



**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Ю.И. Медведев

***КУРС ЛЕКЦИЙ
ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ***

ЧАСТЬ 2

Рекомендовано

*методическим советом Томского государственного университета
в качестве учебного пособия для специальности
“РОБОТЫ И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ”.*



Томск-2006

Рецензенты:

Доктор ф-м. наук, профессор В.А. Архипов

Профессор каф. КИБЭВС ТУСУР О.М. Раводин

Ю.И. Медведев

Курс лекций. Часть 2: Учебное пособие.—Томск:

Том. ун-т, 2006.—87с.

Часть II курса лекций по теории автоматического управления посвящена вопросам устойчивости работы линейных систем управления. На основе общей теории устойчивости А.М. Ляпунова даются основные критерии устойчивости.

Для студентов, обучающихся по программе специальности «Роботы и робототехнические системы».

© Ю. И. Медведев, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	4
ГЛАВА 1. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	5
1.1. Понятие устойчивости.....	5
1.2. Постановка задачи об устойчивости по А. М. Ляпунову	8
1.3. Об устойчивости движения по первому приближению по А. М. Ляпунову	11
1.4. Условия устойчивости линейных систем автоматического управления	13
ГЛАВА 2. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ	17
2.1. Алгебраические критерии устойчивости	17
2.1.1. Критерий Рауса	18
2.1.2. Критерий Гурвица.....	22
2.1.3. Критерий устойчивости Льенара-Шипара.....	26
2.2. Частотные критерии устойчивости	27
2.2.1. Принцип аргумента.....	27
2.2.2. Критерий Михайлова.....	29
2.2.3. Критерий Найквиста.....	39
2.2.4. Суждение об устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам	52
2.2.5. Устойчивость систем с запаздыванием и систем с иррациональными звеньями	54
2.2.6. Устойчивость нестационарных систем.	61
ГЛАВА 3. ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ. МЕТОД D- РАЗБИЕНИЯ.....	63
3.1. Понятие о D-разбиении.	64
3.2. D-разбиение по одному параметру.....	66
3.3. D-разбиение по двум параметрам.	72
3.4. Правила штриховки.	74
ЛИТЕРАТУРА	86

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс лекций по теории автоматического управления (часть II) читается студентам физико-технического факультета, специализирующихся по программе «Роботы и робототехнические системы».

Первая глава посвящена понятию устойчивости состояния равновесия и движения. Дается постановка задачи об устойчивости по А.М. Ляпунову, устойчивости по первому приближению.

Во второй главе рассматриваются наиболее употребительные критерии устойчивости, алгебраические и частотные, а также устойчивость систем с запаздыванием. Каждый из рассмотренных критериев проиллюстрирован примерами.

Третья глава посвящена построению областей устойчивости в плоскости параметров системы, метод D-разбиения.

Глава 1. Устойчивость линейных систем автоматического управления

1.1. Понятие устойчивости

Правильно спроектированная система автоматического управления должна работать устойчиво при всех различных внешних возмущениях. Система всегда подвергается действию внешних возмущающих сил, стремящихся вывести ее из заданного режима. Заданным режимом может быть, например, состояние равновесия, при котором обобщенные координаты системы имеют заданные постоянные значения. Если система устойчива, она противостоит этим внешним силам и будучи выведенной из состояния равновесия, с определенной точностью возвращается к нему.

Если система неустойчива, она не возвращается в состояние равновесия, из которого ее вывели, а удаляется от него или совершает вокруг него недопустимо большие колебания.

Наглядно устойчивость равновесия представлена на рис.1.1, где изображен шар, расположенный на различного вида поверхностях. На рис.1.1а шар находится в некотором углублении. При всяком отклонении его из состояния равновесия некоей внешней силой, которая затем прекратила действовать, возникает сила, стремящаяся вернуть шар в исходное состояние. Это положение равновесия называется *устойчивым*. Обычно поверхность шара и углубления не идеально гладкие и в процессе движения шара возникают силы трения, так что шар, возвращаясь к состоянию равновесия, может остановиться где-нибудь, не доходя до него. Очевидно, в этом случае нет основания считать систему неустойчивой.

На рис.1.1б шар лежит на выпуклой поверхности и любое отклонение его от положения равновесия вызовет силу, которая будет стремиться еще

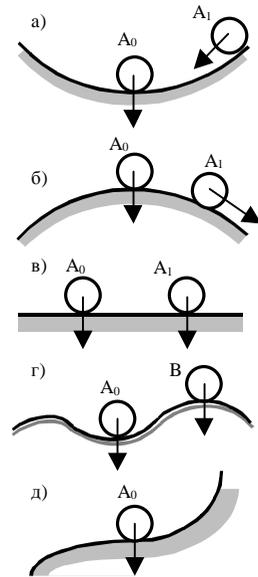


Рис.1.1.

дальше увести его от положения равновесия. Это *неустойчивое* положение.

Рис. 1.1в соответствует безразличному равновесию. На рис.1.1г состояние равновесия устойчиво до тех пор, пока отклонения не вышли за границу, определяемую точкой **В**. Выйдя за эту границу, шар уже не вернется в точку A_0 , либо все время от нее удаляясь, либо до нового состояния равновесия в зависимости от формы поверхности. В этом случае называют точку A_0 *устойчивой в малом* (т.е. при малых отклонениях от равновесия), и *неустойчивой в большом*. На рис.1.1д изображено еще одно принципиально возможное для нелинейных систем состояние равновесия, которое называется *полустойчивым*.

В общем случае, рассматривая нелинейные системы, вводят понятия устойчивости «в малом», «в большом» и «в целом». Система устойчива «в малом», если утверждается лишь факт наличия области устойчивости, но не определяются каким-либо образом ее границы. Систему называют устойчивой «в большом», когда определены границы области начальных отклонений, при которых система возвращается в исходное состояние, и что реальные начальные отклонения принадлежат этой области.

В том случае, когда система возвращается в исходное состояние при любых начальных отклонениях, систему называют устойчивой «в целом». Устойчивость «в целом» для определенного класса нелинейностей называют «абсолютной устойчивостью». Например, случай изображенный на рис.1.1а соответствует устойчивости «в целом», а случай на рис.1.1г может соответствовать либо устойчивости «в большом», либо устойчивости «в малом». Очевидно, что система устойчивая «в целом» будет устойчива «в большом» и «в малом». Система устойчивая «в большом» будет устойчива и «в малом».

Таким образом, для того чтобы дать определение устойчивости равновесия, вводят понятие о невозмущенном состоянии равновесия, соответствующем состоянию покоя, и возмущенном состоянии, соответствующем точке, в которую внешняя сила привела систему, и затем прекратила свое действие. Система будет устойчивой, если из возмущенного состояния она перейдет в некоторую конечную заданную область, окружающую невозмущенное состояние равновесия.

Кроме устойчивости равновесия существует и устойчивость движения, когда в качестве невозмущенного состояния рассматривают

не положение равновесия системы, а ее движение по некоторой наперед заданной траектории.

Пусть заданное движение системы при отсутствии внешних возмущений определяется некоторым законом изменения независимых координат $y_1^*(t), y_2^*(t), \mathbf{K}, y_n^*(t)$. По аналогии со случаем положения равновесия, заданное движение будем называть невозмущенным движением. Оно определяется решением уравнений движения (например, заданный закон движения ракеты в пространстве). Внешние возмущения, действующие на систему, вызовут отклонения действительного движения от заданного. Действительное движение системы называют возмущенным движением. Если действительное движение системы определяется независимыми координатами $y_1(t), y_2(t), \mathbf{K}, y_n(t)$, то в общем случае

$$y_1(t) \neq y_1^*(t), \mathbf{K}, y_n(t) \neq y_n^*(t).$$

Заданное невозмущенное движение будет устойчивым, если после приложения внешних сил (возмущений), которые затем снимают, возмущенное движение по истечении некоторого времени войдет в некоторую заданную область $|y_i(t) - y_i^*(t)| < e_i$, где $e_i = const$ – наперед заданные величины, $i = 1, 2, \mathbf{K}, n$. Например, предположим, что невозмущенное движение проходит по траектории **A**, а возмущенное движение – по траектории **B**, (рис.1.2). Выберем на этих

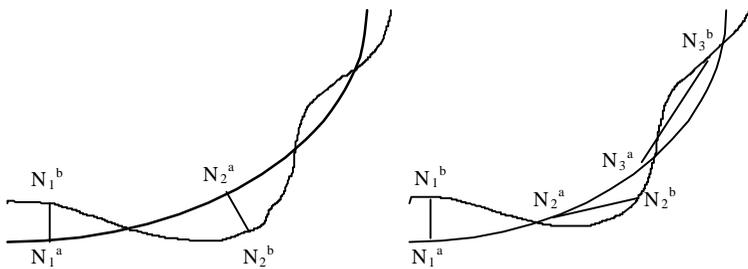


Рис.1.2.

траекториях, две произвольные точки \mathbf{N}^a и \mathbf{N}^b , соответствующие одному и тому же моменту времени t . При устойчивом движении траектория **B** должна быть близка к траектории **A**. Однако близость траекторий является необходимым, но не достаточным условием

устойчивости, поскольку возможна такая ситуация, когда расстояние между точками \mathbf{N}^a и \mathbf{N}^b , отвечающим одному и тому же моменту времени, может возрасти, как показано на рисунке, даже для близких траекторий.

1.2. Постановка задачи об устойчивости по А. М. Ляпунову

Впервые строгое определение устойчивости было дано русским ученым А.М.Ляпуновым в 1892г. в работе «Общая задача об устойчивости движения». Отсутствие такого определения часто приводило к недоразумениям, когда движение, устойчивое в одном смысле, оказывалось неустойчивым при другом понимании этих слов, и наоборот. Определение устойчивости А.М. Ляпунова оказалось настолько удачным и наилучшим образом удовлетворяющим многим техническим задачам, что оно в настоящее время принято как основное.

Пусть движение системы автоматического управления описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме.

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, y_2, \mathbf{K}, y_n). \quad (1.1)$$

Здесь t – независимая переменная, (время), $y_1, y_2, \mathbf{K}, y_n$ – искомые функции, характеризующие состояние системы управления (обобщенные координаты), Y_i – известные функции переменных y_i и времени t , удовлетворяющие условиям существования и единственности решения.

Исходное состояние системы при $t = t_0$ определяется однозначно начальными значениями переменных, которые обозначим

$$y_i(t_0) = y_{i0}; \quad (y_{10}, y_{20}, \mathbf{K}, y_{n0}).$$

Каждой совокупности начальных значений соответствует единственное решение (1) для всех $t > t_0$

$$y_i = y_i(y_{10}, y_{20}, \mathbf{K}, y_{n0}, t). \quad (1.2)$$

Это решение описывает вполне определенное движение системы, определяемое исходным состоянием (начальными условиями). Именно это вполне определенное решение системы называют *не-*

возмущенным движением и оно подлежит исследованию на устойчивость. Важно отметить, что имеет смысл говорить только об устойчивости определенного решения, а не всех решений уравнения (1.1). Невозмущенное движение системы может быть как установившимся, так и неустановившимся. Допустим, что в качестве невозмущенного движения выбрано такое, которое описывается заданными функциями времени

$$y_1 = y_1^*(t), \quad y_2 = y_2^*(t), \quad \mathbf{K}, \quad y_n = y_n^*(t), \quad (1.3)$$

и что эти функции $y_i^*(t)$ являются частным решением дифференциальных уравнений (1.1), т.е.

$$\frac{dy_i^*(t)}{dt} = Y_i(y_1^*, y_2^*, \mathbf{K}, y_n^*, t), \quad (1.4)$$

удовлетворяющим начальным условиям при $t = t_0$,

$$y_1 = y_1^*(t_0), \quad y_2 = y_2^*(t_0), \quad \mathbf{K}, \quad y_n = y_n^*(t_0). \quad (1.5)$$

В частном случае, *когда* параметры системы не изменяются со временем, и функции Y_i не зависят явно от времени, движения (1.3) являются установившимися. Им отвечают решения

$$y_i^* = const, \quad (1.6)$$

служащие корнями уравнений

$$Y_i(y_1, y_2, \mathbf{K}, y_n) = 0. \quad (1.7)$$

Придадим начальным значениям переменных в (1.3) $y_1, y_2, \mathbf{K}, y_n$ небольшие по модулю приращения, $e_1, e_2, \mathbf{K}, e_n$ так, что при $t = t_0$

$$y_1 = y_1^*(t_0) + e_1, \quad y_2 = y_2^*(t_0) + e_2, \quad \mathbf{K}, \quad y_n = y_n^*(t_0) + e_n \quad (1.8)$$

Движение системы, отвечающее измененным начальным условиям (1.8), называют *возмущенным движением*.

Введем новые переменные

$$x_i = y_i - y_i^*, \quad (1.9)$$

равные разности переменных между возмущенным и невозмущенным движением, т.е. *отклонения или вариации* величин y_i . Если все отклонения равны нулю, то возмущенное движение будет совпадать с невозмущенным.

Пусть при $t = t_0$ переменные x_i принимают какие-либо начальные значения x_{i0} , из которых хотя бы одно не равно нулю

$$x_i = x_{i0} = e_i . \quad (1.10)$$

Начальные значения отклонений (1.10) называются *возмущениями*.

А.М.Ляпуновым было дано следующее определение устойчивости. Невозмущенное движение называют устойчивым по отношению к переменным x_i , если при всяком произвольно взятом положительном числе e_i , как бы мало оно ни было, можно выбрать другое такое положительное число $d(e_i)$ что при всяких возмущениях x_{i0} удовлетворяющих условию

$$\sum_i^n x_{i0}^2 \leq d , \quad (1.11)$$

и при любом $t \geq t_0$ будет выполняться неравенство

$$\sum_i^n x^2(t) < e , \quad (1.12)$$

в противном случае движение неустойчиво.

Этому определению устойчивости по А.М.Ляпунову можно дать следующую геометрическую интерпретацию в трехмерном пространстве ($i=3$), (рис.1.3). Совокупность отклонений x_i определяет в пространстве точку M , (ее называют изображающей точкой). В возмущенном движении при изменении величин x_i изображающая точка M будет описывать некоторую траекторию.

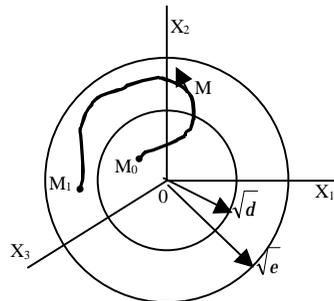


Рис.1.3.

Невозмущенному движению $x_i=0$ отвечает неподвижная точка – начало координат. Построим в трехмерном пространстве координат две сферы: сферу

$$e = \sum_i^3 x_i^2 \text{ с радиусом } \sqrt{e} \text{ и сферу } d = \sum_i^3 x_{0i}^2 \text{ с радиусом } \sqrt{d} .$$

Выберем радиус сферы произвольно малым. Если невозмущенное движение устойчиво, то для этой сферы должна найтись другая сфера d , обладающая следующими свойствами: изображающая точка M , начав свое движение из любой точки M_0 , лежащей внутри или на поверхности сферы d , при своем движении остается всегда внутри сферы e , никогда не достигая ее поверхности.

Если же невозмущенное движение неустойчиво, то траектория изображающей точки M с течением времени пересечет сферу e изнутри, или попадет на ее поверхность при сколь угодно близком положении точки M_0 к началу координат.

Практически, если невозмущенное движение устойчиво, и при этом возмущенное движение при достаточно малых начальных возмущениях будет стремиться к невозмущенному движению, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad (1.13)$$

то такое невозмущенное движение называют *асимптотически устойчивым*. При асимптотической устойчивости изображающая точка с течением времени неограниченно стремится к началу координат, не выходя из сферы e .

Отметим главные особенности определения устойчивости по А.М.Ляпунову.

1. Возмущения предполагаются малыми.
2. Возмущения налагаются только на начальные условия, т.е. возмущенное движение происходит при тех же силовых воздействиях, что и невозмущенное движение.
3. Устойчивость исследуется на бесконечно большом промежутке времени.

1.3. Об устойчивости движения по первому приближению по А. М. Ляпунову

Если известно общее решение дифференциального уравнения (1.1), можно значениям переменных $y_i(t)$ в возмущенном движении сопоставить вариации $x_i = y_i(t) - y_i^*(t)$, и путем их исследования решить вопрос об устойчивости невозмущенного движения $y^*(t)$. Поступим следующим образом. Чтобы вывести уравнения возмущенного движения найдем переменные

$$y_i(t) = y_i^*(t) + x_i(t)$$

и подставим эти значения в дифференциальное уравнение (1.1). Тогда

$$\frac{dy_i^*(t)}{dt} + \frac{dx_i(t)}{dt} = Y_i(y_i^* + x_i, y_2^* + x_2 + \mathbf{L} + y_n^* + x_n, t).$$

Если правые части этих уравнений допускают разложение в степенные ряды Тейлора, то после разложения по степеням x_i получим

$$\begin{aligned} \frac{dy_i^*(t)}{dt} + \frac{dx_i(t)}{dt} &= Y_i(y_1^*, y_2^*, \mathbf{K}, y_n^*, t) + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_i} \right)_0 x_i + \mathbf{L} \\ &+ \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_n} \right)_0 x_n + R_i(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $R_i(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n)$ – члены разложения значений от отклонений x_i в степени выше первой. Учитывая (1.4), будем иметь

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \mathbf{L} + a_{in}x_n + R_i(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n). \quad (1.15)$$

В этих уравнениях коэффициенты $a_{ik} = \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_k} \right)_{x_k=0}$ в общем случае

являются функциями времени t , но могут быть постоянными. В дальнейшем, если не будет оговорено, будем считать их постоянными. Уравнения (1.15) называют дифференциальными уравнениями возмущенного движения. Если отклонения x_i достаточно малы, то пренебрегая $R_i(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n)$ получим линеаризованные уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \mathbf{L} + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \mathbf{K}, n, \quad (1.16)$$

которые называются *уравнениями первого приближения*.

