторий), однако истинная траектория одна. Так какая же из множества траекторий — истинная? Ответ на этот вопрос и дает вариационный принцип Гамильтона.

Итак, вариационный принцип Гамильтона основывается на сравнении движений по возможным траекториям за определенный промежуток времени, при одинаковых фиксированных положениях всех траекторий в начальный и конечный момент времени.

Вариационный принцип Гамильтона заключается в следующем: постулируется, что при действительном движении достигается стационарное значение некого интеграла по времени.

Математическое выражение принципа Гамильтона можно получить из общего уравнения механики (5). Для этого раскроем скобки

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{F}_i\delta\mathbf{r}_i - m_i\mathbf{w}_i\delta\mathbf{r}_i\right) = 0,$$

и воспользуемся формулами для элементарной работы сил (9)

$$\delta A - \sum_{i=1}^{N}\left(m_i\mathbf{w}_i\delta\mathbf{r}_i\right) = 0.$$

Далее учтем, что для ускорения справедливо выражение (используем свойством изохронности вариаций, значит можно менять местами операции варьировании и производной по времени)

$$\mathbf{w}_i\delta\mathbf{r}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\delta\mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}_i\delta\mathbf{r}_i\right) - \mathbf{v}_i\frac{d}{dt}\left(\delta\mathbf{r}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}_i\delta\mathbf{r}_i\right) - \mathbf{v}_i\delta\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}_i\delta\mathbf{r}_i\right) - \frac{1}{2}\delta\mathbf{v}_i^2,$$

а, следовательно, в нашем выражении появляется вариация кинетической энергии

$$m\mathbf{w}_i\delta\mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}\left(m\mathbf{v}_i\delta\mathbf{r}_i\right) - \delta T.$$

Окончательно общее уравнение механики преобразуется к виду

$$\delta A+\delta T-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{v}_i\delta\mathbf{r}_i\right)=0\,.$$

Теперь надо проинтегрировать полученное выражение по времени в заданном промежутке от t_1 до t_2 и воспользоваться условием, что в крайних точках вариации перемещений равны нулю, поскольку состояния системы в них известны. В итоге получим следующее выражение

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta A+\delta T\right)dt=0 \qquad (19)$$

Выражение (19) является наиболее <u>общей формулировкой принципа Гамильтона-Остроградского</u>. Гамильтон установил его впервые для склерономных систем (т.е. систем с геометрическими связями). Остроградский позднее показал, что этот принцип может быть обоснован и для систем при наложенных нестационарных связях (т.е. для реономных систем). Но в обоих случаях рассматривались голономные системы. Что касается применимости принципа Гамильтона к <u>неголономным системам</u>, то следует запомнить, что <u>не существует строгого полного доказательства его применимости</u>. Напротив, есть примеры его непригодности для некоторых случаев неголономных связей. Поэтому для таких систем его не следует применять (или следует применять осторожно). Для голономных же систем он применим, и может быть представлен в других боле удобных формулировках, особенно когда силы, действующие на систему, являются потенциальными.

3.2. Функция Лагранжа. Действие по Гамильтону

Напомним, что мы ограничились рассмотрением голономных систем. Выделим также отдельно работу активных сил, имеющих потенциал. В этом случае можно ввести в рассмотрение так называемую <u>*функцию Лагранжа*</u> (или <u>*лагранжиан*</u>, его еще называют <u>*кинетическим потенциалом*</u>)

$$L=T-\Pi\,, \qquad (20)$$

которая выражает превышение кинетической энергии системы над потенциальной. Вводится также понятие <u>*действие по Гамильтону*</u>

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt \qquad (21)$$

Это функционал, поскольку лагранжиан, являясь разностью кинетической и потенциальной энергий, зависит от функций времени — обобщенных координат и обобщенных скоростей $L=L(q_i,\dot{q}_i,t)$. Размерность действия равна произведению размерности энергии на размерность времени (Дж·с) и равна размерности постоянной Планка — кванту действия. Таким образом, понятие действия используется не только в классической, но и в квантовой механике.

Получаем, что в том случае, когда на голономную систему действуют только силы, имеющие потенциал, уравнение принципа Гамильтона запишется кратко

$$\delta S=0\,, \qquad (22)$$

и означает, что в <u>*истинном движении действие по Гамильтону принимает стационарное значение*</u>.

<u>***Примечание***</u>. Мы говорим про стационарное значение, а не про минимум, поскольку равенство нулю первой вариации еще не означает, что достигается экстремальное значение. Для того чтобы выяснить является ли значение экстремальным нужно исследовать поведение второй вариации. Но для решения большинства задач это не является обязательным, достаточно знать, что равна нулю первая вариация. Однако чаще всего достигается именно минимальное значение, и тогда применяют термин <u>*принцип минимального действия*</u>.

В качестве приложения рассмотрим одну любопытную теорему, которую можно доказать, используя принцип Гамильтона

Теорема Нётер. В 1918 г. немецкий математик Эмми Нётер (1882–1935) установила теорему, которая играет фундаментальную роль в современной теоретической физике. Эта теорема определяет связь преобразований симметрии (т.е. преобразований координат и времени, оставляющих инвариантным действие), с законами сохранения соответствующих динамических величин.

Для классической механики действие инвариантно относительно следующего 10-параметрического преобразования координат от x_i, t к x'_i, t' :

$$x_j = S_{ij}x'_i + u_j t + d_j\,,\;\; t = t' + t_0\,.$$

Вместо одного первого выражения можно рассмотреть 9 отдельных однопараметрических преобразований, следующих из этого общего выражения. Здесь кососимметрическая матрица S_{ij} имеет только 3 ненулевых элемента (псевдовектор) и задаёт поворот в трёхмерном пространстве, вектор $\boldsymbol{u}$ задаёт движение с постоянной скоростью, а вектор $\boldsymbol{d}$ определяет смещение (по три компоненты, соответствующие трём осям декартовой системы координат для каждого вектора). Второе выражение задает смещение по времени. Этим 10 параметрам соответствуют (в обратном порядке) законы сохранения энергии и векторных величин: импульса, скорости центра масс системы, момента импульса.

3.3. Уравнения Лагранжа второго рода — уравнение движения в обобщенных координатах

Ранее мы ввели в рассмотрение обобщенные независимые координаты, показали как через них выражаются обе части уравнения движения Ньютона: силам в ньютоновой механике мы поставили в соответствие обобщенные силы, а если они потенциальные, то — потенциальную энергию в лагранжевой механике; импульсам соответствует кинетическая энергия. Осталось получить выражение самого уравнения движения в обобщенных координатах. Воспользуемся для этого принципом Гамильтона. Вспомним вариационное исчисление и запишем дифференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа соответствующей вариационной задачи (21)–(22), учитывая функцией каких аргументов является лагранжиан $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{23}$$

Получили систему n уравнений, где n — количество степеней свободы механической системы. Это и есть уравнения движения в обобщенных координатах — *уравнения Лагранжа второго рода*. В таком виде оно справедливо только для случая голономных систем и когда действуют только потенциальные силы.