Во многих случаях на основании уравнений первого приближения можно дать неверное заключение об устойчивости движения.

Для исследования устойчивости принципиально важны следующие теоремы А. М. Ляпунова, которые мы приводим без доказательств.

Рассмотрим характеристическое уравнение системы (1.16)

$$\Delta(I) = \begin{vmatrix} a_{11} - I & a_{12} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - I & \mathbf{K} & a_{2n} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ a_{n1} & a_{n2} & \mathbf{K} & a_{nn} - I \end{vmatrix} = 0 \quad (1.17)$$

Из (1.17) можно найти его корни I_i , где $i=1, 2, \dots, n$, которые в общем случае имеют вид $I_i = a_i \pm jw_i$.

Теорема 1.

Если вещественные части всех корней x_i характеристического уравнения первого приближения отрицательные, то возмущенное движение асимптотически устойчиво.

Теорема 2.

Если среди корней I_i характеристического уравнения первого приближения имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то возмущенное движение неустойчиво.

Если среди корней характеристического уравнения имеется один или несколько нулевых корней, а вещественные части остальных корней отрицательны, то этот случай называют критическим. Как показал Ляпунов, в критическом случае устойчивость движения не может быть оценена по первому приближению.

Система регулирования в критическом случае называется *нейтрально устойчивой системой*, и определение её устойчивости требует специального исследования нелинейных членов разложения, т.е. от вида нелинейной функции $R_i(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n)$.

Теоремы Ляпунова имеют весьма важное значение, так как они позволяют судить об устойчивости нелинейных систем по их линеаризованным уравнениям, уравнениям первого приближения.

1.4. Условия устойчивости линейных систем автоматического управления

Дифференциальное уравнение линейной системы автоматического управления, представленное в виде одного уравнения n -го порядка и записанное для регулируемой выходной величины $x(t)$ при наличии управляющего воздействия $g(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \mathbf{L} + a_n)x(t) = \\ & = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \mathbf{L} + b_m)g(t), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $a_0, a_1, \mathbf{K}, a_n$ и $b_0, b_1, \mathbf{K}, b_m$ – постоянные коэффициенты.

Изменение регулируемой величины $x(t)$ при произвольном внешнем воздействии $g(t)$ представляет собой решение уравнения (1.18)

$$x(t) = x_{\text{в}}(t) + x_{\text{св}}(t). \quad (1.19)$$

Здесь первое слагаемое $x_{\text{в}}(t)$ – вынужденная составляющая, которая имеет тот же характер, что и правая часть уравнения (1.18). Она определена как частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} & (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \mathbf{L} + a_n)x_{\text{в}}(t) = \\ & = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \mathbf{L} + b_m)g(t). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Второе слагаемое $x_{\text{св}}(t)$ – свободная или переходная составляющая, которая определяется общим решением однородного дифференциального уравнения (1.18) без правой части

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \mathbf{L} + a_n)x_{\text{св}}(t) = 0 \quad (1.21)$$

За невозмущенное движение системы принимают вынужденную составляющую $x_{\text{в}}(t)$. Тогда возмущенным движением будет любое возможное в системе изменение регулируемой величины $x(t)$, а отклонением или вариацией будет свободная составляющая $x_{\text{св}}(t) = x(t) - x_{\text{в}}(t)$.

Возмущениями по А. М. Ляпунову являются начальные значения $x_{\text{св}}$, которые возникли в момент $t = t_0$ под действием внезапно появившихся дополнительных внешних сил, т.е. начальные значения $x_{\text{св}0}$. Дифференциальными уравнениями возмущенного движения первого приближения в данном случае будут уравнения (1.21).

В соответствии с определением устойчивости система будет асимптотически устойчивой, если с течением времени при $t \rightarrow \infty$ свободная составляющая будет стремиться к нулю $x_{\text{св}}(t) \rightarrow 0$. Чтобы найти эту составляющую, необходимо решить дифференциальное уравнение (1.21). Решения находят как $x_{\text{св}}(t) = Ce^{lt}$.

Дифференцируя это выражение n раз и подставляя в (1.21), после сокращения на общий множитель получаем

$$a_0 I^n + a_1 I^{n-1} + \mathbf{L} + a_n = 0 \quad (1.22)$$

Полученное алгебраическое уравнение носит название *характеристического уравнения*. Его n корней определяют характер переходного процесса в системе. Нетрудно заметить, что по своему виду левая часть уравнения (1.22) совпадает с дифференциальным оператором при выходной величине в уравнении (1.18). Поэтому характеристическое уравнение получают обычно приравнивая к нулю дифференциальный оператор при выходной величине в исходном дифференциальном уравнении (1.18), т.е.

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \mathbf{L} + a_n = 0, \quad (1.23)$$

заменив оператор дифференцирования p на некоторое число I .

Корни характеристического уравнения обыкновенного линейного уравнения с постоянными коэффициентами могут быть вещественными, комплексными попарно сопряженными, мнимыми попарно сопряженными, нулевыми. В общем случае

$$I_i = a_i \pm jw_i.$$

Если корни разные, то их называют простыми. Если среди корней есть одинаковые, то их называют кратными. Корни с отрицательными вещественными частями принято называть *левыми*, поскольку они в комплексной плоскости корней расположены слева от мнимой оси, а корни с положительными вещественными частями – *правыми* корнями.

Таким образом, условие устойчивости линейной системы формулируется следующим образом: *для того чтобы линейная система была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (1.22) были левыми.*

В устойчивой линейной системе переходной процесс со временем затухает и решение дифференциального уравнения стремится к частному решению.

Указанное условие устойчивости можно пояснить, рассматривая общий случай решения однородного уравнения. При наличии кратных корней имеем

$$x_{\text{св}}(t) = \sum_k A_k e^{a_k t} + \sum_l B_l e^{(a_l + jw_l)t} + \sum_l \bar{B}_l e^{(a_l - jw_l)t} + \sum_i (C_{i0} + C_{i1}t + \mathbf{L} + C_{ir}t^r) e^{a_i t}. \quad (1.24)$$

Первая группа слагаемых в (1.24), соответствующая вещественным и различным корням уравнения стремится с течением времени к нулю, если все a_k отрицательные, и стремится к бесконечности, если хотя бы одно a_k положительно. Значит для устойчивости необходимо $a_k < 0$. Вторая и третья группы слагаемых состоят из произведений ограниченных по модулю величин B_l и $e^{j\omega_l t}$ на величину $e^{a_l t}$, следовательно при $a_l < 0$ эти члены с течением времени колебательным образом стремятся к нулю и бесконечно возрастают при $a_l > 0$. Поэтому для устойчивости и для этих групп слагаемых необходимо иметь $a_l < 0$.

Последняя группа слагаемых соответствует кратным корням I_r . Если I_r имеет отрицательную вещественную часть, множитель $e^{I_r t}$ с течением времени убывает, если положительную – беспредельно возрастает. Стало быть, необходимо, чтобы $a_r < 0$. Но при этом множитель в скобках неограниченно растет. Однако известно, что e^{-at} быстрее стремится к нулю, чем возрастает Ct^r , поэтому при $a_r < 0$ условие устойчивости будет выполнено.

При $a = 0$ будем иметь нейтральную систему. Таким образом, в самом общем случае для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения системы были левыми.

Вычисление корней весьма просто лишь для характеристического уравнения первой и второй степени. Существуют выражения для нахождения корней третьей и четвертой степени и более высоких степеней. Однако здесь не обойтись без ЭВМ. Поэтому, важное значение принимают правила, которые позволяют определить устойчивость системы без вычисления корней. Эти правила называют *критериями устойчивости*. С помощью них возможно не только установить устойчива система или нет, но и проанализировать, как влияют на устойчивость те или иные параметры и структурные изменения в системе.

Критерии устойчивости разделяются на *алгебраические* и *частотные*. Каждый из них имеет свои достоинства и недостатки. Целесообразный выбор критерия при решении конкретной задачи позволяет провести анализ устойчивости наиболее простым путем.

Глава 2. Критерии устойчивости

2.1. Алгебраические критерии устойчивости

Алгебраические критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости системы по коэффициентам характеристического уравнения

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.1)$$

Сразу же заметим, что *необходимым условием устойчивости* системы любого порядка является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения (2.1)

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_n > 0. \quad (2.2)$$

Это следует из теоремы Безу. Действительно, уравнение (2.1) можно представить в виде произведения сомножителей, содержащих корни p_1, p_2, \dots, p_n

$$a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = 0. \quad (2.3)$$

Если все корни характеристического уравнения будут отрицательные, (что требуется по условию устойчивости системы), то все множители выражения (2.3) будут иметь вид:

$$a_0 (p + |a_1|)(p + |a_2|) \dots (p + |a_n|) = 0, \quad (2.4)$$

где $p_i = -|a_i|$ – значения корней.

Производя перемножение в (2.4), получим (2.3), в котором все коэффициенты будут определяться положительными членами $|a_i|$ т.е. будут положительны.

Если характеристическое уравнение (2.1) имеет комплексные корни с отрицательными вещественными частями, то оно может быть представлено в виде

$$a_0 (p + |a_1|)(p + |a_2| - jw_2)(p + |a_2| + jw_2) \dots (p + |a_n|) = 0$$

или

$$a_0 (p + |a_1|)[(p + |a_2|)^2 + w_2^2] \dots (p + |a_n|) = 0 \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) также приводится к виду уравнения (2.1) с положительными коэффициентами.

Для систем первого и второго порядков необходимое условие устойчивости является и достаточным условием, поскольку в этом случае при положительных коэффициентах характеристического уравнения все его корни являются левыми. Однако для систем третьего и высших порядков положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым условием устойчивости, но недостаточным. В этом случае все вещественные корни характеристического уравнения будут левые, комплексные же корни могут быть и правыми. Например, многочлен

$$P(z) = z^3 + z^2 + 4z + 30$$

имеет корни $z_1 = -3$, $z_{2,3} = 1 \pm 3j$.

Алгебраические критерии устойчивости основаны на анализе непосредственно характеристического уравнения системы. Такими критериями, например, являются широко известные критерии Рауса и Гурвица. Эти критерии устойчивости позволяют по коэффициентам характеристического уравнения (2.1) без вычисления его корней сделать суждение об устойчивости системы.

2.1.1. Критерий Рауса

Этот критерий устойчивости был предложен в 1877 г. английским математиком Э. Раусом в виде некоторого правила (алгоритма), которое наиболее просто поясняется табл.2.1.

В первой строке этой таблицы записывают в порядке возрастания индексов коэффициенты характеристического уравнения (2.1), имеющие четный индекс: $a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$; во второй строке – коэффициенты с нечетным индексом: $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$.

Любой из остальных коэффициентов таблицы определяют как

$$c_{k,i} = c_{k+1,i-2} - r_i c_{k+1,i-1}, \quad (2.6)$$

где

$$r_i = c_{1,i-2} / c_{1,i-1}. \quad (2.7)$$

В (2.6) и (2.7) k – индекс, означающий номер столбца таблицы; i – индекс, означающий номер строки.

Число строк таблиц Рауса равно степени характеристического уравнения плюс единица, $(n+1)$.

Таблица

Коэффициент i	Строка (i)	Столбец			
		1	2	2,1 3	4
–	1	$a_0=C_{11}$	$a_2=C_{21}$	$a_4=C_{31}$...
–	2	$a_1=C_{12}$	$a_3=C_{22}$	$a_5=C_{32}$...
$r_3=a_0/a_1$	3	$c_{13}=a_2-f_3a_3$	$c_{23}=a_4-f_3a_5$	$c_{33}=a_6-f_3a_7$...
$r_4=a_1/c_{13}$	4	$c_{14}=a_3-f_4c_{23}$	$c_{24}=a_5-f_4c_{33}$	$c_{34}=a_7-f_4c_{43}$...
$r_5=c_{13}/c_{14}$	5	$c_{15}=c_{23}-f_5c_{24}$	$c_{25}=c_{33}-f_5c_{34}$	$c_{35}=c_{43}-f_5c_{44}$...
...
$r_j=c_{1,1+2}/c_{1,1}$	i	$c_{1,j}=c_{2,j+2}-f_jc_{2,j+1}$	$c_{2,j}=c_{3,j+2}-f_jc_{3,j+1}$	$c_{3,j}=c_{4,j+2}-f_jc_{4,j+1}$...
...

Можно заметить, что каждый из коэффициентов равен определителю, у которого 1-й столбец составлен из двух элементов, записанных в следующем за искомым коэффициентом столбце таблицы на двух расположенных выше строках. 1-й элемент 2-го столбца определителя образован из частного от деления двух элементов, расположенных в столбце 1 таблицы на двух вышележащих строках. 2-ой элемент 2-го столбца определителя равен единице. Так

$$c_{13} = \begin{vmatrix} a_2 & \frac{a_0}{a_1} \\ a_3 & 1 \end{vmatrix} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3. \quad (2.8)$$

Вообще

$$c_{ki} = \begin{vmatrix} c_{k+1,i-2} & r_{i-3} \\ c_{k+1,i-1} & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.9)$$

где
$$r_{i-2} = \frac{c_{i,i-2}}{c_{i,i-1}}.$$

После заполнения таблицы Рауса по ней делают выводы об устойчивости системы. Условие устойчивости формулируется так: *для того, чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса имели один и тот же знак, т.е. при $a_0 > 0$ были положительными.*

Если не все коэффициенты первого столбца положительны, то система неустойчива, при этом число правых корней характеристического уравнения равно числу перемен знака в первом столбце таблицы Рауса.

Пример 2.1

Пусть характеристическое уравнение системы

$$D(p) = p^6 + 6p^5 + 21p^4 + 44p^3 + 62p^2 + 52p + 100 = 0$$

Для определения устойчивости системы по коэффициентам этого уравнения составим таблицу Рауса (Табл.2.2).

Имеются две перемены знака коэффициентов первого столбца, следовательно, система неустойчива, а характеристическое уравнение имеет два правых корня.

Таблица

Коэффициент i	Строка (i)	Столбец k			
		1	2	$\begin{matrix} 2,2 \\ 3 \end{matrix}$	4
r	1	$a_0=1$	$a_2=21$	$a_4=62$	$a_6=100$
r	2	$a_1=6$	$a_3=44$	$a_5=52$	$a_7=0$
$r_3=a_0/a_1=1/6=0,167$	3	$c_{13}=21-0,167*44=$ $=13,65$	$c_{23}=62-0,167*52=$ $=53,3$	$c_{32}=100-0,167*0=$ $=100$	0
$r_4=a_1/c_{13}=6/13,65=$ $=0,44$	4	$c_{14}=44-0,44*53,3=$ $=20,6$	$c_{24}=52-0,44*100=$ $=8$	$c_{34}=0-0,44*0=0$	0
$r_5=c_{14}/c_{14}=13,65/20,6$ $=0,66$	5	$c_{15}=53,3-0,66*8=48$	$c_{25}=100-0,66*0=$ $=100$	0	0
$r_6=c_{14}/c_{15}=20,6/48=$ $=0,43$	6	$c_{16}=8-0,43*100=-35$	$c_{26}=0-0,43*0=0$	0	0
$r_7=c_{16}/c_{16}=48/-35=$ $=-1,37$	7	$c_{17}=100-(-1,37)*0=$ $=100$	0	0	0

Остановимся на некоторых следствиях из критерия Рауса.

1. Обращение в нуль одного из коэффициентов характеристического уравнения (за исключением коэффициента при старшем члене) свидетельствует либо о неустойчивости системы, либо о том, что она находится на границе устойчивости. Это важное следствие представляет собой необходимое и достаточное условие устойчивости для уравнений 1-й и 2-й степени и необходимое, но недостаточное условие для уравнений больших степеней. Простота этого условия позволяет сразу оценить целесообразность дальнейшего исследования устойчивости системы.
2. Число отрицательных коэффициентов c_{1i} столбца 1 таблицы Рауса равно числу корней с положительной вещественной частью.
3. Обращение в нуль a_n приводит к появлению нулевого корня.
4. Обращение в нуль какого-либо промежуточного коэффициента свидетельствует о появлении пары чисто мнимых корней.

Критерий Рауса позволяет очень быстро провести анализ устойчивости системы. Он наиболее экономичен по объему вычислительной работы, а его алгоритм удобен для реализации на ЭВМ. Поэтому алгоритм Рауса широко применяется при исследовании влияния на устойчивость либо коэффициентов уравнения, либо параметров, не очень сложным образом входящих в эти коэффициенты.

2.1.2. Критерий Гурвица

В 1895 г. немецким математиком А. Гурвицем был разработан критерий устойчивости в форме определителей, составляемых из коэффициентов характеристического уравнения системы. В литературе его часто называют критерием Рауса-Гурвица на том основании, что из критерия Рауса легко получить критерий Гурвица.

Из коэффициентов характеристического уравнения (2.1) строят сначала главный определитель Гурвица по следующему правилу: по главной диагонали определителя слева направо выписываются все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_n в порядке возрастания индексов. Столбцы вверх от главной диагонали

дополняют коэффициентами характеристического уравнения с последовательно возрастающими индексами, а столбцы вниз – коэффициентами с последовательно убывающими индексами. На место коэффициентов с индексами больше n (n – порядок характеристического уравнения) и меньше нуля проставляют нули.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

Можно поступить и по другому, но результат будет тем же самым: в верхней строке определителя по порядку выписываются коэффициенты с нечетными индексами, начиная с a_1 ; взамен недостающих элементов ставятся нули. Вниз от элементов 1-ой строки столбцы определителя заполняются коэффициентами с индексами, убывающими каждый раз на единицу; ниже a_0 пишутся нули,

Выделяя в главном определителе диагональные миноры, получаем определители Гурвица низшего порядка. Номер определителя Гурвица определяется номером коэффициента по диагонали, для которого составляется данный определитель.

Критерий устойчивости Гурвица состоит в следующем: *для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица имели знаки, одинаковые со знаком первого коэффициента характеристического уравнения a_0 , т. е. при $a_0 > 0$ были положительными.*

Таким образом, при $a_0 > 0$ для устойчивости системы необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0 \quad .$$

Раскрывая определители Гурвица, получим следующие условия устойчивости:

1. для уравнения первого порядка ($n=1$), т.е. $a_0 p + a_1 = 0$, условия устойчивости $a_0 > 0$, $a_1 > 0$;
2. для уравнения второго порядка ($n=2$), т.е. $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$, условия устойчивости $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$;
3. для уравнений третьего порядка ($n=3$), т.е.
 $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$, условия устойчивости
 $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$;
4. для уравнения четвертого порядка ($n=4$), т.е.
 $a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0$, условия устойчивости
 $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$, $a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0$

Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости для систем первого и второго порядков является положительность коэффициентов характеристического уравнения. Для уравнений третьего и четвертого порядков, кроме положительности коэффициентов, необходимо соблюдение дополнительных неравенств. Для более высоких степеней характеристического уравнения число таких дополнительных неравенств возрастает, процесс раскрытия определителя становится довольно трудоемким делом. Поэтому критерий устойчивости Гурвица рекомендуется применять при $n \leq 4$. При $n \geq 5$ целесообразно применять критерий Рауса или критерий устойчивости Ляпунова-Шипара, либо использовать ЭВМ.

Обратим внимание, что в последнем столбце главного определителя Гурвица (2.10) отличен от нуля только один коэффициент a_n , поэтому

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \quad (2.11)$$

Отсюда видно, что при $a_n > 0$ для проверки устойчивости системы достаточно найти только определители Гурвица от Δ_1 до Δ_{n-1} . Если все определители Гурвица низшего порядка положительны, то система находится на границе устойчивости, когда главный определитель равен нулю $\Delta_n = 0$. Это равенство выполняется в двух случаях: когда $a_n = 0$ или $\Delta_{n-1} = 0$. В первом случае система находится на границе аperiодической устойчивости (один из корней характеристического уравнения равен нулю); во втором случае – на границе колебательной устойчивости (два комплексно-сопряженных корня находятся на мнимой оси).

Используя критерий Гурвица, можно при заданных параметрах системы принять за неизвестный какой-либо из них и определить его критическое значение, при котором система будет находиться на границе устойчивости.

Пример 2.2

Пусть характеристическое уравнение системы

$$D(p) = (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K = 0,$$

где K – коэффициент усиления разомкнутой системы; T_1, T_2, T_3 – постоянные времени отдельных динамических звеньев системы. Найдем, пользуясь критерием Гурвица, предельное значение коэффициента усиления разомкнутой системы $K_{кр}$ как функцию постоянных времени.

Перепишем характеристическое уравнение в виде

$$\begin{aligned} D(p) &= T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + 1 + K = \\ &= a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= T_1 T_2 T_3, \quad a_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3, \quad a_2 = T_1 + T_2 + T_3, \\ a_3 &= 1 + K. \end{aligned}$$

Согласно критерию Гурвица система третьего порядка будет устойчива, если выполняются следующие условия: все коэффициенты положительные, в нашем случае это выполнено, и должно выполняться следующее неравенство

$$(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) > T_1 T_2 T_3 (1 + K).$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$K < (1 + t_2 + t_3) \left(1 + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) - 1,$$

где $t_2 = T_2 / T_1$, $t_3 = T_2 / T_3$.

Предельное критическое значение коэффициента усиления, при котором система будет находиться на границе устойчивости, равно

$$K_{кр} = (1 + t_2 + t_3) \left(1 + 1/t_2 + 1/t_3 \right) - 1.$$

Из последнего выражения следует, что предельный коэффициент усиления системы определяется не абсолютной величиной постоянных времени, а их относительными значениями. Чем более резко отличаются постоянные времени друг от друга, тем больше $K_{кр}$.

В частном случае, когда $t_2 = t_3 = 1$, т.е. $T_1 = T_2 = T_3$, значение $K_{кр}$ минимально и равно всего лишь $K_{кр} = 8$.

2.1.3. Критерий устойчивости Льенара-Шипара

Для систем управления, имеющих порядок характеристического уравнения $n \geq 5$, применима одна из модификаций критерия устойчивости Гурвица, предложенная в 1914г. П. Льенаром и Р. Шипаром.

Было доказано, что в том случае, когда все коэффициенты характеристического уравнения положительны, из того факта, что положительны все определители $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5 \dots$ с нечетными индексами, следует и положительность определителей Гурвица $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6 \dots$ с четными индексами, и наоборот.

Таким образом, для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \dots, \quad a_n > 0$$

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_5 > 0,$$

или

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \dots, \quad a_n > 0$$

$$\Delta_2 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \Delta_6 > 0.$$

Такая формулировка критерия устойчивости, называемая *критерием устойчивости Льенара-Шипара*, требует раскрытия меньшего числа определителей и поэтому удобна при исследовании устойчивости систем управления высокого порядка.

2.2. Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости дают возможность судить об устойчивости систем автоматического управления по виду их частотных характеристик. Эти критерии являются графоаналитическими, имеют простую геометрическую интерпретацию и наглядность, позволяют сравнительно легко исследовать устойчивость систем высокого порядка и поэтому получили широкое распространение. В основе частотных критериев устойчивости лежит следствие из известного в теории функций комплексного переменного принципа аргумента, на котором мы кратко остановимся.

2.2.1. Принцип аргумента

Пусть дан некоторый полином n -ой степени, который в соответствии с теоремой Безу можно представить в виде

$$D(p) = a_0(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n),$$

где $p_i = a_i + jw_i$ – корни уравнения $D(p) = 0$.

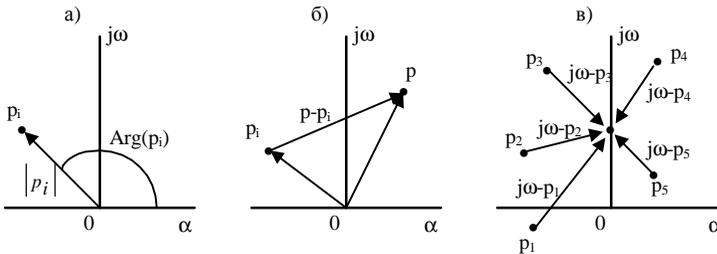


Рис. 2.1.

На комплексной плоскости p каждый корень геометрически может быть изображен вектором, проведенным из начала координат к точке p_i (рис.2.1.а). Длина этого вектора равна модулю комплексного числа $|p_i|$ а угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси (против часовой стрелки), – аргументу или фазе комплексного числа p_i , т.е. $Arg p_i$.

Величины $(p - p_i)$ геометрически изображаются векторами, проведенными из точки p_i к произвольной точке p (рис. 2.1.б). В частном случае при $p = j\omega$, будем иметь

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\dots(j\omega - p_n). \quad (2.12)$$

Концы элементарных векторов $(j\omega - p_i)$ будут находиться на мнимой оси в точке $p = j\omega$ (рис.2.1.в).

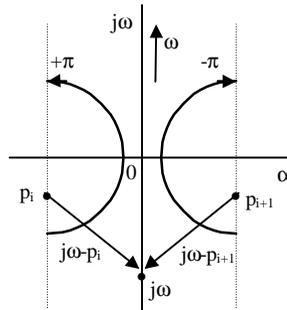


Рис. 2.2.

В выражении (2.12) $D(j\omega)$ представляет собой вектор, равный произведению элементарных векторов $(j\omega - p_i)$ и действительного числа a_0 .

Модуль этого вектора равен произведению модулей элементарных векторов и a_0 .

$$|D(j\omega)| = a_0 |j\omega - p_1| |j\omega - p_2| \dots |j\omega - p_n|, \quad (2.13)$$

а аргумент или фаза равна сумме аргументов элементарных векторов.

$$\text{Arg}D(j\omega) = \text{Arg}(j\omega - p_1) + \text{Arg}(j\omega - p_2) + \dots + \text{Arg}(j\omega - p_n). \quad (2.14)$$

Условимся считать вращение против часовой стрелки положительным.

Тогда при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ каждый элементарный вектор повернется на угол π , если его начало, т.е. корень p_i расположен слева от мнимой оси, и на угол $-\pi$, если корень расположен справа от мнимой оси (рис.2.2).

Предположим, что полином $D(p)$ имеет m правых корней и $n-m$ левых. Тогда при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ приращение аргу-

мента этого полинома, равное сумме углов поворота векторов $(j\omega - p_i)$, равно

$$\Delta \text{Arg} D(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = p(n-m) - pm = p(n-2m). \quad (2.15)$$

Очевидно, что при изменении частоты ω от 0 до ∞ изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ будет вдвое меньше

$$\Delta \text{Arg} D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \left(\frac{p}{2}\right)(n-2m). \quad (2.16)$$

Из этих двух равенств следует важное правило, которое положено в основу всех частотных критериев устойчивости: *изменение (приращение) аргумента $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ равно разности между числом левых и правых корней уравнения $D(p)=0$, умноженной на p , а при изменении ω от 0 до ∞ эту разность нужно умножить на $P/2$.*

2.2.2. Критерий Михайлова

Этот критерий устойчивости, сформулированный А.В. Михайловым в 1938 г., по своей сути является геометрической интерпретацией принципа аргумента и позволяет судить об устойчивости системы по поведению кривой, называемой годографом (кривой) Михайлова. Пусть задано характеристическое уравнение системы n -го порядка:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \mathbf{L} + a_n = 0. \quad (2.17)$$

Если подставить сюда чисто мнимое значение $S = j\omega$, то получим комплексную функцию

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \mathbf{L} + a_n = X(\omega) + jY(\omega) = \\ &= D(\omega) \exp[jf(\omega)], \end{aligned} \quad (2.18)$$

график которой в комплексной плоскости называется кривой Михайлова.

Вещественная и мнимая части кривой:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \mathbf{L}, \\ Y(\omega) &= \omega(a_{n-1} - a_{n-3}\omega^2 + a_{n-5}\omega^4 - \mathbf{L}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

называются соответственно вещественной и мнимой функциями Михайлова. Функции $D(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ представляют собой модуль и фазу (аргумент) вектора $D(j\omega)$. При изменении частоты этот вектор, изменяясь по величине и направлению, будет описывать своим концом в комплексной плоскости некоторую кривую, которая и называется *годографом Михайлова*.

В соответствии с принципом аргумента угол поворота вектора $D(j\omega)$ вокруг начала координат при изменении частоты ω от 0 до ∞ равен

$$\Delta \text{Arg} D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{p}{2} (n - 2m).$$

Отсюда определяем число правых корней полинома $D(s)$, т.е.

$$m = \frac{p n / 2 - \Delta \text{Arg} D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty}}{2}. \quad (2.20)$$

Из (2.20) видно, что число правых корней m будет равно нулю при единственном условии, когда числитель обращается в нуль, т.е.

$$\Delta \text{Arg} D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = p n / 2. \quad (2.21)$$

Условие (2.21) является необходимым, но недостаточным условием устойчивости. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения были левыми, т.е. среди корней не должно быть таких, которые лежат на мнимой оси и обращают в нуль комплексный полином $D(j\omega)$. Иначе говоря, должно выполняться еще одно условие

$$D(j\omega) \neq 0. \quad (2.22)$$

Формулы (2.21) и (2.22) представляют математическое выражение критерия устойчивости Михайлова. Его можно сформулировать так: *чтобы система автоматического управления была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы вектор кривой Михайлова $D(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ повернулся, нигде не обращаясь в нуль, вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $pn/2$, где n — порядок характеристического уравнения.*

Заметим, что для устойчивых систем кривая Михайлова начинается при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси, поскольку при $a_0 > 0$ все коэффициенты характеристического уравнения положительны и $D(0) = a_0 > 0$. Кроме того, для устойчивых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с

постоянными коэффициентами, фаза (аргумент) $f(w)$ с ростом частоты должна возрастать монотонно, т.е. вектор $D(jw)$ должен поворачиваться только против часовой стрелки. В самом деле, пусть корни характеристического уравнения выражены так:

$$S_k = -a_k + jb_k,$$

где $a_k > 0$, b_k может принимать положительные, отрицательные и нулевые значения. Тогда фаза вектора $jw - s_k = j(w - b_k) + a_k$ равна $\arctg \frac{w - b_k}{a_k}$; фаза вектора $D(jw)$ равна сумме фаз всех

составляющих векторов, т.е. $f(w) = \sum_{k=1}^n \arctg \left(\frac{w - b_k}{a_k} \right)$;

производная фазы

$$\frac{df(w)}{dw} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1 + (w - b_k)^2}, \quad (2.23)$$

т.е. для устойчивой системы она всегда будет положительной, а вектор $D(jw)$ при возрастании частоты вращается только против часовой стрелки. Учитывая это, критерий Михайлова можно сформулировать так: *вектор кривой Михайлова $D(jw)$ устойчивой системы при возрастании частоты от 0 до ∞ , начав свое движение на вещественной положительной полуоси и вращаясь только против часовой стрелки, проходит последовательно n квадрантов координатной плоскости.*

Кривая Михайлова для устойчивых систем всегда имеет плавную спиралевидную форму, причем ее конец уходит в бесконечность в том квадранте координатной плоскости, номер которого равен степени характеристического уравнения.

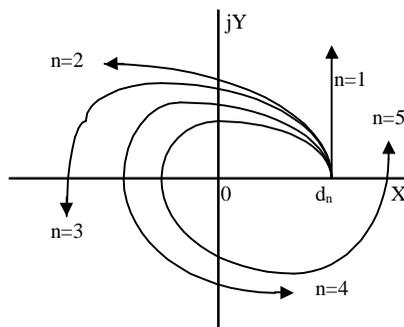


Рис. 2.3.

На рис.2.3 показаны типичные кривые Михайлова для устойчивых систем для уравнений, начиная с первого ($n=1$) и кончая пятым порядком ($n=5$). Коэффициент a_n во всех случаях принят одинаковым. Чем ближе годограф подходит к началу координат, тем меньше запас устойчивости. Если годограф проходит через начало координат, то система находится на границе области устойчивости.

Признаком неустойчивости системы является нарушение числа и последовательности, пройденных кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости. На рис.2.4 показаны кривые Михайлова для неустойчивых и нейтральных систем.

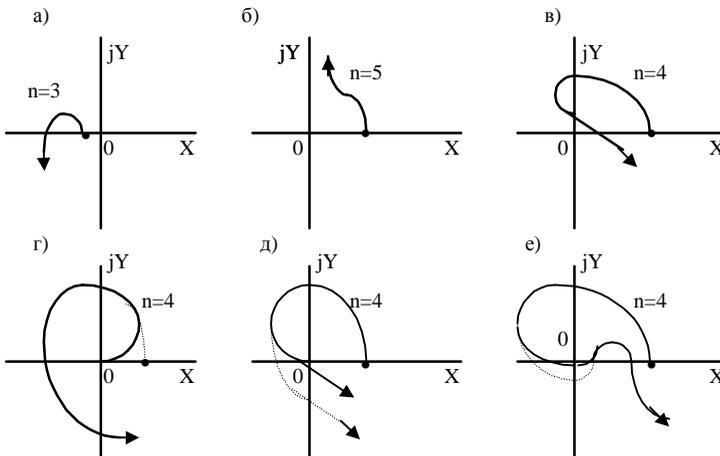


Рис. 2.4.

Рис. (а) – при $W = 0$ кривая начинается на отрицательной вещественной полуоси, система неустойчива.

Рис. (б) – порядок уравнения $n = 5$ а кривая находится вся в одном квадранте (этому соответствует характеристическое уравнение вида $D(s) = a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 = 0$) система неустойчива.

Рис. (в) – нарушена последовательность прохождения квадрантов, система неустойчива.

Рис. (г) кривая Михайлова начинается в начале координат, т.е. в характеристическом уравнении имеется по крайней мере один нулевой корень; система находится на границе аperiодической неустой-

чивости; небольшая деформация кривой Михайлова (пунктирная линия) делает систему устойчивой.