Можно показать, что в случае действия также и непотенциальных сил имеем выражение более общего вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{24}$$

Посмотрим внимательно на эти уравнения (23) и (24). Первое слагаемое в левой части представляет собой обобщенный импульс (производная от кинетической энергии по скоростям), а второе слагаемое является ничем иным как обобщённой силой. Т.е. структура этих уравнений подобна структуре уравнения движения Ньютона, но записана она через обобщённые координаты.

Уравнение Лагранжа второго рода имеет очень большое значение особенно для консервативных систем, т.е. голономных систем с потенциальными силами. Во-первых, это уравнение движения в обобщенных координатах (такую формулировку можно рассматривать как определение уравнения Лагранжа второго рода). Во-вторых, его вид не зависит от системы координат (инвариантная форма записи). Вид функции L или T может измениться, в этом случае изменится также и вид уравнений движения относительно самих обобщенных скоростей и координат, но главное, что останется той же форма записи уравнений движения через функции L или T. Инвариантность уравнений движения Лагранжа является одним из наиболее важных их свойств. Она позволяет использовать различные координаты, наилучшим образом соответствующие особенностям задачи.

Поскольку не существует общего метода решения уравнений Лагранжа, то лучшее, что можно сделать, это выбрать такую систему координат, в которой эти уравнения были бы, хотя бы частично, интегрируемы. Сам вид уравнений показывает, как это можно сделать.

Проведем небольшой анализ уравнения Лагранжа. Если мы выберем такие обобщенные координаты, что функция Лагранжа не будет зависеть явно от переменной q_k, то мы автоматически понижаем порядок уравнения (хотя бы одного) и получаем так называемый *первый интеграл* уравнений движения (т.е. функцию, которая остается постоянной на траектории системы)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = const .$$

Ввиду большой значимости таких координат для них ввели специальное название — *циклических координат*. Само название «циклическая координата» связано с тем, что во многих задачах механики угол φ, характеризующий движение по замкнутым траекториям (циклам), не входит явно в выражение для L и потому является циклической координатой. Циклические координаты иногда называют *игнорируемыми* или *скрытыми* координатами. Это название объясняется тем, что при интегрировании соответствующей системы уравнений мы, как бы, забываем о существовании циклических координат.

Замечание. Как и принцип Гамильтона уравнения Лагранжа справедливо только в случае голономных систем. Как же следует поступать, если система неголономная? Можно указать два выхода. Первый связан с использованием общей теории Лагранжа для решения вариационной задачи при наличии дополнительных условий — метода неопределенных множителей Лагранжа. В этом случае подынтегральное выражение (функция Лагранжа) заданной вариационной задачи преобразуется путем прибавления к ней кинематических связей, каждое из которых умножается предварительно на множитель-функцию $\lambda_i(t)$. Полученная новая задача рассматривается как свободная вариационная задача. Второй путь — использовать другие уравнения, например, уравнения Гиббса – Аппеля. Первоначально их получил в 1879 г. великий американский ученый Джозайя Уиллард Гиббс (1839–1903) — один из основоположников термодинамики и статистической механики (статистической физики). Двадцать лет спустя они были подробно исследованы французским математиком и механиком Полем Аппéлем (1855–1930). В уравнениях Гиббса – Аппеля используются так называемые псевдокоординаты или квазикоординаты. Они вводятся с помощью функций, аналогичных (8), которые связывают не координаты, а приращения координат или их скорости. Например для плоского движения эти выражения могут иметь вид $dq = x\,dy - y\,dx$ и соответственно $\dot{q} = x\,\dot{y} - y\,\dot{x}$. Подробно этот вопрос мы рассматривать не будем.

3.4. Теорема об изменении полной энергии

Анализируя уравнение Лагранжа второго рода можно несколько расширить классификацию сил. А именно среди непотенциальных сил выделить гироскопические и диссипативные силы, а также ввести понятие диссипативной функции Рэлея.

Для этого рассмотрим уравнение Лагранжа в общем виде (24). Отдельно запишем выражение для потенциальных сил через потенциальную энергию, а через Q_i будет обозначать только непотенциальные силы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}+Q_i \quad (i=1,\ldots,n).$$

Введем в рассмотрение <u>*полную энергию*</u> E, равную сумме кинетической и потенциальной энергий

$$E(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t)=T(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t)+\Pi(q_1,\ldots,q_n,t)$$

и вычислим полную производную по времени dE/dt от этой величины. Для этого вначале найдем производную по времени от кинетической энергии как сложной функции времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей.

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right).$$

Далее используем тождество (взяв производную по частям)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

и подставим последний член в этом выражении вместо последнего члена в предыдущей формуле, получим

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\frac{\partial T}{dt}.$$

Применим к первому слагаемому формулу (14) для разложения кинетической энергии на однородные функции второй, первой и нулевой степени, а также формулу Эйлера для однородных функций. Выражение под знаком суммы во втором слагаемом совпадает с левой частью уравнений Лагранжа с обратным знаком. Заменим его правой частью уравнений Лагранжа.

Сделаем небольшое отступление, чтобы напомнить некоторые понятия из теории функций многих переменных. Функция n переменных называется однородной степени m, если для любого действительного положительного числа λ имеет место формула

$$f(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)=\lambda^m f(x_1,\ldots,x_n).$$

Обычно эти функции имеют вид

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}a_{i_1\cdots i_m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}.$$

Формула Эйлера для однородной функции m-й степени $f(x_1,\ldots,x_n)$ записывается следующим образом

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i=mf.$$

Справедливость этой формулы можно проверить непосредственным дифференцированием.

А, значит, для составляющих кинетической энергии T_2 и T_1, находим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2T_2, \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=T_1.$$

Воспользовавшись этими заменами, получим выражение

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}(2T_2+T_1)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}-Q_i\right)\dot{q}_i+\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Далее воспользуемся тождеством $2T=2T_2+2T_1+2T_0$, значит

$$2T_2 + T_1 = 2T - (T_1 + 2T_0), \qquad \frac{dT}{dt} = 2\frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - Q_i\right)\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}$$

В итоге для производной от кинетической энергии имеем

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Поскольку потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей, значит для её производной имеем простое выражение

$$\frac{d\Pi}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

Окончательно получим для полной энергии

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{25}$$

Эта формула и выражает *теорему об изменении полной энергии при движении произвольной голономной системы*. Рассмотрим теперь частные случаи.