Рис. (д) – кривая Михайлова проходит при некотором значении частоты $W_{кр}$ через начало координат, т.е. в характеристическом уравнении имеются чисто мнимые корни $\pm jW_{кр}$; система находится на границе колебательной устойчивости; небольшая деформация кривой делает систему устойчивой.

Рис. (е) – кривая Михайлова проходит через начало координат, но небольшой деформацией кривой удовлетворить условиям устойчивости нельзя; система неустойчива.

Построение кривой Михайлова практически производится либо методом контрольных точек, либо методом вспомогательных годографов. В первом случае определяется ряд точек кривой Михайлова, соответствующих фиксированным значениям частоты W , включая частоты точек пересечения кривой с осями координат, которые находятся как корни уравнений

$$X(w) = 0, Y(w) = 0. \quad (2.24)$$

При втором методе предварительно определяют годографы отдельных звеньев системы и по ним строят искомую кривую Михайлова, применяя правила умножения и сложения векторов.

При проведении расчетов бывает полезно использовать следующие свойства кривых Михайлова: при $w = 0$ величины $X(w)$ и $Y(w)$ вычисляются по формулам: $X(0) = a_n$, $Y(0) = 0$. Так как сразу можно предположить, что все коэффициенты a_i положительные, то при $w \rightarrow \infty$ будем иметь либо $X(w) \rightarrow \infty$, $Y(w) \rightarrow -\infty$ при n четном, либо $X(w) \rightarrow -\infty$, $Y(w) \rightarrow -\infty$ при n нечетном. Это позволяет в практических расчетах использовать асимптотические свойства кривой Михайлова для определения конечного значения параметра W , участвующего в расчете.

Пример 2.3

Оценим устойчивость электромеханической следящей системы в разомкнутом состоянии, передаточная функция которой

$$W(s) = K / [s(1 + T_y s)(1 + T_m s)],$$

где $K = 58 \text{ с}^{-1}$ – общий коэффициент усиления разомкнутой системы, $T_y = 0.01 \text{ с}$ – постоянная времени усилителя, $T_m = 0.57 \text{ с}$ – постоянная времени двигателя. Характеристический полином замкнутой системы равен сумме полиномов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы:

$$G(s) = s(1 + T_y s)(1 + T_m s) + K = T_y T_m s^3 + (T_y + T_m) s^2 + s + K.$$

Для построения кривой Михайлова определим вещественную и мнимую части функции $G(s)$:

$$X(\omega) = \text{Re } G(j\omega) = K - (T_y + T_m)\omega^2 = 58 - 0.58\omega^2;$$

$$Y(\omega) = \text{Im } G(j\omega) = \omega - T_y T_m \omega^3 = \omega - 5.7 \cdot 10^{-3} \omega^3.$$

Таблица 2.3

$\omega \text{ с}^{-1}$	0	5	10	13	15
X	58	43,5	0	-40,02	-72,5
Y	0	4,22	4,3	0,47	-4,23

Вычисляем значения $X(\omega), Y(\omega)$ для ряда значений ω , (см. табл. 2.3) и строим график, рис.2.5. Отсюда видно, что кривая Михайлова последовательно проходит через три квадранта, следовательно, система устойчива.

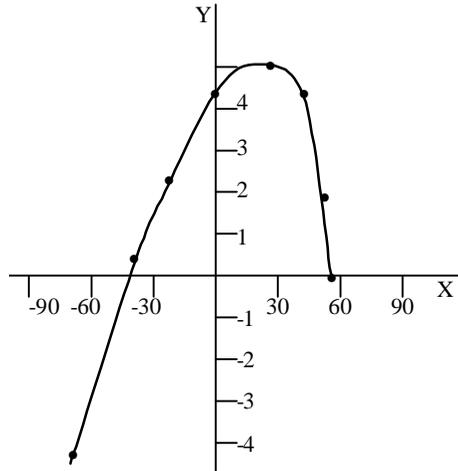


Рис. 2.5

С помощью критерия Михайлова можно исследовать влияние какого-либо параметра на устойчивость системы. Для этого нужно построить несколько кривых Михайлова для разных значений этого параметра, и тогда влияние его на вид кривой, в частности на опасную близость к началу координат, сразу станет очевидным.

Важное следствие.

Анализируя годографы Михайлова, можно установить интересное следствие из критерия устойчивости. При последовательном прохождении кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости вещественная и мнимая оси пересекаются ею поочередно. В точках пересечения кривой с вещественной осью обращается в нуль мнимая функция Михайлова $Y(w)$, а в точках пересечения кривой с мнимой осью обращается в нуль вещественная функция $X(w)$.

Поэтому значения частот, при которых происходит пересечение кривой с вещественной или мнимой осью, должны являться корнями уравнений (2.24). Вещественную и мнимую функции Михайлова можно представить графически в виде кривых в зависимости от W , (рис.2.6) Точки пересечения этих кривых с осью абсцисс дают зна-

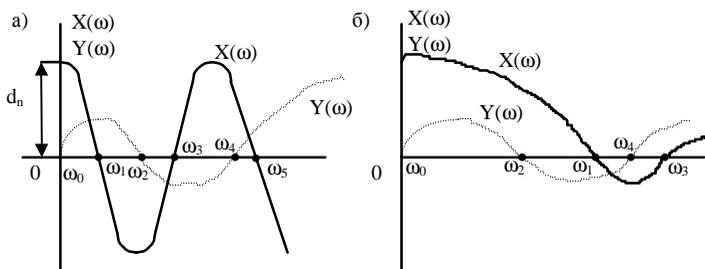


Рис. 2.6.

чения корней уравнений (2.24). Если значения $w_0, w_2, w_4, \mathbf{K}$, есть, корни уравнения $Y(w) = 0$, а $w_1, w_3, w_5, \mathbf{K}$, корни уравнения $X(w) = 0$, причем $w_0 < w_2 < w_4 < \mathbf{K}$, а $w_1 < w_3 < w_5 < \mathbf{K}$, то для устойчивой системы обязательно соблюдение неравенства

$$w_0 < w_1 < w_2 < w_3 < w_4 < w_5 < \mathbf{K} . \quad (2.25)$$

На основании указанного следствия критерий устойчивости Михайлова можно сформулировать следующим образом: *система автоматического управления будет устойчива тогда и только тогда, когда вещественная $X(w)$ и мнимая $Y(w)$ функции Михайлова, приравненные нулю, имеют все действительные и перемежающиеся корни,*

причем общее число этих корней равно порядку характеристического уравнения n , и при $w = 0$ удовлетворяются условия

$$X(0) > 0, \quad Y'(0) > 0.$$

На рис.2.6,а приведен пример графиков $X(w)$ и $Y(w)$ для устойчивой системы, а на рис.2.6,б – для неустойчивой системы.

Для уравнений до шестого порядка включительно условие перемежаемости корней дает возможность легко провести аналитическое исследование устойчивости, не вычерчивая кривую Михайлова. При этом рекомендуется определять только корни уравнения $Y(w) = 0$. Перемежаемость корней уравнений (2.24) можно проверить подстановкой в $X(w)$ найденных корней. Как видно из рис.2.6,а, знаки $X(w)$ при подстановке возрастающих по абсолютной величине корней должны чередоваться.

Пример 2.4.

Определить устойчивость системы с характеристическим уравнением

$$D(s) = s^6 + 6s^5 + 15s^4 + 20s^3 + 15s^2 + 6s + 1 = 0$$

Подставляем $s = jw$ и находим вещественную и мнимую функции Михайлова:

$$X(w) = -w^6 + 15w^4 - 15w^2 + 1 = 0$$

$$Y(w) = w(6w^4 - 20w^2 + 6) = 0$$

Находим корни уравнения $Y(w) = 0$,

$$w_0 = 0, \quad w^4 - 3.33w^2 + 1 = 0, \quad \text{откуда}$$

$$w_{2,4}^2 = 1.67 \pm \sqrt{2.78 - 1};$$

$$w_2^2 = 0.36; \quad w_4^2 = 2.96$$

Если перемежаются корни, то перемежаются и их квадраты, поэтому нахождение w_2 и w_4 не обязательно.

Проверим, чередуются ли знаки $X(w)$ при подстановке w_2^2 и w_4^2 . Имеем

$$X(w_2) = -0.36^3 + 15 \cdot 0.36^2 - 15 \cdot 0.36 + 1 = -2.51;$$

$$X(w_4) = -2.96^3 + 15 \cdot 2.96^2 - 15 \cdot 2.96 + 1 = 62.09.$$

Так как все корни $Y(w)$ вещественны и знаки ординат $X(w)$, соответствующие этим корням, чередуются, то система устойчива.

Замечание: Критерий устойчивости Михайлова можно применять для любой системы замкнутой или разомкнутой, главное, чтобы была известна передаточная функция.

Пример 2.5.

Рассмотрим применение критерия Михайлова для определения критического значения коэффициента усиления и критической частоты для системы автоматической настройки частоты гетеродинного приемника. В таких радиоприемниках для обеспечения качественного звучания основное усиление производится на фиксированной, так называемой промежуточной частоте $W_{пром}$. Поскольку частота принимаемого сигнала $W_{сигн}$ постоянно меняется из-за разного рода неконтролируемых возмущений, для обеспечения хорошей работы гетеродинного приемника в его состав вводят систему автоматической подстройки частоты (АПЧ). Задачей системы АПЧ является поддержание

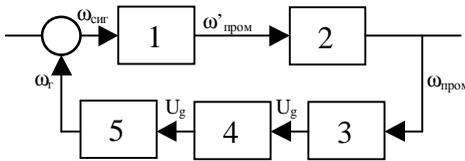


Рис.2.7.

гетеродинного приемника в его состав вводят систему автоматической подстройки частоты (АПЧ). Задачей системы АПЧ является поддержание

заданного значения $W_{пром} = W_{пром}^{ном}$. Одна из возможных схем АПЧ изображена на рис.2.7. Работа каждого из устройств 1–5 описывается следующими соотношениями, записанными сразу для отклонений частот dw [7]:

1. Смеситель: $dw_{сигн} - dw_{\omega} = dw'_{пром}$

2. Усилитель промежуточной частоты (УПЧ):

$$T_y \frac{d}{dt}(dw_{пром}) + dw_{пром} = dw'_{пром}.$$

3. Дискриминатор: $U_{Д} = K_{Д} dw_{пром}.$

4. Усилитель:
$$T_Y \frac{dU_Y}{dt} + U_Y = U_D.$$

5. Управляющий элемент гетеродина:

$$T_G \frac{d(dw_z)}{dt} + dw_z = K_G U_Y.$$

Входной величиной АПЧ будем считать $dw_{сигн}$, а выходом dw_z , т.е. будем рассматривать АПЧ как следящую систему.

Применяя операторный метод, получим:

$$dw_{пром} = \frac{1}{T_Y p + 1} dw'_{пром}; \quad U_D = \frac{K_D}{T_Y p + 1} dw_{пром};$$

$$U_Y = \frac{1}{T_D p + 1} U_D = \frac{K_D}{(T_Y p + 1)(T_D p + 1)} dw'_{пром};$$

$$dw_z = \frac{K_G}{T_G p + 1} U_Y = \frac{K_D K_G}{(T_G p + 1)(T_Y p + 1)(T_D p + 1)} dw_{пром} =$$

$$= \frac{K(dw_{сигн} - dw_G)}{(T_G p + 1)(T_Y p + 1)(T_D p + 1)}; \quad K = K_G K_D; \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Окончательно получим уравнение АПЧ в виде

$$[(T_G p + 1)(T_Y p + 1)(T_D p + 1) + K] dw_G = K dw_{сигн}. \quad (2.26)$$

Установим условия устойчивости АПЧ, описываемой уравнением (2.26). Воспользуемся критерием Михайлова и построим годограф:

$$D(jw) = (T_G(jw) + 1)(T_Y(jw) + 1)(T_D(jw) + 1) + K.$$

Отделим действительную и мнимые части:

$$\operatorname{Re} D(jw) = 1 + K - w^2 (T_Y T_D + T_Y T_G + T_D T_G),$$

$$\operatorname{Im} D(jw) = w (T_Y + T_D + T_G - w^2 T_Y T_D T_G).$$

Определим критический коэффициент усиления $K_{кр}$ и критическую частоту $w_{кр}$ из условия $\operatorname{Re} D(jw) = \operatorname{Im} D(jw) = 0$. Из условия $\operatorname{Im} D(jw) = 0$ находим, что

$$w_{KP} = \sqrt{\frac{T_Y + T_\Gamma + T_D}{T_Y T_\Gamma T_D}},$$

а из условия $\operatorname{Re} D(j\omega) = 0$ – что

$$\begin{aligned} K_{KP} &= w_{KP}^2 (T_Y T_D + T_Y T_\Gamma + T_D T_\Gamma) - 1 = \\ &= 2 + \frac{T_D}{T_\Gamma} + \frac{T_Y}{T_\Gamma} + \frac{T_D}{T_Y} + \frac{T_\Gamma}{T_Y} + \frac{T_\Gamma}{T_D} + \frac{T_Y}{T_D}. \end{aligned}$$

При значениях $T_Y = 0.003c$, $T_D = 0.002c$, $T_\Gamma = 0.001c$ получим $K_{KP} = 10$. Следовательно, такая система АПЧ при $K_{KP} < 10$ устойчива, а при $K_{KP} > 10$ – неустойчива.

Вывод, аналогичный предыдущему, верен и для любой одноконтурной системы автоматического регулирования, содержащей произвольное число звеньев. Пусть характеристическое уравнение одноконтурной системы имеет вид

$$\prod_{i=1}^m (T_i p + 1) \prod_{i=1}^n (a_i p^2 + b_i p + 1) + K = 0. \quad (2.27)$$

Первые m множителей соответствуют аperiodическим звеньям, вторые n – колебательным. Как показано Неймарком Ю.И., [4] для любой одноконтурной системы автоматического регулирования с характеристической функцией (2.27) существует критическое значение коэффициента усиления K_{KP} такое, что при $K < K_{KP}$ система устойчива, а при $K > K_{KP}$ она неустойчива.

2.2.3. Критерий Найквиста

Этот критерий устойчивости, разработанный в 1932г. американским ученым Найквистом, позволяет на основе анализа амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы судить об устойчивости замкнутой системы.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \mathbf{L} + b_m}{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \mathbf{L} + c_n},$$

где для реальных систем всегда $m \leq n$.

Подставляя $s = j\omega$, получаем частотную передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{b_0(j\omega)^n + b_1(j\omega)^{n-1} + \mathbf{L} + b_m}{c_0(j\omega)^n + c_1(j\omega)^{n-1} + \mathbf{L} + c_n} = \quad (2.28)$$

$$= U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$, $\varphi(\omega) = \text{Arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$.

При изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ вектор $W(j\omega)$, изменяясь по величине и фазе, опишет своим концом в комплексной плоскости U, jV некоторую кривую, которая называется амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы, рис.2.8. Эта кривая симметрична относительно вещественной оси и её вычерчивают обычно для $\omega \geq 0$. В области отрицательных частот получается зеркальное отображение относительно вещественной оси. Чтобы рассматривать замкнутую систему, введем вектор

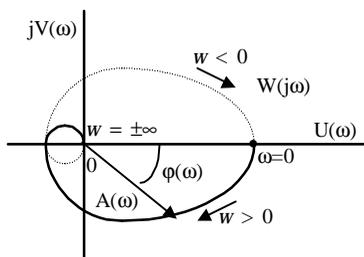


Рис. 2.8.

$$j(s) = 1 + W(s) = 1 + \frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{Q(s) + R(s)}{Q(s)} = \frac{D(s)}{Q(s)}. \quad (2.29)$$

Нетрудно видеть, что числитель этой дроби представляет собой характеристический полином замкнутой системы, а знаменатель – характеристический полином разомкнутой системы.

Так как в САР степень полинома $R(s)$ не выше степени $Q(s)$, то степени числителя и знаменателя дроби (2.29) будут одинаковы и равны n .

$$\text{Тогда } D(s) = Q(s) + R(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \mathbf{L} + a_n$$

характеристический полином замкнутой системы,

$$Q(s) = c_0s^n + c_1s^{n-1} + \mathbf{L} + c_n$$

характеристический полином разомкнутой системы.

Подставляя в (2.29) $s = j\omega$, будем иметь

$$j(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{Q(j\omega)} \quad (2.30)$$

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы $D(s) = 0$ имеет m правых корней и $n-m$ левых корней, а характеристическое уравнение разомкнутой системы $Q(s) = 0$ имеет $\mathbf{1}$ правых и $n-1$ левых корней. При изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ изменение угла поворота вектора $j(j\omega)$ на основе принципа аргумента будет

$$\begin{aligned} \Delta \text{Arg} j(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} &= \Delta \text{Arg} D(j\omega) - \Delta \text{Arg} Q(j\omega) = \\ &= p[(n-m) - m] - p[(n-1) - 1] = 2p(1-m) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни её характеристического уравнения были левыми, т.е. $m = 0$. Тогда суммарный поворот вектора $j(j\omega)$ устойчивой системы вокруг начала координат должен равняться

$$\Delta \text{Arg} j(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 2p\mathbf{1} \quad (2.32)$$

где $\mathbf{1}$ – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы. Обычно рассматривают только положительные частоты $\omega > 0$, а в этом случае угол поворота вектора $j(j\omega)$ будет вдвое меньше, т.е.

$$\Delta \text{Arg} j(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = p\mathbf{1} = \frac{2p\mathbf{1}}{2} \quad (2.33)$$

В осях амплитудно-фазовой характеристики начало координат вектора $1 + W(j\omega)$ соответствует точке $(-1, j0)$ на рис.2.9. Так

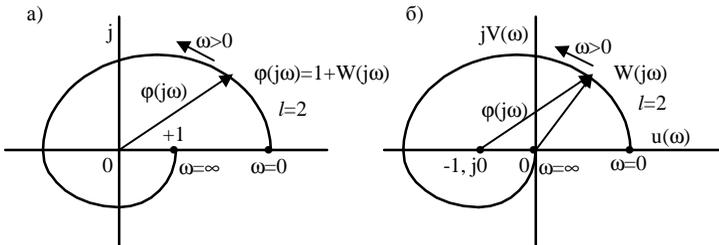


Рис. 2.9.

как $W(j\omega)$ симметрична относительно вещественной оси, вычерчивают только ту часть, которая соответствует положительным ω . Для этой части угол поворота вектора будет вдвое меньше, т.е. $p\mathbf{1}$.

На основании сказанного, критерий устойчивости Найквиста формулируется следующим образом: для того, чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты ω от 0 до ∞ амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W(j\omega)$ охватывала точку $(-1, j0)$ в положительном направлении (против часовой стрелки) $\frac{\mathbf{1}}{2}$ раз, где $\mathbf{1}$ – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы $Q(j\omega) = 0$.

На рис.2.9.а,б показаны амплитудно-фазовые характеристики $j(j\omega)$ и $W(j\omega)$ соответствующие устойчивой замкнутой системе, которая в разомкнутом состоянии была неустойчивой и имела число правых корней $\mathbf{1} = 2$. Обычно в реальных системах $W(j\omega)|_{\omega=\infty} = 0$, и поэтому $j(j\omega)|_{\omega=\infty} = 1$.

При сложной форме характеристики $W(j\omega)$ могут возникнуть трудности при определении числа её оборотов вокруг критической точки $(-1, j0)$. Для суждения об устойчивости в этом случае рекомендуется применить так называемое «правило переходов», предложенное Я.З. Цыпкиным [5]. Оно заключается в следующем. Переход характеристики $W(j\omega)$ через отрезок вещественной оси слева от точки $(-1, j0)$, т.е. через отрезок $(-\infty, -1)$ при возрастании ω называется положительным, если он происходит сверху вниз, и отрицательным, если он происходит снизу вверх. Если характеристика $W(j\omega)$ начинается на отрезке вещественной оси $(-\infty, -1)$ при $\omega = 0$, или заканчивается на нем при $\omega = \infty$, то в этих случаях, что она совершает полперехода.

Для такой ситуации критерий Найквиста можно сформулировать так: если разомкнутая система АУ неустойчива, то для того, чтобы замкнутая система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и

отрицательных переходов амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы $W(j\omega)$ через отрезок вещественной оси $(-\infty, -1)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ была равна $\frac{1}{2}$, где \mathbf{l} – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

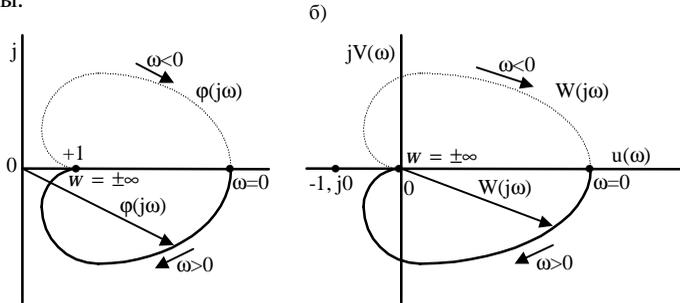


Рис. 2.10.

Если система автоматического управления в разомкнутом состоянии устойчива, (т.е. $\mathbf{l} = 0$), то приращение аргумента вектора $j(j\omega)$ равно нулю.

$$\Delta \text{Arg} j(j\omega) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2p\mathbf{l} = 0$$

Это означает, что для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы амплитудно-фазовая характеристика $j(j\omega)$ не охватывала начала координат (рис.2.10а), а амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$ не охватывала точку с координатами $(-1, j0)$, (рис.2.10.б).

Таким образом, для этого наиболее часто встречающегося на практике случая критерий Найквиста очевиден. Если разомкнутая система автоматического управления устойчива, то замкнутая система автоматического управления будет устойчива, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W(j\omega)$ не охватывает точку $(-1, j0)$.

Для статических систем годограф замкнут, так как полный годограф $W(s)$ при $-\infty < \omega < +\infty$ образует замкнутую кривую. Для астатических систем (следающие системы), которые содержат интег-

рирующие звенья, это в общем случае не так, потому что полюсы могут быть и в начале координат. Тогда годограф уходит в бесконечность при $W = 0$. Важно знать, как замкнуть такой годограф, потому что замыкание и определит устойчивость системы.

Пример незамкнутого годографа приведен на рис.2.12.

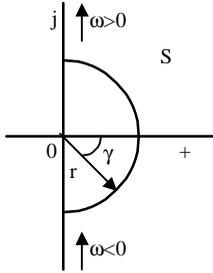


Рис. 2.11.

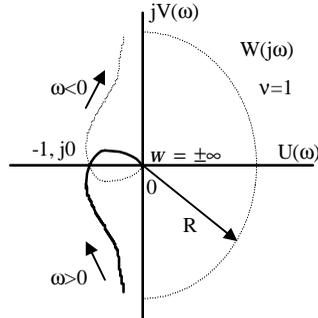


Рис.2.12.

Здесь $W(s) \rightarrow \infty$ при $W \rightarrow 0$ и вопрос состоит в том, как замкнуть годограф при переходе от $W = 0_-$ к $W = 0_+$. Чтобы обойти полюс $W = 0$, поступим как показано на рис.2.11. Начнем обход с $s = -jW$ и будем двигаться вдоль отрицательной части мнимой оси до тех пор, пока W не станет очень малым. Затем обойдем начало координат по полуокружности очень малого радиуса, расположенной в правой полуплоскости; после встречи с положительной частью мнимой оси будем двигаться вдоль неё до $s = +j\infty$. Обычный способ, применимый в теории функций, состоит в том, что уравнение малой полуокружности, обходящей полюс в начале координат, задают в виде

$$s = de^{j\theta}, \quad (2.34)$$

$$\text{где } d \rightarrow 0 \text{ и } -\frac{p}{2} < \theta < \frac{p}{2}.$$

Тогда нулевой корень дает такой же угол поворота, как и левый корень.

Если уравнение годографа, показанного на рис.2.12, с астатизмом первого порядка, например таково

$$W(s) = \frac{K}{s(s + w_0)(s + w_1)}, \quad (2.35)$$

то при $s \rightarrow 0$, пользуясь (2.34), получим

$$W(s) \rightarrow \frac{Ke^{-ij}}{w_0 w_1 d}. \quad (2.36)$$

При $d \rightarrow 0$ модуль $W(s)$ стремится к бесконечности, причем когда j изменяется от $-P/2$ до $+P/2$, фазовый угол годографа изменяется от $+P/2$ до $-P/2$. Это означает, что точки $W = 0_-$ и $W = 0_+$ замыкаются при помощи полуокружности бесконечно большого радиуса, как показано на рис.2.12.

В качестве примера рассмотрим устойчивость системы, для которой передаточная функция разомкнутого контура задана формулой (2.35). Устойчивость системы зависит от коэффициента усиления K и чисел w_0 и w_1 . Рис.2.13 соответствует такому выбору этих параметров, при котором система неустойчива. Она может быть

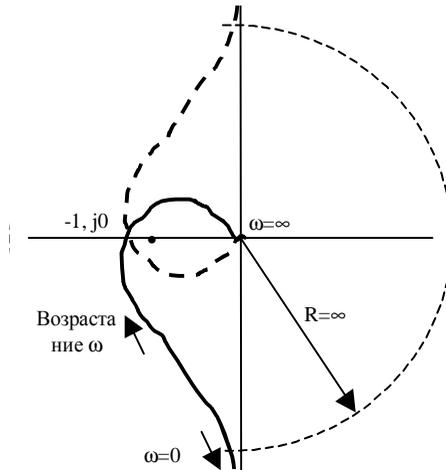


Рис.2.13.

сделана устойчивой или путем уменьшения усиления K , или путем введения подходящей коррекции, например, с помощью введения форсирующего звена. В этом случае вместо передаточной функции (2.35) будем иметь

$$W(s) = \frac{K(s + w_2)}{s(s + w_0)(s + w_1)}. \quad (2.37)$$

Её годограф показан на рис.2.14. Он не охватывает критическую точку $(-1, j0)$. Замкнутая система устойчива.

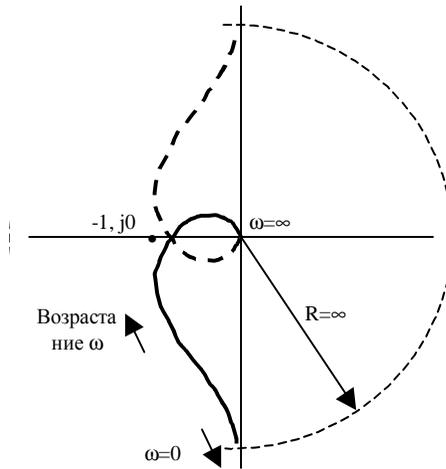


Рис.2.14.

Естественно, что годографы на рис.2.13, 2.14 показывают лишь качественную сторону дела.

В общем случае для астатических систем порядка ν характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет корни равные нулю и может быть записано в виде

$$Q(s) = s^\nu Q_1(s) = 0, \quad (2.38)$$

где ν – порядок астатизма,

Q_1 – полином, не имеющий нулевых корней.

Частотная передаточная функция разомкнутой системы, содержащей интегрирующие звенья, имеет вид

$$W(j\omega) = \left. \frac{R(s)}{s^n Q_1(s)} \right|_{s=j\omega} = \frac{R(j\omega)}{(j\omega)^n Q_1(j\omega)}. \quad (2.39)$$

При $\omega = 0$ частотная передаточная функция системы обращается в бесконечность, т.е. претерпевает разрыв.

Так же как и раньше, воспользуемся той же процедурой обхода начала координат в плоскости корней справа по полуокружности бесконечно малого радиуса, т.е. считаем

$$r = de^{ij}, \text{ где } d \rightarrow 0, -P/2 \leq j \leq P/2.$$

В данном случае, когда $v=2, 3, \dots$ обходу начала координат по малой дуге de^{ij} в плоскости корней соответствует передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \left. \frac{R(s)}{s^n Q_1(s)} \right|_{s=0} = \frac{R(0)}{Q_1(0)} \frac{1}{(de^{ij})^n} = \frac{b_m}{c_m} \frac{1}{d^n} e^{-ijn} = Re^{-if}$$

где b_m и c_m – свободные члены полиномов $R(s)$ и $Q_1(s)$.

При $d \rightarrow 0$ модуль $R \rightarrow \infty$, а аргумент ϕ меняется от $nP/2$ до $-nP/2$ при изменении ϕ от $-P/2$ до $P/2$. То есть, вектор бесконечно большой длины поворачивается в комплексной плоскости по часовой стрелке на угол $-np$ (от $nP/2$ до $-nP/2$). Заметим, что очень важно, при изменении частоты ω от 0 до ∞ , т.е. при $d \rightarrow 0$ и $0 \leq j \leq P/2$ частотная передаточная функция $W(j\omega)$ будет изменяться по дуге бесконечно большого радиуса, описывая угол от 0 до $-nP/2$.

На основе сказанного выше для определения устойчивости системы с астатизмом любого порядка n достаточно построить одну ветвь амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы для положительных частот, дополнить её дугой $-nP/2$ окружности бесконечно большого радиуса и применить критерий Найквиста.

Например, если разомкнутая астатическая система неустойчива, то замкнутая система будет устойчива, если при изменении частоты

W от 0 до ∞ амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W(j\omega)$, дополненная дугой $-\frac{nP}{2}$ бесконечно большого радиуса, охватит точку $(-1, j0)$ в положительном направлении $\frac{1}{2}$ раз, где 1 – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

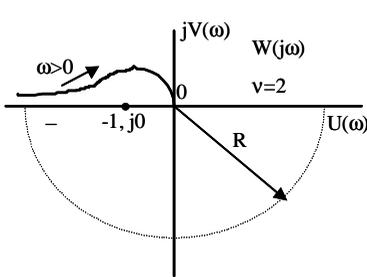


Рис. 2.15

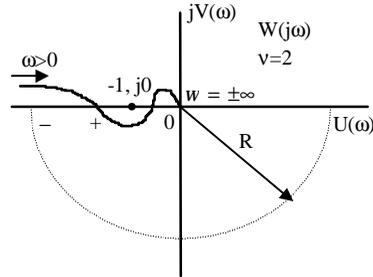


Рис.2.16

На рис.2.15 приведена характеристика разомкнутой системы с астатизмом второго порядка $n=2$. Замкнутая система в этом случае будет неустойчива, так как амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$, дополненная дугой $-\frac{nP}{2} = -p$ охватывает точку $(-1, j0)$ в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

На рис.2.16 изображена амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы с астатизмом второго порядка, которая после дополнения её дугой $-\frac{nP}{2} = -p$ бесконечно большого радиуса не охватывает точку $(-1, j0)$. Число положительных и отрицательных переходов через отрезок $(-\infty, -1)$ равно нулю. Следовательно, замкнутая система будет устойчива.

Важным достоинством критерия Найквиста является то, что в целом ряде случаев амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы может быть получена экспериментально. Кроме того, параметры системы определены обычно приближенно и в процессе работы могут изменять свое значение. Поэтому важно знать так

называемый запас устойчивости по фазе и амплитуде. Запас устойчивости оценивается величиной удаления амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы $W(j\omega)$ от точки $(-1, j0)$.

Запас устойчивости по фазе определяют как величину угла $\varphi = p - |f(\omega_c)|$ для частоты ω_c , при которой $|W(\omega_c)| = 1$. Частоту ω_c , при которой выполняется это условие, называют частотой среза.

Запас устойчивости по амплитуде определяют как величину отрезка действительной оси h , заключенного между критической точкой $(-1, j0)$ и амплитудно-фазовой характеристикой, рис.2.17.

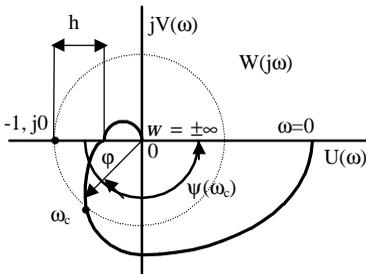


Рис. 2.17

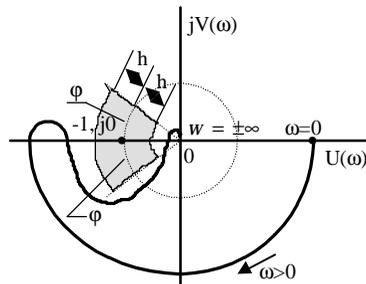


Рис. 2.18

С ростом коэффициента усиления K разомкнутой системы модуль амплитудно-фазовой характеристики растет и при некотором значении коэффициента усиления $K=K_{кр}$ амплитудно-фазовая характеристика пройдет через точку $(-1, j0)$ и система будет на границе устойчивости. При $K > K_{кр}$ система будет неустойчива.

На практике встречаются случаи, когда потеря устойчивости наступает при уменьшении коэффициента усиления. Этим случаям соответствуют так называемые клювообразные амплитудно-фазовые характеристики (рис.2.18). Обычно эти системы с внутренними обратными связями. Тогда запас устойчивости по амплитуде определяется величинами двух отрезков оси абсцисс, заключенных между критической точкой $(-1, j0)$ и амплитудно-фазовой характеристикой. Для определения запаса устойчивости при заданных величинах h и j , около критической точки $(-1, j0)$ вычерчивается

запретная область в виде сектора, ограниченного величинами $\pm h$ и $\pm j$, в которую амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$ не должна входить.

Пример 2.6

Пусть дана передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}. \quad (2.40)$$

Находим частотную передаточную функцию

$$W(j\omega) = \frac{K(1 - j\omega T_1)(1 - j\omega T_2)(1 - j\omega T_3)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)}.$$

Преобразуем её к виду

$$W(j\omega) = \frac{K[1 - \omega^2(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1) - j\omega(T_1 + T_2 + T_3) - \omega^2(T_1T_2T_3)]}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)}$$

Задаваясь разными ω , можно построить $W(j\omega)$ по этой формуле, но расчет получается очень громоздкий. Обычно степень числителя (ω^3) меньше степени знаменателя (ω^4). В этом случае проще строить обратную амплитудно-фазовую характеристику. Она определяется выражением:

$$G(j\omega) = \frac{1}{W(j\omega)}.$$

Тогда из (2.40)

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{K}(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3) = \\ &= \frac{1}{K}[1 - \omega^2(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1) + j\omega(T_1 + T_2 + T_3 - \omega^2 T_1T_2T_3)] \end{aligned}$$

Так как обратная амплитудно-фазовая характеристика представляет собой инверсию прямой, формулировка критерия Найквиста видоизменяется следующим образом.