3.5. Консервативные системы. Гироскопические и диссипативные силы. Диссипативная функция Рэлея

Рассмотрим различные следствия из теоремы об изменении полной энергии. Это поможет нам выделить системы, в которых энергия сохраняется, а также два важных типа непотенциальных сил.

Сперва рассмотрим *консервативную* систему, т.е. систему в которой сохраняется энергия. Исходя из рассмотренной выше теоремы, такая система должна обладать следующими свойствами:

1) все силы потенциальные;
2) система склерономная (тогда второй и третий слагаемые в правой части равны нулю, поскольку как мы ранее показали для кинетической энергии T_1=T_0=0 и $\partial T/\partial t = 0$);
3) потенциальная энергия П не зависит явно от времени.

Тогда для консервативной системы действительно получаем

$$\frac{dE}{dt} = 0,$$

т.е. при любом движении системы

$$E = const = h. \tag{26}$$

Значит, полная энергия консервативной системы не изменяется при движении системы.

Равенство (26), включающее произвольную постоянную h, определяет первый интеграл уравнения движения. Исходя из физического смысла, его называют *интегралом энергии*.

Теперь рассмотрим более общий тип неконсервативных систем, обладающих некоторыми особыми свойствами.

1) Связи также стационарные (а, следовательно, система — склерономная).
2) Потенциальная энергия по-прежнему не зависит от времени.
3) Но всё же действуют непотенциальные силы.

Тогда

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i$$

Для такой системы производная от полной энергии по времени равна *мощности непотенциальных сил*. Рассмотрим два частных случая непотенциальных сил.

1 случай. Пусть

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i = 0 .$$

Если мощность непотенциальных сил равна нулю, то такие силы называются *гироскопическими*. Таким образом, для склерономной системы при гироскопических силах также имеет место интеграл энергии.

Примером гироскопических сил являются кориолисовы силы инерции и силы, создающие гироскопический момент (отсюда произошло их название). Они возникают в механической системе при её вращении. Рассмотрим примеры таких сил.

В общем случае обобщенные силы зависят от обобщенных скоростей $Q_i(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$. Рассмотрим важный частный случай, когда эта зависимость линейна и однородна.

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \dot{q}_k \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{27}$$

Если матрица коэффициентов γ_{ik} является кососимметрической, т.е.:

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} \text{ и } \gamma_{ii} = 0 ,$$

то обобщенные силы (27) являются гироскопическими.

Действительно, в этом случае

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii} \dot{q}_i \dot{q}_i + \sum_{i<k}^{1,\ldots,n} (\gamma_{ik} + \gamma_{ki}) \dot{q}_i \dot{q}_k = 0 .$$

Такие гироскопические силы можно рассматривать также как следствие действия обобщенного потенциала вида

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \dot{q}_k \text{ , где } \Gamma_k = \Gamma_k(q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

тогда

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \Gamma_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \dot{q}_k .$$

2 случай. Пусть

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i \le 0 .$$

Если мощность непотенциальных сил отрицательна или равна нулю, то такие силы называются *диссипативными силами*: В случае действия диссипативных сил, при движении механической системы полная энергия убывает во время движения. В этом случае саму *систему* также называют *диссипативной*. Этот термин означает, что происходит рассеивание (лат. dissipatio) энергии.

Рассмотрим важный частный случай, когда сила представляет линейную и однородную зависимость от обобщенных скоростей:

$$Q_i = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_k \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{28}$$

Для того, чтобы такая сила была диссипативной необходимо выполнение двух условий: 1) чтобы матрица коэффициентов b_{ik} являлась симметрической, т.е.

$$b_{ik} = b_{ki}$$

и 2) положительна была составленная из них квадратичная форма вида:

$$\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \ge 0$$

Тогда, действительно, мощность сил равна

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i = -\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \le 0$$

и силы Q_i являются диссипативными.

В этом случае квадратичная форма, сходная по форме с кинетической энергией,

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{29}$$

называется *диссипативной функцией Рэлея* в честь английского учёного Джона Уильяма Стрэтта – лорда Рэлея (1842–1919). Легко видеть, что обобщенные силы (28) получаются из диссипативной функции Рэлея с помощью формул

$$Q_i = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}. \tag{30}$$

Коэффициенты b_{ik} имеют смысл коэффициентов трения (вязкости или демпфирования). Если система склерономна и потенциальная энергия не зависит явно от времени, то имеем

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i = -2R.$$

Последняя формула указывает на физический смысл функции Рэлея: *удвоенная функция Рэлея равна скорости убывания полной энергии*.

Если функция Рэлея (29) является положительно определенной квадратичной формой от обобщенных скоростей (т.е. всегда строго больше нуля), то говорят о полной диссипации энергии. В этом случае систему называют *определенно-диссипативной*. У такой системы полная энергия строго убывает.

Пример Диссипативными являются приложенные к точкам системы силы сопротивления среды, пропорциональные первым степеням скоростей точек. Это так называемые *силы вязкого трения*. Такие силы, например, возникают в гидравлических амортизаторах, работающих при ламинарном режиме течения жидкости.

Замечание. Заканчивая изложение лагранжева формализма, следует заметить, что мы здесь не рассмотрели вопрос о структуре, определенного вида геометрии конфигурационного пространства, определяемого *метрикой* — формулой для расстояния между двумя близкими точками. Отметим, только, что оно оказывается в общем случае не евклидовым, а криволинейным *римановым пространством*. С геометрической точки зрения задача механики о нахождении закона движения в лагранжевом подходе заменяется геометрической задачей о нахождении *геодезической линии* (т.е. кратчайшей линии) в n-мерном криволинейном пространстве конфигураций. В этом суть лагранжева формализма, использовании в нём вариационного принципа.

4. Канонические переменные и канонические уравнения для голономных систем

4.1. Переменные, функция и уравнения Гамильтона

Мы рассмотрели вкратце Лагранжев формализм, позволяющий записать уравнение движения в независимых обобщенных координатах. Для него также характерно описание системы с помощью одной только скалярной функции — лагранжиана (кинетического потенциала), в случае консервативной динамической системы. Этим мы воспользуемся при анализе линейных колебаний механических систем с несколькими степенями свободы. Теперь мы переходим к Гамильтонову формализму. Его мы рассмотрим еще более кратко. Особенностью гамильтонова формализма является то, что он позволяет не только записать уравнение движения, но и указать пути нахождения его решения. Рассмотрение поведения систем ведется в *фазовом пространстве*, и такой подход оказывается важным и плодотворным для анализа *нелинейных систем*, причём не только механических, но и динамических систем в более широком смысле.