Замкнутая система устойчива, если разность между числом отрицательных и положительных переходов обратной амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы через отрезок вещественной оси $(0, -1)$ при изменении W от 0 до ∞ , равна $\frac{1}{2}$, где 1 – число правых корней разомкнутой системы.

В нашем случае вещественная ось пересекается амплитудно-фазовой характеристикой при $W = 0$ в точке $\frac{1}{K}$ и при

$$W^2 = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}; \text{ (когда мнимая часть обращается в нуль) в точке, где действительная часть будет}$$

где действительная часть будет

$$\frac{1}{K} \left[1 - \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3} (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1) \right],$$

или

$$\frac{1}{K} \left[1 - (T_1 + T_2 + T_3) \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) \right].$$

В соответствии с критерием система устойчива, если характеристика не пересекает отрезка $(-1, 0)$, т.е. если величина вещественной части при пересечении вещественной полуоси меньше -1 . Отсюда вытекает следующее условие устойчивости

$$-1 > \frac{1}{K} \left[1 - (T_1 + T_2 + T_3) \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) \right],$$

или

$$K < (T_1 + T_2 + T_3) \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) - 1.$$

Если $T_1 = T_2 = T_3$, то $K < 8$.

2.2.4. Суждение об устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

В инженерной практике широкое применение получил анализ устойчивости систем АУ, основанный на рассмотрении логарифмических частотных характеристик разомкнутых систем. Это связано с тем, что построение логарифмических частотных характеристик разомкнутых систем, особенно асимптотических логарифмических частотных характеристик, много проще, чем построение годографа амплитудно-фазовых характеристик. Нужно только установить соответствие между некоторыми свойствами логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАХ) и амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ) разомкнутой системы, при которых обеспечивается устойчивость системы в замкнутом состоянии.

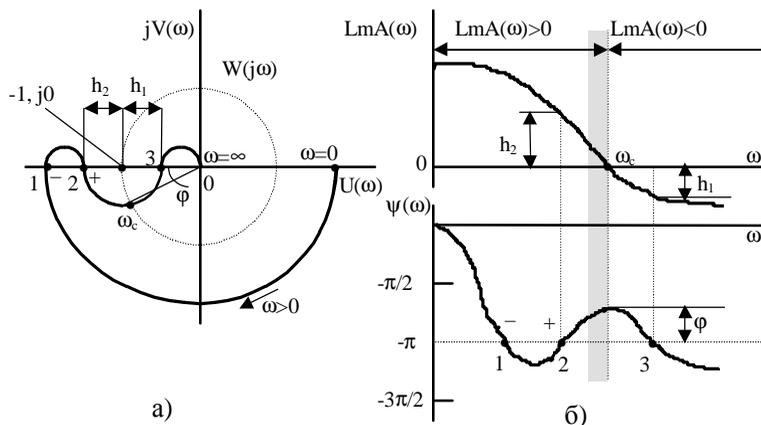


Рис. 2.19.

Как уже было указано, устойчивость связана с числом переходов амплитудно-фазовой характеристики $W(j\omega)$ отрезка $(-\infty, -1)$ отрицательной вещественной полуоси. Когда амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$ пересекает отрицательную вещественную полуось, то логарифмическая фазовая характеристика пересекает одну из линий $-\pi, -3\pi$ и т.д. (рис. 2.19,а). Переходы через эти линии не опасны с точки зрения устойчивости, если они совершаются справа от точки $(-1, j0)$, т.е. если при этом модуль амплитудно-фазовой

характеристики меньше единицы $|W(j\omega)| < 1$. При этом ординаты ЛАХ будут отрицательны и $LmA(\omega) = 20 \cdot \lg|W(j\omega)| < 0$. Поэтому область отрицательных ординат АФХ при исследовании устойчивости интереса не представляет. Положительному переходу сверху вниз через отрезок $(-\infty, -1)$ характеристики $W(j\omega)$ соответствует пересечение логарифмической фазовой характеристики (ЛФК) при $LmA(\omega) > 0$ прямых $\pi, 3\pi$ и т.д. снизу вверх (точка 2, рис. 2.19,б), а отрицательному переходу – сверху вниз (точка 1).

Критерий устойчивости Найквиста применительно к логарифмическим частотным характеристикам в общем случае можно сформулировать следующим образом. Для того, чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов логарифмической фазовой характеристикой прямых $\pm p(2i + 1)$, ($i = 0, 1, 2, \dots$) во всех областях, где амплитудно-частотная характеристика положительна ($LmA(\omega) > 0$) была равна $\frac{1}{2}$, где 1 – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

На рис. 2.19 приведен пример АФХ разомкнутой системы $W(j\omega)$ и соответствующие ей ЛАХ и ЛФХ. Исследование проводится в области положительных ординат ЛАХ, на чертеже – в области окаймленной штриховкой. Пересечению характеристики $W(j\omega)$ с кругом единичного радиуса (рис. 2.19а) соответствует пересечение ЛАХ с осью абсцисс. Из их анализа видно, что разность между числом положительных и отрицательных переходов АФХ прямых $-\pi$ при $LmA(\omega) > 0$ равна нулю. Следовательно, если разомкнутая система была устойчива ($1 = 0$), то и замкнутая система будет устойчива, при этом запасы устойчивости по амплитуде будут равны h_1 и h_2 , а запас устойчивости по фазе равен j .

На рис. 2.19 показан пример логарифмической характеристики неустойчивой в замкнутом состоянии системы, если разомкнутая система устойчива.

2.2.5. Устойчивость систем с запаздыванием и систем с иррациональными звеньями

Системы автоматического управления, в которых зависимость между входной $u(t)$ и выходной $y(t)$ величинами имеет вид

$$y(t) = u(t - t) \quad (2.41)$$

где t – постоянная величина времени, называют запаздывающими. Они воспроизводят входную величину без изменения, но с постоянным временем запаздывания t .

Звенья с чистым запаздыванием часто встречаются в различных процессах, например, когда что-то перемещается из одной точки в другую с помощью ленточного транспортера, в системах магнитной записи и воспроизведения и др. Системы управления, содержащие хотя бы одно запаздывающее звено называют системами с чистым запаздыванием. Процессы в этих системах описываются дифференциально-разностными уравнениями. Во многих тепловых процессах, а также при передаче сигналов на большие расстояния электрическими, гидравлическими и другими линиями наблюдается запаздывание, распределенное по всей длине линии, которое в отличие от чистого запаздывания часто ведет к искажению передаваемого сигнала. Такие системы для своего описания требуют уравнения в частных производных. В дальнейшем мы будем рассматривать только системы с чистым запаздыванием.

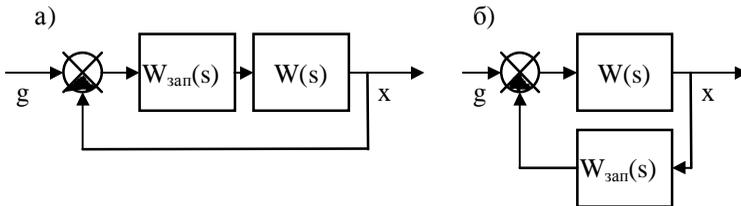


Рис. 2.20.

Передаточная функция запаздывающего звена, как известно, имеет вид

$$W_{\text{зап}}(s) = e^{-st}. \quad (2.42)$$

Структурная схема одноконтурной системы автоматического управления, содержащее одно запаздывающее звено, зависит от

места включения запаздывающего звена, либо в прямой цепи, либо в цепи обратной связи, рис.2.20а, б.

Передаточная функция разомкнутой системы управления с запаздыванием в обоих случаях будет одинакова

$$W_t(s) = W_{\text{зап}}(s) \cdot W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} e^{-ts} \quad (2.43)$$

где $W(s) = R(s)/Q(s)$ – передаточная функция разомкнутой цепи без учета запаздывания. Обычно это дробно-рациональная функция оператора s .

Заметим, что если в одноконтурной системе имеется несколько последовательно соединенных запаздывающих звеньев, то они могут быть заменены одним звеном с эквивалентной постоянной времени запаздывания t , равной сумме всех постоянных времени запаздывания.

Передаточные функции замкнутой системы будут разные.

Для случая а)

$$W_{gx} = \frac{W_t(s)}{1 + W_t(s)} = \frac{R(s)e^{-st}}{Q(s) + R(s)e^{-st}} = \frac{R_t(s)}{D_t(s)}, \quad (2.44)$$

для случая б)

$$W_{gx} = \frac{W(s)}{1 + W_t(s)} = \frac{R(s)}{Q(s) + R(s)e^{-st}} = \frac{R(s)}{D_t(s)}. \quad (2.45)$$

Отсюда видно, что независимо от места включения запаздывающего звена характеристическое уравнение системы с запаздыванием имеет вид

$$D_t(s) = Q(s) + R(s)e^{-st} = 0. \quad (2.46)$$

Это характеристическое уравнение является не полиномом, а трансцендентной функцией оператора s и в отличие от обыкновенного алгебраического уравнения имеет бесконечное множество корней.

Так как $e^{-st} = 1 - st + \frac{(st)^2}{2!} - \frac{(st)^3}{3!} + \mathbf{L}$, то характеристическое уравнение будет иметь бесконечное множество корней.

Однако по условию устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни были левыми. Нахождение корней (2.46) затруднительно, поэтому предпочтительнее использовать критерии устойчивости. Надо иметь в виду, что алгебраические критерии

устойчивости Рауса и Гурвица в их обычной форме здесь не пригодны. Существуют различные алгебраические критерии устойчивости для систем с запаздыванием, которые являются аналогами критериев Рауса и Гурвица, однако они сложны и в инженерной практике не применяются.

Для исследования устойчивости систем с запаздыванием можно применять частотные критерии устойчивости Михайлова и Найквиста. Уравнение годографа Михайлова системы с запаздыванием получается после подстановки $s = j\omega$ в характеристическое уравнение т.е.

$$D(j\omega, e^{j\omega t}) = Q(j\omega) + R(j\omega)e^{-j\omega t} = 0$$

Наличие множителя $e^{-j\omega t}$ делает очертания кривой Михайлова довольно сложным и формулировка критерия для систем с запаздыванием становится не такой простой, как для обычных систем. Оказывается, что в этом случае очень удобно применять критерий Найквиста.

Заключения об устойчивости замкнутой системы с запаздыванием делаются на основании исследования поведения амплитудно-фазовой характеристики $W_t(j\omega)$ разомкнутой системы с запаздыванием относительно точки $-1, j0$. Формулировка критерия устойчивости в этом случае аналогична формулировке для обычных систем, имеющих дробно-рациональные передаточные функции.

Частотно-передаточную функцию $W_t(j\omega)$ разомкнутой системы с запаздыванием находим подстановкой $s = j\omega$ в (2.43)

$$\begin{aligned} W_t(j\omega) &= W(j\omega)e^{-j\omega t} = A(\omega)e^{jf(\omega)} \cdot e^{-j\omega t} = \\ &= A(\omega)e^{jf_t(\omega)}, \end{aligned}$$

где $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ – амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы без учета запаздывания,

$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)}$ – амплитудно-частотная характеристика,

$$f[\omega] = \text{Arctg} \frac{v(\omega)}{u(\omega)} - \text{фазочастотная характеристика разомкнутой системы с запаздыванием.}$$

Из полученных соотношений видно, что наличие запаздывающе-го звена не меняет модуля $A(\omega)$ амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы $W(j\omega)$, а вносит лишь дополнительный отрицательный фазовый сдвиг ωt , пропорциональный частоте с коэффициентом пропорциональности, равным времени запаздывания t . Поэтому, если известна амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$ разомкнутой системы без запаздывания, легко построить ту же характеристику $W_t(j\omega)$ с учетом запаздывания. Для этого каждый модуль $A(\omega_i)$ вектора амплитудно-фазовой характеристики $W(j\omega)$ нужно повернуть на угол $\omega_i t$ по часовой стрелке.

С ростом частоты ω угол ωt будет расти, а модуль $A(\omega)$ обычно уменьшается. Поэтому амплитудно-фазовая характеристика $W_t(j\omega)$ с запаздыванием получается в виде спирали, закручивающейся вокруг начала координат (рис.2.21). Такое закручивание при наличии дополнительного фазового сдвига ωt , как видно из рисунка, ухудшает условие устойчивости, так как вся амплитудно-

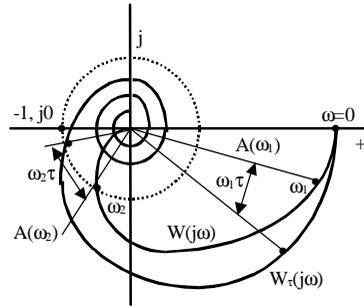


Рис. 2.21.

фазовая характеристика приближается к критической точке $(-1, j0)$. Однако иногда при сложной форме амплитудно-фазовой характеристике $W(j\omega)$ введение постоянного запаздывания может улучшить условия устойчивости.

Изменяя время запаздывания, можно найти такое его значение, при котором замкнутая система будет находиться на границе устойчивости. В этом случае характеристика $W_t(j\omega)$ будет проходить через точку $(-1, j0)$, а время запаздывания $t_{кр}$ и соответствующее ему значение частоты $\omega_{кр}$ называют критическими.

Для критического случая будет справедливо следующее условие

$$W_t(jw_{кр}) = A(w_{кр}) e^{j[f(w_{кр}) - w_{кр}t_{кр}]} = -1, \quad (2.47)$$

которое можно записать отдельно для амплитуд и фаз вектора $W_t(jw_{кр})$

$$W_t(jw_{кр}) = A(w_{кр}) e^{j[t(w_{кр}) - w_{кр}t_{кр}]} = -1 \quad (2.48)$$

$$f_t(w_{кр}) = f(w_{кр}) - w_{кр}t_{кр} = -p(2i + 1) \quad (2.49)$$

где $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Из (11) можно найти $w_{кр}$, а затем из (12) определить $t_{кр}$, т.е.

$$\Sigma_{кр} = \frac{f(w_{кр}) + p(2i + 1)}{w_{кр}} = \frac{p + f(w_{кр})}{w_{кр}} + \frac{2p}{w_{кр}} i\mathbf{L} \quad (2.50)$$

Для систем автоматического управления с запаздыванием основное значение имеет минимальное критическое время запаздывания (при $i = 0$), которое является в то же время и граничным.

$$t_{кр} = \frac{p + f(w_{кр})}{w_{кр}} = \frac{p + \text{Arctg} \frac{v(w_{кр})}{u(w_{кр})}}{w_{кр}} = \frac{j(w_{кр})}{w_{кр}}, \quad (2.51)$$

где $j(w_{кр}) = p + \text{Arctg} \frac{v(w_{кр})}{w_{кр}}$ – запас устойчивости по фазе.

Пример 2.7

Пусть передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием и последовательно включенным аperiодическим звеном I порядка имеет вид

$$W_t(s) = Ke^{-st} / (1 + sT)$$

Определить критическое время запаздывания $t_{кр}$. Частотная передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием

$$W_t(jw) = Ke^{-jwT} / (1 + jwT)$$

Условие (2.48) в данном случае будет

$$|W_t(jw_{кр})| = |K / (1 + jw_{кр}T)| = K \sqrt{1 + w_{кр}^2 T^2} = 1$$

Отсюда находим критическую частоту

$$w_{кр} = \sqrt{K^2 - 1} / T, \quad K > 1.$$

Фазовый сдвиг на критической частоте

$$f(w_{кр}) = \text{Arctg } w_{кр} T = -\text{Arctg } \sqrt{K^2 - 1}.$$

По (2.51) находим критическое время запаздывания

$$t_{кр} = \frac{p - \text{Arctg } \sqrt{K^2 - 1}}{w_{кр}} = T \frac{p - \text{Arctg } \sqrt{K^2 - 1}}{\sqrt{K^2 - 1}}.$$

При сложном выражении для частотной передаточной функции разомкнутой системы определение критического времени запаздывания проще всего выполнить графически. Действительно, условие $A(w_{кр}) = |W(jw_{кр})| = 1$ определяется пересечением годографа $W(jw)$ с окружностью единичного радиуса с центром в начале координат (рис.2.22). Точка пересечения определяет одновременно $w_{кр}$ и угол $f(w_{кр})$, который после деления на $w_{кр}$ дает значение критического времени запаздывания.

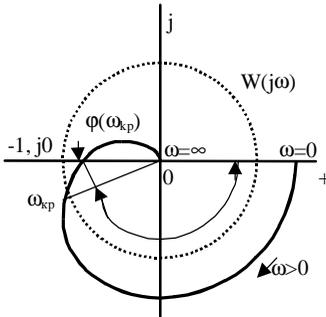


Рис. 2.22

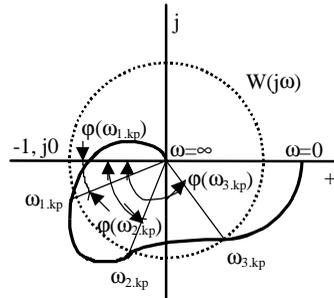


Рис.2.23

Если имеется несколько точек пересечения годографа $W(jw)$ с окружностью единичного радиуса, как показано на рис.2.23, то система будет иметь несколько критических граничных времен запаздывания

$$t_{1,кр} = \frac{j(w_{1,кр})}{W_{1,кр}}; \quad t_{2,кр} = \frac{j(w_{2,кр})}{W_{2,кр}}; \quad t_{3,кр} = \frac{j(w_{3,кр})}{W_{3,кр}},$$

причем минимальное время запаздывания равно $t_{\text{кр min}} = t_{1, \text{кр}}$. Система будет устойчива при $t < t_{1, \text{кр}}$, а также при $t_{2, \text{кр}} < t < t_{3, \text{кр}}$. Система будет неустойчива при $t_{1, \text{кр}} < t < t_{2, \text{кр}}$, а также при $t > t_{3, \text{кр}}$. Такое чередование участков устойчивости и неустойчивости системы при непрерывном изменении t (а также других параметров системы) является характерной особенностью многих систем с постоянным запаздыванием. Для повышения быстродействия и точности системы время запаздывания стремятся уменьшить, поэтому критерий устойчивости формулируется лишь для минимального времени запаздывания. Система автоматического управления будет устойчива, если её время запаздывания t меньше минимального критического времени запаздывания $t < t_{\text{кр, min}}$.