Лагранж показал, как выписываются дифференциальные уравнения движения системы, если известна функция, носящая его имя — функция Лагранжа $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$. Переменные t, q_i, $\dot{q}_i$ (i=1, ..., n), через которые выражается функция Лагранжа, называют *переменными Лагранжа* (не путать с переменными Лагранжа в механике сплошных сред). Набор значений этих переменных характеризует момент времени и соответствующее состояние системы, т. е. положение системы и скорости ее точек. Задание функции Лагранжа и начального состояния однозначно определяет движение консервативной механической системы. В таком случае часто говорят о *лагранжевой системе*.

Другой подход предложил ирландский ученый Уильям Га́мильтон (1805–1865) в 1834 году. В качестве основных переменных, характеризующих состояние системы, он предложил взять величины t, q_i, p_i, где p_i — *обобщенные импульсы*, определяемые равенствами

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{31}$$

Можно проверить, что это действительно импульсы на примере одной свободной материальной точки

$$p = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = mv,$$

а также в частном случае стационарных связей, когда кинетическая энергия является квадратичной формой от обобщенных скоростей.

Частная производная по обобщенным скоростям от функции Лагранжа и от кинетической энергии равны, поскольку потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей (мы не рассматриваем случай существования обобщенного потенциала).

Переменные t, q_i, p_i (i=1, ..., n) называют *переменными Гамильтона* или *каноническим переменными*.

Можно показать, что переменные Гамильтона могут быть однозначно выражены через переменные Лагранжа и наоборот. Таким образом, состояние системы можно характеризовать как системой значений переменных Лагранжа, так и системой значений переменных Гамильтона.

Посмотрим, как изменятся уравнения Лагранжа при использовании обобщенных импульсов.

$$\frac{d}{dt}(p_i) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{31'}$$

Теперь вместо n уравнений Лагранжа (обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка) мы получили 2n уравнений первого порядка: n уравнений (31) и n уравнений (31’). Однако, уравнения (31) — это чисто формальное переобозначение.

Гамильтон пошел дальше. Он предложил полностью перейти от обобщенных скоростей к обобщенным импульсам и ввел в рассмотрение функцию $H(t, q_i, p_i)$, определяемую равенством

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i(t, q_i, p_i) - L(t, q_i, p_i). \tag{32}$$

Более того, он показал, что с помощью этой функции уравнения движения могут быть записаны в виде следующей системы 2n *обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка*:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{33}$$

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями* или *уравнениями Гамильтона*. Функция $H(t, q_i, p_i)$, определяемая равенством (32), называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом*. Система не обязательно механическая, описываемая уравнениями Гамильтона, называется *гамильтоновой системой*. Пара координат p_i и q_i называется *канонически сопряженными*.

Первое уравнений (33) является, по сути, определением обобщенных скоростей, подобным уравнению (31) для обобщенных импульсов. Само уравнение движения заключается во втором из уравнений (33). Действительно, в случае движения свободной частицы в потенциальном поле сил оно превращается в обычное уравнение Ньютона.

Исходя из этого можно предположить как будет выглядеть уравнения Гамильтона для неконсервативных систем, когда действуют непотенциальные силы:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i(t, q_i, p_i).$$

Замечательным фактом введения новых переменных p_i является то, что их можно действительно рассматривать как новые независимые переменные. Уравнения Гамильтона полностью эквивалентны первоначальным лагранжевым уравнениям, являясь лишь их новой математической формулировкой. Однако новые уравнения обладают огромным преимуществом по сравнению с первоначальными:

1) производные по времени в них появляются лишь в левых частях уравнений, потому что функция Гамильтона не содержит производных q_i или p_i по времени t ;
2) они являются уравнениями не второго, а первого порядка.

Важным также является то, что правые части новых уравнений сразу получаются из одной-единственной функции H путем дифференцирования. Функция Н определяет собой всю систему уравнений.

Замечание 1. Справедливости ради стоит отметить, что эти уравнения впервые появились в поздней статье Лагранжа, а затем на их значение указал Коши. Но именно Гамильтон положил их в основу своих выдающихся исследований в механике. Название уравнений Гамильтона, канонических уравнений и канонических переменных ввел немецкий математик Карл Яко́би (1804–1851), который развил идеи Гамильтона.

Замечание 2. В математике переход от функции $L(\dot{q}_i)$, зависящей от координат $\dot{q}_i$, к сопряженной функции $H(p_i)$, зависящей от координат p_i, и определяемой выражением (32) называют *преобразованием Лежандра* функции $L(\dot{q}_i)$. Его еще называют дуальным преобразованием, или говорят, что оно обладает свойством *инволютивности*. Это означает, что, применив обратное преобразование Лежандра к функции $H(p_i)$, мы получим функцию Лагранжа. В этом преобразовании переменные t и q_i являются пассивными.

В термодинамике преобразованием Лежандра пользуются для введения разных термодинамических потенциалов. Например, если задана внутренняя энергия, как функция деформации и энтропии $U(\varepsilon, S)$, то для построения энтальпии, как функции напряжения и энтропии используется преобразование Лежандра

$$\Phi(\sigma, S) = \sigma\varepsilon + U$$

и тогда

$$\varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \ \sigma = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}.$$

4.2. Вторая форма принципа Гамильтона

Посмотрим, как запишется в этом случае вариационный принцип Гамильтона. Начнем с того, что определим действие по Гамильтону. Это легко сделать, выразив функцию

Лагранжа из (32) через функцию Гамильтона обратным преобразованием Лежандра и воспользовавшись определением обобщенных скоростей

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H\,, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,.$$

Посмотрим, как варьирование p_i влияет на вариацию функции Лагранжа и, как следствие, на вариацию интеграла действия. Получаем

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{dp_i}\right)\delta p_i = 0$$

благодаря тому, что коэффициенты при δp_i равны нулю в силу введения обобщенных скоростей для обратного преобразования Лежандра. Т.е. произвольное варьирование импульсов не влияет на вариацию L. Следовательно, оно также не влияет и на интеграл от δL по времени. Это является подтверждением того, что обобщенные импульсы можно рассматривать как независимые переменные и приводит к следующему важному результату — мы можем утверждать, что *интеграл действия принимает стационарное значение даже и при произвольных вариациях* p_i, *когда* p_i *рассматриваются как вторая система независимых переменных*.

Итак, действие по Гамильтону запишется в виде

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H\left(p_i, q_i, t\right)\right] dt\,. \tag{34}$$

Если поставить вариационную задачу, потребовав стационарности действия при вариации независимых переменных p_i и q_i, то уравнения Эйлера этой вариационной задачи дадут нам 2 набора по n уравнений, т.е. как раз канонические уравнения Гамильтона:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 - \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0\,.$$

Таким образом, у нас есть теперь новый вариационный принцип, эквивалентный первоначальному, но имеющий перед ним некоторое преимущество вследствие более простой структуры получающихся дифференциальных уравнений.

Вследствие дуализма преобразования Лежандра каждой гамильтоновой задаче можно поставить в соответствие лагранжеву задачу и наоборот.

4.3. Фазовое пространство и фазовая жидкость

Переменными в гамильтоновом формализме являются q_i и p_i. Следовательно, новая задача имеет $2n$ координат. Если мы желаем изобразить эту новую ситуацию геометрически, то нам придется использовать пространство $2n$ измерений. Положение механической системы теперь определяется наряду с прежними позиционными координатами лагранжевой механики q_i также и импульсами p_i. Дж. Гиббс назвал это $q - p$ пространство, в котором одна точка C определяет обобщенное положение механической системы, *фазовым пространством* (*фазис*, греч. появление, — момент, отдельная стадия процесса). В лагранжевой механике мы говорили о конфигурационном пространстве, в которое включались только переменные q_i. В гамильтоновой механике мы говорим о фазовом пространстве, использующем q_i и p_i как совокупность $2n$ переменных.

В пространстве конфигураций имело смысл введение определенного вида геометрии, причем эта геометрия оказывается римановой. В фазовом пространстве ситуация иная: оно не имеет определенной метрики, и мы для удобства будем считать, что q_i и p_i являются прямоугольными координатами $2n$-мерного евклидова пространства.

При теоретических исследованиях задач движения использование фазового пространства ведет к ряду существенных преимуществ. Одно из наиболее важных преимуществ станет наглядным, если рассмотреть множество траекторий *C*-точки, сначала в лагранжевом пространстве конфигураций, а затем в гамильтоновом фазовом пространстве. Пока речь идет об одной траектории, то движущаяся *C*-точка в обоих случаях описывает некоторую кривую. Однако выделение одной конкретной траектории из множества всех возможных траекторий часто сильно затрудняет теоретические исследования. На многие вопросы механики нельзя дать удовлетворительный ответ, выделяя одно частное решение уравнений движения, соответствующее какому-то конкретному выбору начальных условий. Необходимо получить и проанализировать общее решение, удовлетворяющее произвольным начальным условиям.

Попытавшись изобразить все множество траекторий в лагранжевом пространстве конфигураций, мы получим безнадежно запутанное переплетение линий. Движение может начинаться из любой точки конфигурационного пространства в произвольном направлении и с произвольной начальной скоростью. Невозможно получить какое-либо упорядоченное представление всех этих линий. Обратимся теперь к фазовому пространству уравнений Гамильтона — уравнений не второго, а первого порядка. При заданном положении *C*-точки эти уравнения определяют также и значение ее скорости. Движение может начаться в любой точке фазового пространства, но задание одной точки однозначно определяет всю траекторию.

Для примера рассмотрим двухмерное фазовое пространство. Если начальная точка соответствует нулевому значению координаты q, то дальнейшее ее движение влево или вправо зависит от того, в какой полуплоскости фазового пространства она находится. Если $p > 0$, то траектория пойдёт вправо (скорость положительна и координата станет увеличиваться). Если $p < 0$, то траектория пойдёт влево. Выражаясь аналитическим языком, можно сказать, что для полного решения канонических уравнений нужно знать q_i и p_i, как функции времени t и $2n$ констант интегрирования, эти константы можно интерпретировать как значения тех же $2n$ координат фазового пространства в момент времени $t = 0$.

Это полное решение канонических уравнений можно изобразить в упорядоченном виде, без каких бы то ни было пересечений, если $2n$ координат q_i и p_i рассматривать как различные измерения фазового пространства. Геометрическая картина получается более полной, если добавить еще одно измерение, вводя время t в качестве $(2n + 1)$-й координаты. Эли Жозеф Картан (1869–1951) назвал это $(2n + 1)$-мерное пространство *пространством состояний*. В пространстве состояний задача о движении системы полностью геометризуется и полное решение канонических уравнений изображается в виде бесконечного множества кривых, заполняющих $(2n + 1)$-мерное пространство. Эти кривые нигде не пересекаются. Действительно, пересечение двух кривых означало бы, что в одной и той же точке пространства состояний возможны две касательные, что исключается, так как канонические уравнения в каждой точке этого пространства определяют единственную касательную.

Примечание. Если быть более точным, то очень небольшое количество фазовых траекторий все же могут пересекаться в некоторых точках фазового пространства, которые называются *особыми точками*, а сами траектории в этом случае разделяют разные режимы поведения динамической системы и называются *сепаратриссами*.

Следует отметить, что можно выделить два класса движений по виду фазовых траекторий в фазовом пространстве: *финитное*, когда фазовая траектория замкнута, и *инфинитное* движение, когда фазовая траектория незамкнута. Незамкнутая кривая не обязательно приходит из бесконечности и уходит в неё. Это может быть спираль, сходящаяся в точку. Финитным траекториям соответствует колебательное, повторяющееся движение.

Полученная геометрическая и аналитическая картина находится в полной аналогии с движением жидкости, (так называемая *гидродинамическая аналогия*). Представим себе трехмерное движение обычной жидкости, с которой оперирует гидродинамика, например, течение воды в реке или в трубопроводе. Это движение можно описать двумя способами: с помощью частиц и с помощью поля. Первому соответствует описание по Лагранжу (материальное), а второму — по Эйлеру (пространственное). Рассмотрим описание в декартовой системе координат.

При первом способе рассматривается отдельная частица жидкости и прослеживается изменение ее положения со временем t, начиная с некоторого начального положения x_0, y_0, z_0.

$$\begin{aligned} x &= f(x_0, y_0, z_0, t), \\ y &= g(x_0, y_0, z_0, t), \\ z &= h(x_0, y_0, z_0, t). \end{aligned} \qquad \text{(закон движения)} \qquad (35)$$

Для того чтобы перейти ко второму описанию рассмотрим поле скоростей, существующее в некоторый момент времени t и заданное дифференциальными уравнениями, полученными из (35)

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \dot{y} = \frac{\partial g}{\partial t}, \qquad \dot{z} = \frac{\partial h}{\partial t}. \qquad (36)$$

Разрешим уравнения (35) относительно x_0, y_0, z_0, выразив их в виде функций x, y, z, t. Подставив затем полученные выражения в (36), получим $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ как функции x, y, z, t

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(x, y, z, t), \\ \dot{y} &= v(x, y, z, t), \\ \dot{z} &= w(x, y, z, t). \end{aligned} \qquad \text{(аналог уравнений Гамильтона)} \qquad (37)$$

Это и есть второе описание движения жидкости с помощью поля, которое определяет вектор скорости в любой точке пространства в любой момент времени. Из заданного описания с помощью частиц можно получить описание с помощью поля путем дифференцирований и исключения переменных. С другой стороны, для получения описания по Лагранжу из описания по Эйлеру нужно проинтегрировать уравнения (37). Оба способа описания эквивалентны.