Критическое время запаздывания легко определяется и тогда, когда для исследования системы с запаздыванием применяют логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАХ) и фазочастотные (ЛФХ) характеристики. В этом случае окружность единичного радиуса представляют осью абсцисс. ЛАХ системы с запаздыванием совпадает с ЛАХ исходной системы без запаздывания. Дополнительный фазовый сдвиг, который надо учесть при построении ЛФХ системы с запаздыванием определяют из соотношения $f_t(w) = f(w) - wt$. Точки пересечения ЛАХ с осью абсцисс определяют критические частоты $W_{i, \text{кр}}$, а запасы по фазе (с учетом кратности), отнесенные к соответствующим критическим частотам, определяют критические времена запаздывания $t_{i, \text{кр}}$.

Звенья с распределенными параметрами иногда имеют передаточные функции вида:

$$W(s) = K / \sqrt{s} \quad (2.52)$$

$$W(s) = K / (1 + \sqrt{st}) \quad (2.53)$$

$$W(s) = e^{-\sqrt{st}} \quad (2.54)$$

где K – коэффициент усиления звена.

Первые два выражения отличаются от передаточных функций интегрирующего и инерционных звеньев наличием квадратного корня. По аналогии такие звенья называют полуинтегрирующими и полунинерционными. Звенья, имеющие передаточные функции вида (2.52–2.54) называют иррациональными звеньями. Выражение (2.54) не только иррационально, но и трансцендентно. С такими звеньями обычно встречаются при рассмотрении различных диффузионных и тепловых объектов, линий связи с потерями, с распределенными сопротивлениями и емкостями и т.п.

Устойчивость замкнутых систем автоматического управления с иррациональными звеньями может быть исследована с помощью критерия устойчивости Найквиста. Его формулировка аналогична той, что и для обычных систем управления с дробно-рациональными передаточными функциями.

2.2.6. Устойчивость нестационарных систем.

Нестационарными системами называют линейные системы управления, процессы в которых описываются линейными дифференциальными уравнениями с переменными во времени коэффициентами.

$$\begin{aligned} [a_0(t)p^n + a_1(t)p^{n-1} + \mathbf{L} + a_n(t)]x(t) = \\ = [b_0(t)p^m + b_1(t)p^{m-1} + \mathbf{L} + b_m(t)]g(t), \end{aligned} \quad (2.55)$$

где $x(t)$ и $g(t)$ – выходная и входная величины соответственно,

$a_i(t), b_i(t)$ – переменные коэффициенты, известные функции времени, которые задаются либо аналитически, либо графически.

Для нестационарных систем понятие устойчивости имеет определенную специфику. Предположим, что входная величина системы $g(t) = g_0 = \text{Const}$, а переходные процессы к моменту времени t_1 закончились, т.е. если принять $p = \frac{d}{dt} = 0$, то из (2.55) для $t > t_1$

следует $x(t) = \frac{b_m(t)}{a_n(t)} g_0$.

Отсюда видно, что в зависимости от характера изменения коэффициентов $a_n(t)$ и $b_m(t)$ даже при постоянной входной величине

выходная величина может изменяться неограниченно долго. Установившегося значения выходной величины в нестационарной системе за время её работы не будет и понятие асимптотической устойчивости системы теряет свой смысл.

Хотя существуют точные методы исследования устойчивости нестационарных систем, но они довольно сложны и на практике обычно пользуются приближенными методами. Наиболее популярным приближенным методом является метод замораживания коэффициентов. Он может применяться в тех случаях, когда нестационарная система работает в течение ограниченного интервала времени T , а коэффициенты уравнения (2.55) за время протекания переходного процесса в системе изменяются относительно мало.

В соответствии с этим методом, для некоторого фиксированного значения времени $t=t_k$ определяют значения коэффициентов дифференциального уравнения (2.55) $a_i(t_k), b_i(t_k)$, т.е. заменяют исходную нестационарную систему приближенной стационарной и исследуют её на устойчивость, применяя какой-либо критерий устойчивости. Если полученная таким образом система устойчива, то считают, что исследуемая нестационарная система тоже устойчива в рассматриваемый момент времени. Такую процедуру повторяют для других моментов времени, лежащих в интервале $0 \leq t \leq T$, где T – время работы системы.

Если во всем рабочем интервале времени T условия устойчивости стационарной системы, получаемой методом замораживания коэффициентов, выполняются, то исходную нестационарную систему на этом интервале считают устойчивой.

Эффективность рассмотренного метода зависит от правильного выбора фиксированных моментов времени, для которых замораживаются коэффициенты. Необходимо так выбирать эти моменты, чтобы охватить все возможные варианты значений коэффициентов, обращая особое внимание на опасные точки, в которых происходит значительное изменение коэффициентов e , смена его знака и т.п.

В общем случае, когда коэффициенты уравнения (2.55) значительно изменяются, для исследования устойчивости нестационарных систем пользуются понятием технической устойчивости, или устойчивости на конечном интервале времени.

Систему управления считают технически устойчивой (устойчивой на заданном интервале времени T), если выходная величина $x(t)$ не превосходит некоторой наперед заданной величины $x_{доп}$ при $0 \leq t \leq T$. Допустимая величина $x_{доп}$ выбирается в каждом конкретном случае из технических соображений.

На рис.2.24 показаны возможные изменения $x(t)$ для нестационарных систем. Кривые 1 и 2 соответствуют технически устойчивой системе, а кривые 3 и 4 – технически неустойчивой системе. Из этого же рисунка видно, что система может быть одновременно устойчива

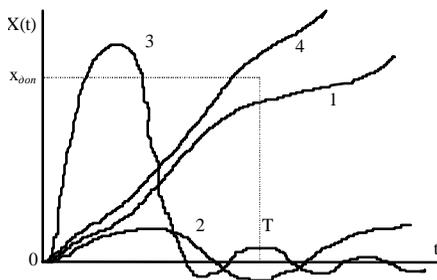


Рис. 2.24

и неустойчива асимптотически (кривая 1) и наоборот, неустойчива технически и устойчива асимптотически (кривая 3). Так как в нестационарной системе изменение $x(t)$ зависит от момента подачи входного сигнала $g(t)$, то на техническую устойчивость оказывают влияние начальные условия и характер входного сигнала.

В настоящее время не существует достаточно простых и достаточно общих критериев технической устойчивости. По-видимому, единственный способ проверки устойчивости заключается в нахождении выходной величины $x(t)$ при заданном входном воздействии $g(t)$ методами математического моделирования с помощью ЭВМ.

Глава 3. Построение областей устойчивости в плоскости параметров системы. Метод D-разбиения

Большое практическое значение при исследовании устойчивости имеет задача построения областей устойчивости в плоскости одного или двух параметров, влияние которых на устойчивость анализируется. Уравнение границ областей устойчивости можно находить, пользуясь каким-либо критерием устойчивости.

Например, по критерию Михайлова система попадает на границу устойчивости, если кривая Михайлова проходит через нуль, причем так, что можно малой ее деформацией удовлетворить условиям устойчивости.

Условие прохождения кривой Михайлова через нуль выражается следующим образом:

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = 0, \text{ откуда } X(\omega) = 0, Y(\omega) = 0 \quad (3.1)$$

Из этих уравнений можно получить уравнение кривой в плоскости параметров, на которой вещественный корень или пара чисто мнимых корней обращаются в нуль.

Построение областей устойчивости по критерию Найквиста приводит к такому же уравнению (3.1). В самом деле, система будет находиться на границе устойчивости, когда характеристика $W(j\omega)$ пройдет через точку $(-1; j0)$, причем так, что ее малой деформацией можно будет удовлетворить условиям устойчивости. Таким образом, уравнение границы, на которой обращается в нуль вещественный корень или вещественная часть пары чисто мнимых корней, получается из условия

$$1 + W(j\omega) = \frac{N(j\omega) + K(j\omega)}{N(j\omega)} = 0,$$

откуда

$$K(j\omega) + N(j\omega) = D(j\omega) = 0.$$

Однако чаще всего на практике применяют наиболее общий метод построения областей устойчивости, который был предложен Ю.И. Наймарком и названный им методом D-разбиения.

3.1. Понятие о D-разбиении.

Рассмотрим для простоты характеристическое уравнение третьего порядка при $a_0 = 1$.

$$D(p) = p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0 \quad (3.2)$$

Если по трем взаимно перпендикулярным осям откладывать значения коэффициентов a_1 , a_2 , и a_3 , то получим трехмерное пространство коэффициентов, каждой точке которого соответствует вполне определенный полином третьей степени и вполне определенные три корня в комплексной плоскости корней p . Расположение корней на комплексной плоскости зависит от численных значений коэффициентов.

При некотором значении коэффициентов уравнения (3.2) один из корней попадает в начало координат или пара корней попадает на мнимую ось, т.е. корни его будут иметь вид 0 или $\pm jw_k$ и, следовательно, соответствующая точка в пространстве параметров будет удовлетворять уравнению

$$D(jw_k) = (jw_k)^3 + a_1(jw_k)^2 + a_2(jw_k) + a_3 = 0. \quad (3.3)$$

Этому уравнению при $-\infty \leq w \leq +\infty$ соответствует некоторая поверхность S в пространстве коэффициентов.

При изменении коэффициентов a_i корни характеристического уравнения также изменяются и попадают на мнимую ось тогда, когда точка в пространстве коэффициентов попадает на поверхность S . При пересечении такой поверхности корни переходят из одной полуплоскости корней в другую. Следовательно, поверхность S разделяет пространство коэффициентов на области, каждой точке которых соответствует определенное одинаковое число правых и левых корней. Эти области обозначают $D(m)$, где m – число правых корней характеристического уравнения. Разбиение пространства коэффициентов на области с одинаковым числом правых корней внутри каждой области и выделение среди полученных областей области устойчивости называют методом D -разбиения.

Для характеристического уравнения третьего порядка в пространстве коэффициентов можно наметить четыре области: $D(3)$, $D(2)$, $D(1)$, $D(0)$. Последняя область будет областью устойчивости.

Если изменяются не все коэффициенты, а часть из них, например два – a_1 и a_2 при $a_3 = \text{const}$, то вместо поверхности получим линию, которая является сечением поверхности S плоскостью $a_3 = \text{const}$. Эта линия разделит плоскость коэффициентов на области с одинаковым числом правых корней (рис. 3.1).

Для уравнений более высокого порядка ($n > 3$) получается многомерное пространство и гиперповерхности, разбивающие это пространство на области. В этом случае результаты теряют наглядность. Однако, поскольку переход

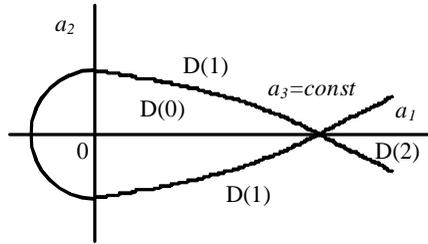


Рис. 3.1

через границу D-разбиения в пространстве коэффициентов соответствует переходу корней характеристического уравнения через мнимую ось, то уравнение границы D-разбиения в самом общем случае будет

$$D(jw) = (jw)^n + a_1(jw)^{n-1} + \mathbf{L} + a_n = 0. \quad (3.4)$$

Отсюда видно, что уравнение границы D-разбиения может быть получено из характеристического уравнения системы заменой $p = jw$.

Границу D-разбиения можно строить не только в пространстве коэффициентов характеристического уравнения, но и в пространстве параметров системы, таких как постоянные времени, коэффициентов усиления и т.п., от которых зависят сами коэффициенты характеристического уравнения.

3.2. D-разбиение по одному параметру.

Пусть требуется выяснить влияние какого-либо параметра R, линейно входящего в характеристическое уравнение. Для этого рекомендуется характеристическое уравнение привести к виду

$$D(p) = M(p) + RN(p) = 0, \quad (3.5)$$

где M(p) и N(p) полиномы, не зависящие от R.

Граница D-разбиения определяется уравнением

$$D(jw) = M(jw) + RN(jw) = 0, \quad (3.6)$$

откуда

$$\bar{R} = -M(jw)/N(jw) = X(w) + jY(w), \quad (3.7)$$

Параметр \bar{R} получается комплексным числом (что отмечено черточкой сверху). Однако в линейных системах он всегда вещественное число (постоянная времени, коэффициент усиления и т.п.).

Поэтому (3.7) следовало бы дополнить условием $Y(w) = 0$. Но при первоначальном построении мы не будем делать этого ограничения.

Придавая w значения от $-\infty$ до $+\infty$, можно по (3.7) вычислить $X(w)$ и $Y(w)$ и построить на комплексной плоскости \bar{R} границу D-разбиения (рис. 3.2).

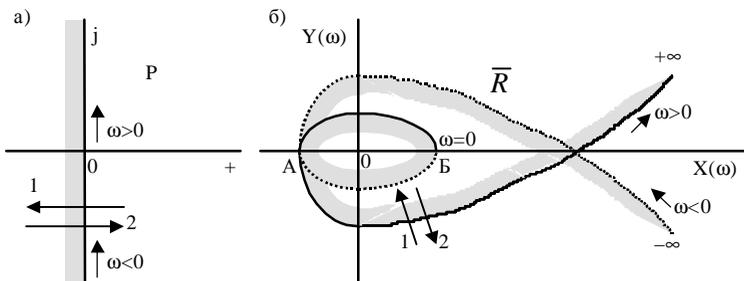


Рис. 3.2

При этом достаточно построить ее для положительных значений w а затем дополнить зеркальным отображением построенного участка относительно действительной оси для отрицательных w .

Затем приступают к штриховке. Если в плоскости корней p двигаться по мнимой оси при изменении w от $-\infty$ до $+\infty$ и штриховать ее слева (Рис.3.2,а), то такому движению в плоскости \bar{R} соответствует движение по границе D-разбиения, которую также штрихуют слева по обходу при изменении w от $-\infty$ до $+\infty$, (рис.3.2,б).

Если в плоскости \bar{R} пересекать границу D-разбиения по направлению штриховки (стрелка 1), то в плоскости корней один из корней переходит из правой полуплоскости в левую. Если же пересекать границу против штриховки, (стрелка 2), то в плоскости корней один из корней переходит из левой полуплоскости в правую.

Если штриховка двойная, как, например, в точке пересечения кривых, то мнимую ось пересекают два корня.

Для определения области $D(m)$, и в частности области $D(0)$, достаточно знать распределение корней при каком-либо одном произвольном значении параметра $\bar{R} = \bar{R}_0$. Переходя от этого параметра к любому другому, по числу пересечений границы D-разбиения, на-

правлению и числу штриховок можно определить значение $D(m)$ в любой другой точке.

Претендентом на область устойчивости является область, внутрь которой направлена штриховка и которая поэтому соответствует области с наибольшим числом левых корней. Чтобы установить, является ли эта область действительно областью устойчивости, необходимо задаться каким-либо значением \bar{R}_0 , лежащим в этой области. Подставив его в характеристическое уравнение и используя любой критерий устойчивости, нужно установить, все ли корни характеристического уравнения будут при этом левыми. Если при этом не все корни будут левыми, то области устойчивости нет, т.е. изменением только параметра \bar{R} нельзя сделать систему устойчивой.

Так как изменяемый параметр является вещественным числом, то из полученной области устойчивости нужно выделить только отрезок устойчивости, т.е. отрезок вещественной оси, лежащий в области устойчивости, например отрезок АБ на рис. 3.2,б.

Пример 3.1

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы автоматического управления имеет вид

$$D(p) = (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K = 0,$$

где K – коэффициент усиления разомкнутой системы; T_1, T_2, T_3 – постоянные времени отдельных динамических звеньев

Требуется построить границу D -разбиения в плоскости коэффициента усиления.

Перепишем характеристическое уравнение в виде

$$D(p) = M(p) + \bar{R}N(p) = 0,$$

где $M(p) = (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)$; $N(p) = 1$; $\bar{R} = K$.

Подставляя в характеристическое уравнение $p = j\omega$, получим выражение для границы D -разбиения:

$$D(j\omega) = (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3) + K = M(j\omega) + \bar{R}N(j\omega) = 0,$$

откуда

$$\bar{R} = K = M(j\omega) / N(j\omega) = -(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3) = X(\omega) + jY(\omega)$$

где

$$X(\omega) = (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)\omega^2 - 1; \quad Y(\omega) = \omega [T_1 T_2 T_3 \omega^2 - (T_1 + T_2 + T_3)]$$

Задаваясь различными значениями частоты $\omega \geq 0$, определяем $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ и строим на комплексной плоскости кривую D-

разбиения, соответствующую положительным частотам (сплошная линия на рис.3.3). Для отрицательных частот ветвь кривой строим как зеркальное отображение относительно вещественной оси (пунктирная линия).