Эта гидродинамическая картина полностью переносится на фазовое пространство. Вводится понятие *фазовой жидкости,* поведение этой $2n$-мерной воображаемой жидкости подобно поведению обычной жидкости. Единственная разница заключается в том, что вместо трех координат x, y, z имеются $2n$ координат q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n. И в этих координатах описывается движение фазовой жидкости полем скоростей с помощью канонических уравнений Гамильтона, которым соответствуют уравнения (37) описания обычной жидкости по Эйлеру. Описание с помощью частиц получается в результате интегрирования канонических уравнений.

Резюме. Координатное пространство канонических уравнений имеет $2n$ измерений, а именно n позиционных координат q_i и n импульсов p_i, и все они являются независимыми переменными вариационной задачи. Геометрически движение механической системы можно представить в виде движения $2n$-мерной жидкости, называемой *фазовой жидкостью*. Каждая отдельная линия тока движущейся жидкости определяет собой движение механической системы при соответствующих начальных условиях; движение жидкости в целом определяет общее решение при разных произвольных начальных условиях.

4.4. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Интегральные инварианты

Канонические уравнения получают новый смысл, если их интерпретировать гидродинамически, имея в виду движение фазовой жидкости. Они определяют скорость частиц жидкости в определенной точке фазового пространства в определенный момент времени. Говорят, что система канонических уравнений движения определяет *оператор T*, переводящий систему из одного состояния в другое в разные моменты времени. Этот оператор называется *фазовым потоком*. Говорят, что фазовый поток переводит, например, контур C в C_T: $C_T = T\,C$. Движение происходит по фазовым траекториям. Фазовые траектории можно сопоставить с линиями тока в гидродинамике.

Оказывается, что особые типы движения жидкости, представляющие интерес в обычной гидродинамике, интересны также и при движении фазовой жидкости.

Так, описываемое уравнениями Гамильтона движение фазовой жидкости подобно движению реальной несжимаемой жидкости. А это означает, что вытекающее из уравнения сохранения массы (уравнения неразрывности) следствие о неизменности объема должно выполняться и для фазовой жидкости. Говорят, что для гамильтоновых систем *фазовый объём сохраняется*. Форма этого объёма может меняться, но объём сохраняется. Это составляет суть теоремы Лиувилля (её сформулировал французский математик Жозеф Лиувилль, 1809–1882), которую можно сформулировать ещё по другому: *поток фазовой жидкости через замкнутую поверхность равен нулю*.

В чём заключается значение теоремы Лиувилля? Оно предписывает особые свойства фазовым траекториям гамильтоновых систем. Например, фазовая траектория не может иметь вид закручивающейся спирали, т.к. в этом случае неизбежно уменьшение фазового объёма.

Вводимый таким образом новый инвариант — *фазовый объём* — является *интегральным* инвариантом. Интегральные инварианты представляют собой некоторые величины, вычисленные не в точке а в некоторой области фазового пространства, сохраняющиеся при движении фазовой жидкости. А. Пуанкаре ввел *n интегральных инвариантов* для гамильтоновой системы с таким же количеством степеней свободы. Различают относительные и абсолютные интегральные инварианты. В силу большой размерности пространства можно выбирать разные замкнутые области для интегрирования. Поэтому интегральных инвариантов и набирается так много. Первый относительный интегральный инвариант записывается как интеграл по контуру. По теореме Стокса ему можно сопоставить абсолютный интегральный инвариант, как интеграл по поверхности, опирающейся на контур.

Последний n-й абсолютный инвариант есть фазовый объем $\bar{J}(n) = \int\limits_{\sigma} dp_1 dq_1 \ldots dp_n dq_n = \Gamma$ некоторой $2n$-мерной области σ фазового пространства, а первый относительный инвариант $J(1) = \oint\limits_{C} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i dq_i$ называется циркуляцией, он соответствует понятию циркуляции в гидродинамике $\oint\limits_{C} \mathbf{v} ds$. Сохранении циркуляции вдоль любой замкнутой кривой при движении идеальной жидкости выражает теорему Гельмгольца о сохранении вихря. Анологичное утверждение переносится и на движение фазовой жидкости. Для консервативных систем он также тесно связан с таким важным понятием, как действие.

4.5. Теорема сохранения энергии как следствие канонических уравнений

Мы уже говорили о том, что особым свойствам гамильтоновых систем можно сопоставить особые типы движения жидкости. Одним из таких особых типов является стационарное движение жидкости. В нем поле скоростей не зависит от времени t. Хотя жидкость движется, и частицы все время изменяют свое положение, *скорость в определенной точке пространства постоянна*. Это означает, что в описании с помощью поля правые части уравнений (37) явно не зависят от времени t.

Такая же ситуация возникает в потоке фазовой жидкости в случае *консервативных* (склерономных и потенциальных) систем. В этом случае функция Лагранжа, а, следовательно, и функция Гамильтона, не зависят от t. Поэтому правые части канонических уравнений не зависят от времени, откуда сразу следует первое фундаментальное утверждение, что *фазовая жидкость в случае консервативных систем находится в состоянии стационарного движения*.

Второй фундаментальной теоремой, которая может быть получена для таких систем, является *теорема о сохранении энергии*. Дифференцирование функции Гамильтона в случае, когда она явно не зависит от времени, дает

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right). \tag{38}$$

Сопоставляя эту формулу и канонические уравнения сразу видно, что

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

и, следовательно,

$$H = const = E.$$

Эта теорема придает функции Гамильтона определенный физический смысл. Для этого воспользуемся обратным преобразованием Лежандра, определением обобщённых импульсов через лагранжиан, вспомним, что $L = T - \Pi$, и для консервативной системы $T=T_2$ — кинетическая энергия есть квадратичная функция скоростей, а Π от скоростей не зависит, и, наконец используем формулу Эйлера для однородных функций второй степени. Тогда имеем

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (T - \Pi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + \Pi = 2T - T + \Pi = T + \Pi .$$

То есть, функция Гамильтона консервативной системы равна ее полной энергии. Это верно только для случая консервативных систем. В общем случае неконсервативных систем такого ясного физического ясного смысла для гамильтониана нет.

Теорема о сохранении энергии имеет интересную геометрическую интерпретацию в связи с движением фазовой жидкости. Уравнение

$$H(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) = E$$

определяет некоторую гиперповерхность в $2n$-мерном пространстве, называемую *изоэнергетической*. Если константа E может принимать произвольные значения, то мы получаем бесконечное семейство поверхностей, заполняющих все фазовое пространство. Теорема о сохранении энергии утверждает, что *частица жидкости, начавшая свое движение на некоторой изоэнергетической поверхности, остается на этой поверхности в течение всего движения, независимо от его продолжительности.*

***Резюме*.** Если функция Гамильтона H не зависит от времени t, то механическая система консервативна. Такие системы характеризуются двумя особыми свойствами фазовой жидкости: 1) движение фазовой жидкости является стационарным; 2) каждая частица жидкости остается все время на изоэнергетической поверхности $H = E$.

4.6. Преобразования координат как метод решения задач механики. Канонические преобразования

Как мы уже видели при изучении лагранжева формализма механики, правильный выбор координат может существенно облегчить задачу решения дифференциальных уравнений движения. Если среди наших координат имелась циклическая, то мы сразу находили первый интеграл уравнений Лагранжа. Аналогичная ситуация имеется и в формализме Гамильтона. Если какая-либо координата q_s является циклической (не входит явно в функцию Гамильтона), то имеем

$$\frac{\partial H}{\partial q_s} = 0 \Rightarrow p_s = const \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial p_s} = const \Rightarrow \dot{q}_s = const \Rightarrow q_s = a_s t + b_s .$$

Т.е. эта циклическая координата оказывается линейной функцией времени. Если все координаты циклические, то задача решается полностью.

Можно сказать так: непосредственному интегрированию дифференциальных уравнений Гамильтона можно поставить в соответствие задачу нахождения таких преобразований координат, которые приводили бы к тому, что

1) система опять описывалась бы уравнениями Гамильтона с новым гамильтонианом и
2) все координаты стали бы циклическими или, чтобы новая функция Гамильтона тождественно равнялась нулю.

Определение. Преобразование координат называется <u>*каноническим преобразованием*</u>, если при этом сохраняется дифференциальная форма $\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$, соответствующая кинетической энергии в гамильтоновом формализме.

При канонических преобразованиях сохраняется канонический вид уравнений Гамильтона, значение гамильтониана, скобки Пуассона (мы их введём позже), а также все интегральные инварианты. Большее количество независимых переменных в гамильтоновом подходе определяет больший выбор канонических преобразований, чем в лагранжевом подходе. Общая теория этих преобразований принадлежит немецкому математику Карлу Якоби.

Для практического применения очень важно, чтобы при таких преобразованиях можно было взаимно однозначно выразить старые координаты через новые и наоборот.

Не всякое преобразование координат удается записать в явном виде

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t),\ P_i = P_i(q_i, p_i, t)$$

В общем (неявном) виде преобразование координат задается некоторой функцией. Её называют <u>*производящей функцией*</u>.

Необходимо стремится к тому, чтобы в новых переменных функция Гамильтона зависела только, например, от новых обобщенных переменных Q_i, а не зависела от обобщенных импульсов P_i. Тогда нам необходимо искать производящую функцию от таких координат $S(t, q_i, Q_i)$. Чтобы сохранить систему гамильтоновой она должна удовлетворять определённому условию, а именно, — быть решением <u>*уравнения Гамильтона – Якоби*</u> :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t,\ q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0\,.$$

Таким образом задача интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений заменяется интегрированием <u>уравнения в частных производных</u>

Импульсы при этом определяются через производящую функцию и задаются выражениями

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i},\ P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i}$$

После дифференцирования выразим все q_i через новые переменные $q_i(Q_i, P_i)$ и получим функцию Гамильтона в новых координатах $H(Q_i, P_i) \equiv H(Q_i)$.

При практическом применении оказывается, что нет необходимости находить все новые координаты Q_i, P_i. После нахождения производящей функции (получение полного интеграла уравнения в частных производных) мы непосредственно получаем решение для старых координат, а новые координаты играют лишь роль параметров.

<u>***Резюме.***</u> Наиболее эффективным инструментом для исследования и решения канонических уравнений являются преобразования координат фазового пространства. Вместо того чтобы пытаться непосредственно интегрировать уравнения, ищется некоторая новая система координат, которая больше подходит для решения задачи, чем

первоначальная система. Для этого процесса в нашем распоряжении имеется широкий класс канонических преобразований.

Канонические преобразования характеризуются одной-единственной функцией — производящей функцией. Поэтому задача нахождения некоторого канонического преобразования, которое бы упрощало функцию Гамильтона и делало бы уравнения непосредственно интегрируемыми, эквивалентна задаче о нахождении только одной функции. Эта функция определяется одним уравнением в частных производных — уравнением Гамильтона – Якоби. Задача решения системы канонических уравнений заменяется задачей решения этого уравнения.

4.7. Интегрируемость гамильтоновых систем

Прежде чем пытаться найти решение, например, используя канонические преобразования, хотелось бы иметь ответ на вопрос: а существует ли такое решение, является ли наша система интегрируемой? Ведь вполне возможен вариант, что задача не имеет решения в принципе. Далеко не все системы дифференциальных уравнений оказываются интегрируемыми. В некоторых важных для практики случаях есть возможность получить такой ответ.

Известно, что для того, чтобы система n дифференциальных уравнений первого порядка была интегрируема хотя бы в квадратурах (т.е. решение записывается в виде неопределенных интегралов от некоторых известных функций) необходимо существование n независимых первых интегралов. Оказывается, что в силу определенной симметрии, для гамильтоновых систем ситуация является более благоприятной. Существует *теорема Лиувилля – Арнольда* (Владимир Игоревич Арнольд, 1937 г.р., советский, российский математик, определили точные условия, при которых справедлива теорема Лиувилля и дал её строгое доказательство), которая гласит, что для гамильтоновой системы $2n$ уравнений достаточно n линейно независимых первых интегралов, но надо, чтобы они находились в инволюции. Если такие интегралы найдены, то систему называют *вполне интегрируемой системой*.

Для того, чтобы объяснить, что означает фраза «интегралы находятся в инволюции» необходимо ввести понятие нового оператора — так называемых *скобок Пуассона*.

Для двух функций $A = A(q_i, p_i, t)$ и $B = B(q_i, p_i, t)$ вводится следующая операция:

$$(A, B) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right),$$

которая и называется *скобкой Пуассона* или *коммутатором*.

Замечание. Часто для обозначения скобок Пуассона принимают квадратные скобки. Но это тогда, когда не вводят скобок Лагранжа. А для последних, обычно, используют как раз квадратные скобки.

Как видим, эта операция удивительно симметрична. Она обладает рядом свойств, которые следуют из ее определения

1. Линейность (если λ_1 и λ_2 — константы):
   $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B) = \lambda_1 (A_1, B) + \lambda_2 (A_2, B)$.
2. Кососимметричность: $(A, B) = -(B, A)$.
3. Правила Лейбница: $(A_1 A_2, B) = A_1 (A_2, B) + A_2 (A_1, B)$,
   $$\left(A(F_1, F_2, \ldots, F_n), B\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial F_i} (F_i, B).$$
4. Тождество Якоби: $((A, B), C) + ((B, C), A) + ((C, A), B) = 0$.

Очевидны и такие свойства $(A, A) = 0$, $(A, const) = 0$.

Важную роль играют *фундаментальные* скобки Пуассона:

$(q_i, p_j) = \delta_{ij}$, $\quad (q_i, q_j) = 0$, $\quad (p_i, p_j) = 0$.

С применением скобок Пуассона уравнения Гамильтона выглядят совсем как близнецы-братья:

$\dot{q}_i = (q_i, H),\ \dot{p}_i = (p_i, H)$.

А теперь вернемся к тому, что значит «инволюция». Говорят, что две функции *находятся в инволюции*, если их коммутатор тождественно равен нулю, т.е. это условие выполняется для всех точек фазового пространства.

Следует отметить, что условия теоремы Лиувилля – Арнольда, достаточно жесткие, и далеко не все гамильтоновы системы ей удовлетворяют, а значит и интегрируются. Поэтому широко применяются для нелинейных систем приближенные методы и методы возмущений, когда система не сильно отличается от некой уже проанализированной и интегрируемой системы.

Следует добавить, что теорема Лиувилля – Арнольда предписывает также определенный вид движения для имеющегося решения, а именно, фазовые траектории являются обмотками n-мерного инвариантного тора, а движение является условно-периодическим и характеризуется n частотами. На n-мерном торе можно выбрать ровно n контуров C_j, которые не могут быть стянуты в точку, ни переведены непрерывным образом друг в друга. Эти базисные контуры тора называют неприводимыми контурами.

Более того, в условиях теоремы Лиувилля – Арнольда можно выбрать такие канонически сопряженные переменные I_i и ϑ_i, называемые переменными действие–угол, что гамильтониан является функцией только действий I_i и уравнения Гамильтона в переменных действие – угол имеют вид :

$$\frac{d\vartheta_i}{dt} = \frac{\partial H(I_i)}{\partial I_i},\quad \frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial H(I_i)}{\partial \vartheta_i} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

Тогда решение выражается через эти переменные, причем имеет удивительно простой вид, а именно действие является инвариантом и зависит только от функции Гамильтона, а угол является линейной функцией времени:

$I_i = const$, $\vartheta_i = \omega_i t + const$, а частоты равны $\omega_i(I_i) \equiv \dfrac{\partial H}{\partial I_i}$.

В данном случае переменные типа «угол» как раз и являются циклическими переменными. А слова «условно-периодическое решение» обозначает, что движение представляет собой колебания системы с конечным количеством степеней свободы. Для каждой степени свободы существует своя частота.

Переменные действия определяются по формулам

$$I_j = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C_j}\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \qquad j = 1, \ldots, n$$

и представляют собой первые интегральные инварианты Пуанкаре по неприводимым контурам. Они действительно являются действиями, совпадающим по размерности с действием по Гамильтону, которое мы ввели при изучении вариационного принципа Гамильтона.

Можно показать, что функция

$$S(q_i, I_i) = \int\limits_{q_{i0}}^{q_i}\sum_{i=1}^{n} p_i(q_i, I_i)dq_i$$

является производящей функцией, реализующей каноническое преобразование $(p_i, q_i) \to (I_i, \vartheta_i)$.

Характерные черты анализа фазового пространства можно продемонстрировать на примере математического маятника — простейшей нелинейной системы с одной степенью свободы. Гамильтониан нелинейного маятника с единичной массой имеет вид

$H = 1/2p^2 - \omega_0^2 \cos q$.

Потенциальная энергия $V = -\omega_0^2 \cos q$. Её минимумы (первый находится в начале координат) соответствуют особым точкам типа центр, в максимумах ($q = \pi + 2\pi k$) имеем особые точки типа седло.

Заключение

В основе аналитической механики лежит две формы описания движения несвободных механических систем. В *лагранжевой механике* движение механической системы рассматривается в так называемом конфигурационном пространстве, составленном из независимых обобщенных координат. Размерность задачи снижается благодаря введению обобщенных координат, которые являются часто абстрактными, а не физическими. Это позволило решить ряд задач, которые не удавалось решить в рамках подхода Ньютона, например линейные (малые) колебания систем со многими степенями свободы. В *гамильтоновой механике* рассмотрение ведется в фазовом пространстве. Так называемый *гамильтонов формализм* позволяет исследовать до конца ряд задач механики, не поддающихся решению другими способами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для качественного анализа — понимания общего характера движения в сложных нелинейных механических системах, и для приближенных методов теории возмущений. Именно в гамильтонова форма механики проникла в квантовую механику, теорию относительности, статистическую физику. В отличие от лагранжева формализма, роль которого сводится лишь к выводу уравнений движения, гамильтонов подход позволяет, в принципе, получить и решение как каноническое преобразование координат, не обращаясь непосредственно к уравнениям. Поэтому гамильтонов формализм широко используется в математических задачах и различных областях теоретической физики.

Рекомендуемая литература

Основная:

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике — М. : Физматлит, 2001. — 264 с.
2. Ланцош К. Вариационные принципы механики. — М. : Мир, 1965. — 408 с.
3. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. — М. : Наука, 1988. — 368 с.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. — М. : Наука, 1989. — 472 с.
5. Парс Л.А. Аналитическая динамика. — М. : Наука, 1971. — 636 с.

Дополнительная:

6. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. 1, 2. — М.; Л. : Гостехиздат, 1950.
7. Аппель П. Теоретическая механика. Динамика системы. Аналитическая механика. Т. 2. — М. : ГИФМЛ, 1960. — С. 267.
8. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. — М.; Л. : ОНТИ 1937. — 586 с.
9. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. — СПб. : Издательство «Лань», 1999. —768 с.
10. Томилов Е.Д. Теоретическая механика. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, Ч. 2, 1970 — 317 с.
11. Вильке В.Г. Теоретическая механика. — СПб. : Изд-во “Лань”, 2003. —304 с.
12. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. — М. : Физматлит, 2002. — 392 с.
13. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике. — М. : Наука, 1977. — 352 с.