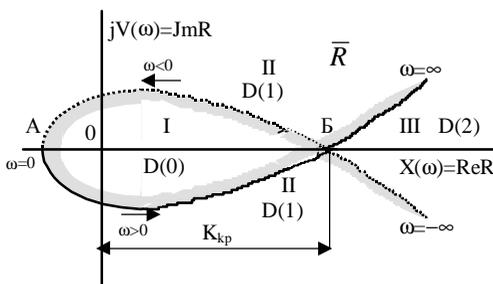


Рис. 3.3

Затем кривую D-разбиения штрихуем слева по обходу при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Кривая D-разбиения делит плоскость на три области – I, II и III. Претендентом на область устойчивости является область I, так как к ней направлена штриховка. Для проверки, действительно ли эта область является областью устойчивости, задаемся значением $\bar{R} = \bar{R}_0 = 0$, лежащим в этой области, подставляем его в характеристическое уравнение и определяем корни, получающегося при этом уравнения

$$D(p) = (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) = 0,$$

все корни которого $p = -1/T_1$; $p = -1/T_2$; $p = -1/T_3$ являются левыми. Следовательно, область I является областью устойчивости $D(0)$. Поскольку коэффициент усиления K не является комплексной величиной, то нас будет интересовать только отрезок устойчивости AB, совпадающий с действительной осью, находящейся в области устойчивости. Система будет устойчива, если значение K изменяется в пределах $-1 < K < K_{кр}$. Отрицательным значениям коэффициента усиления соответствует положительная обратная связь.

Для нахождения критического значения коэффициента усиления определим сначала значение w , при которой $Y(w) = 0$. Если корень этого уравнения $w = w_0$, то $K_{кр} = X(w_0)$. Производя вычисления, получаем

$$w_0^2 = (T_1 + T_2 + T_3) / T_1 T_2 T_3,$$

$$K_{кр} = X(w_0) = (1 + t_2 + t_3)(1 + 1/t_2 + 1/t_3) - 1,$$

где $t_2 = T_2 / T_1$; $t_3 = T_3 / T_1$

На рис. 3.3 показаны области $D(0), D(1), D(2)$. Область $D(3)$ отсутствует. Это означает, что при положительных значениях постоянных времени и любом значении K невозможно, чтобы все три корня характеристического уравнения были правыми.

Пример 3.2

В рассмотренном ранее примере исследуем влияние постоянной времени T_1 на устойчивость системы. Преобразуем характеристическое уравнение к виду

$$D(p) = [(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K] + T_1 [p(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)] = M(p) + \bar{T}_1 N(p)$$

где $M(p) = (1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K$; $N(p) = p(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)$.

\bar{T}_1 временно будем считать комплексным числом.

Подставляя в характеристическое уравнение $p = jw$, получим выражение для границы D -разбиения.

$$D(jw) = M(jw) + \bar{T}_1 N(jw) = (1 + jwT_2)(1 + jwT_3) + K + T_1 jw(1 + jwT_2) \cdot (1 + jwT_3) = 0,$$

откуда

$$\bar{T}_1 = -[(1 + jwT_2)(1 + jwT_3) + K] / [jw(1 + jwT_2)(1 + jwT_3)] = X(w) + jY(w),$$

Задавая различные значения частоты, можно вычислить $X(w)$ и $Y(w)$, а затем построить границу D -разбиения, рис.3.4.

Кривая штрихуется слева по обходу при изменении частоты w от $-\infty$ до $+\infty$.

Кривая разбивает плоскость \bar{T}_1 на четыре области, показанных на рис.3.4. Претендентами на область устойчивости являются области *I* и *III*.

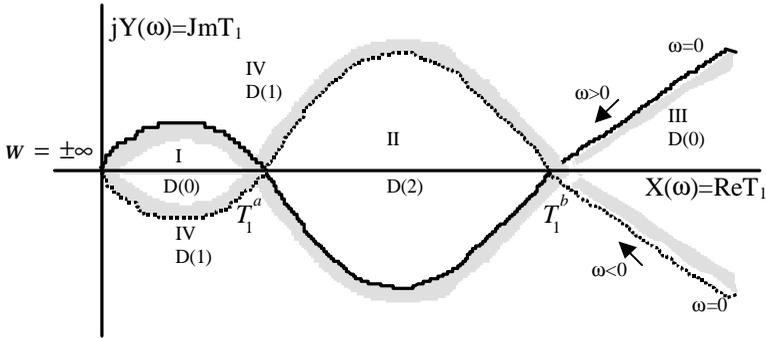


Рис. 3.4

Далее нужно проверить, является ли область *I* действительно областью устойчивости. При $T_1=0$ характеристическое уравнение превращается в уравнение второго порядка с положительными коэффициентами, следовательно, оно имеет все левые корни. Однако, строго говоря, в области *I* $T_1 \neq 0$ и при этом характеристическое уравнение будет третьей степени. При уменьшении T_1 один из корней характеристического уравнения будет перемещаться в плоскости корней влево и при $T_1 = 0$ становится отрицательным и бесконечно большим. Следуя теореме о непрерывной зависимости корней от коэффициентов уравнения, можно утверждать, что система будет устойчивой не только при $T_1 = 0$, но и в некоторой области малых значений $T_1 > 0$. Следовательно, область *I* является областью устойчивости $D(0)$.

Пересекая кривую D -разбиения, по числу штриховок и их направлению, размечаем области $D(1)$ и $D(2)$. При этом заметим, что выявляется еще одна области устойчивости $D(0)$, область *III*.

Поскольку T_1 является вещественным числом, то нас будут интересовать отрезки части оси абсцисс, соответствующие зонам устойчивости.

Таким образом, система будет устойчива при $0 \leq T_1 \leq T_1^a$ и при $T_1 \geq T_1^b$ и неустойчива при $T_1^a < T_1 < T_1^b$.

3.3. D-разбиение по двум параметрам.

Этот случай часто встречается на практике. Пусть требуется выяснить влияние на устойчивость двух параметров, которые входят в характеристическое уравнение замкнутой системы линейно и так, что это уравнение можно привести к виду

$$D(p) = nN(p) + mM(p) + L(p) = 0 \quad (3.8)$$

где $N(p)$, $M(p)$, $L(p)$ – полиномы от p ; v и μ – изменяемые параметры, влиянием которых на устойчивость системы интересуются.

Подставляя в (3.8) $p=jw$, получим выражение для границы D – разбиения в плоскости параметров

$$D(jv) = nN(jv) + mM(jv) + L(jv) = 0. \quad (3.9)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} N(jw) &= N_1(w) + jN_2(w) \\ M(jw) &= M_1(w) + jM_2(w) \\ L(jw) &= L_1(w) + jL_2(w) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

и разобьем (3.9) на два уравнения, приравняв отдельно вещественную и мнимую части нулю

$$\left. \begin{aligned} nN_1(w) + mM_1(w) + L_1(w) &= 0 \\ nN_2(w) + mM_2(w) + L_2(w) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Два линейных уравнения с двумя неизвестными $f(v,\mu)=0$ и $\varphi(v,\mu)=0$ будут независимы, если их якобиан $D(f,\varphi)/D(v,\mu)$ не обращается в нуль тождественно; в противном случае одно уравнение есть следствие другого и они имеют бесконечное множество решений. Легко видеть, что якобиан нашей системы уравнений представляет собой главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} N_1(w) & M_1(w) \\ N_2(w) & M_2(w) \end{vmatrix}.$$

Решение системы уравнений относительно v и μ

$$\left. \begin{aligned} v &= \Delta_1 / \Delta; \\ \mu &= \Delta_2 / \Delta \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

где $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -L_1(w) & M_1(w) \\ -L_2(w) & M_2(w) \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} N_1(w) & -L_1(w) \\ N_2(w) & -L_2(w) \end{vmatrix}$ частные определители системы.

Обратим внимание на то, что уравнения (3.11) и члены в них должны быть упорядочены, а именно: в 1-й строке пишется уравнение, полученное из приравнивания нулю вещественной части $D(j\omega)$, во 2-й – мнимой; сначала в каждой строке пишутся члены, содержащие параметр, откладываемый на оси абсцисс, т.е. ν , затем члены с параметром μ , откладываемом на оси ординат. Нарушение этого порядка изменяет знак главного определителя системы и может привести к грубым ошибкам.

Задаваясь различными значениями ω от $-\infty$ до $+\infty$, для каждого ω по параметрическим уравнениям (3.12) определяем ν и μ и строим границу D-разбиения в плоскости этих параметров.

При этом возможны следующие случаи:

1. При заданной частоте ω_k главный определитель Δ (якобиан системы), а также определители Δ_1 и Δ_2 не равны нулю одновременно. Тогда уравнения (3.11) совместны, а их решение определяет для заданного значения частоты точку в плоскости параметров ν и μ . При фиксированном ω_k два уравнения (3.11) представляют собой в этом случае в плоскости параметров пересекающиеся прямые 1 и 2, показанные на рис.3.5,а. Семейство таких пересечений для разных ω обозначит кривую D-разбиения.

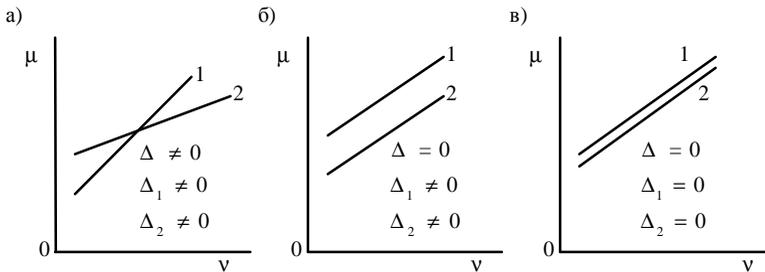


Рис. 3.5

2. При некотором значении ω_k определитель Δ обращается в нуль, а определители Δ_1 и Δ_2 не равны нулю. Тогда два уравнения (3.11) несовместимы и не имеют конечных решений. Прямые 1 и 2 параллельны и не пересекаются, как это показано на рис.3.5,б.

3. При некотором значении ω_k определитель Δ и оба определителя Δ_1 и Δ_2 равны нулю одновременно. Тогда ν и μ становятся неопределенными. В этом случае, как известно, одно из уравнений (3.11) становится следствием другого, отличаясь от него на некоторый постоянный множитель. Прямые 1 и 2 (рис.3.5,в) сливаются одна с другой и, таким образом, в плоскости параметров ν и μ для заданного ω_k получается не точка, а так называемая *особая прямая*, уравнение которой

$$n_1 N_1(w_k) + m M_1(w_k) + L_1(w_k) = 0.$$

Особая прямая не относится к кривой D-разбиения, так как всем точкам этой прямой соответствует одно и то же значение частоты $\omega = \omega_k$, и направление движения по прямой при изменении ω установить невозможно.

В большинстве практических задач особые прямые получаются при значениях $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. В этом случае хотя бы один из коэффициентов ν и μ входит в коэффициенты соответствующие свободному a_0 и старшему a_n членам характеристического уравнения. Особая прямая при $\omega = 0$ получается приравнением нулю коэффициента a_n , особая прямая при $\omega = \infty$ получается приравнением нулю коэффициента a_0 . Если a_0 и a_n не зависят от ν и μ , то эти особые прямые отсутствуют.

3.4. Правила штриховки.

После того как граница D-разбиения и особые прямые построены, их необходимо заштриховать, пользуясь следующими правилами:

1. При возрастании ω от $-\infty$ до $+\infty$ граница D-разбиения штрихуется слева, если главный определитель $\Delta > 0$, и справа, если $\Delta < 0$.

2. Поскольку, как отмечено ранее, ν и μ являются четными функциями ω , граница D-разбиения при положительных и отрицательных значениях частот совпадает. При изменении ω от $-\infty$ до ∞ мы обходим кривую D-разбиения два раза и поэтому *она штрихуется всегда двойной штриховкой*.

3. Штриховка особых прямых, как правило, одинарная и производится так, чтобы вблизи точки сопряжения особой прямой и кривой D-разбиения заштрихованных стороны прямой и кривой были направлены друг к другу (рис.3.6 а,б).

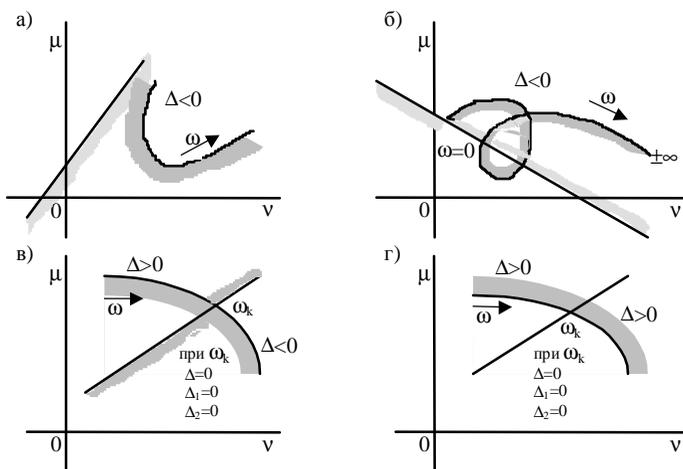


Рис. 3.6

4. В тех случаях, когда особая прямая получается при некотором конечном значении частоты $\omega_k \neq 0$ и при этом Δ проходит через нуль и меняет знак, особая прямая штрихуется по приведенному выше правилу, но *двойной штриховкой* (рис.3.6,в). Если же особая прямая имеет место при $\omega_k \neq 0$ и при этом Δ , проходя через нуль, не меняет знака, то особая прямая не штрихуется и исключается из рассмотрения (рис.3.6,г).

После нанесения штриховки определяют область, *претендующую* на область устойчивости, т.е. область, внутрь которой направлена штриховка. Определение равенства или неравенства нулю числа правых корней внутри области-претендента производится для любой точки внутри области или на ее границе с помощью любого из критериев устойчивости. Если окажется, что в данной точке система устойчива, то она будет устойчивой и для любой точки внутри этой области

Часто удобно определять число правых корней для точки, лежащей либо на границе области, либо в начале координат, либо на пересечении с одной из координатных осей, так как при этом уравнение обычно упрощается.

Если окажется, что не все корни характеристического уравнения будут левыми, то в плоскости параметров v и μ области устойчивости нет, т.е. изменением только v и μ сделать систему устойчивой

нельзя. Если же все корни окажутся левыми, то рассматриваемая область является областью устойчивости $D(0)$. После этого можно разметить области $D(m)$ в любой другой точке плоскости параметров ν и μ , имея в виду, что пересечение границы D-разбиения или особой прямой с двойной штриховкой против штриховки соответствует переходу двух комплексно-сопряженных корней из левой полуплоскости корней в правую и наоборот. Пересечение особой прямой с одинарной штриховкой соответствует переходу одного корня.

Пример 3.3

Рассмотрим ту же самую систему, что и ранее, с характеристическим уравнением $(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K = 0$, но будем интересоваться условиями ее устойчивости, когда два параметра системы – коэффициент усиления K и постоянная времени T_1 могут изменяться одновременно.

Для определения влияния изменения этих параметров на устойчивость, построим границу D-разбиения в плоскости двух параметров T_1 и K .

Перепишем характеристическое уравнение в виде

$$D(p) = n [T_2 T_3 p^3 + (T_2 + T_3) p^2 + p] + m + T_2 T_3 p^2 + (T_2 + T_3) p + 1 = 0$$

где $n = T_1$, $m = K$.

Подставляя в характеристическое уравнение $p = j\omega$, получаем выражение для границы D-разбиения.

$$D(j\omega) = nN(j\omega) + mM(j\omega) + L(j\omega) = 0$$

где

$$N(j\omega) = [T_2 T_3 (j\omega)^3 + (T_2 + T_3)(j\omega)^2 + j\omega]$$

$$M(j\omega) = 1,$$

$$L(j\omega) = T_2 T_3 (j\omega)^2 + (T_2 + T_3)(j\omega) + 1.$$

Приравнявая нулю действительную и мнимую части, получим следующую систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -n(T_2 + T_3)w^2 + m - T_2T_3w^2 + 1 &= 0 \\ -n(T_2T_3w^3 - w) + 0 \cdot m + (T_2 + T_3)w &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Решая эти уравнения относительно n и m , получим:

$$n = \frac{T_2 + T_3}{T_2T_3w^2 - 1},$$

$$m = \frac{(T_2T_3w^3 - 1)^2 + (T_2 + T_3)^2w^2}{T_2T_3w^2 - 1}.$$

Вычисляем главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -(T_2 + T_3)w^2 & 1 \\ -(T_2T_3w^3 - w) & 0 \end{vmatrix} = (T_2T_3w^2 - 1)w.$$

Кривую D-разбиения можно построить, задаваясь значениями частоты w от 0 до ∞ и вычисляя n и m по полученным формулам для фиксированных значений частоты.

На практике для облегчения построения сначала строят кривую D-разбиения качественно. Для этого качественно строят зависимости n и m от w , а затем исключая w , строят качественно границу D-разбиения. Такие операции показаны на рис 3.7.

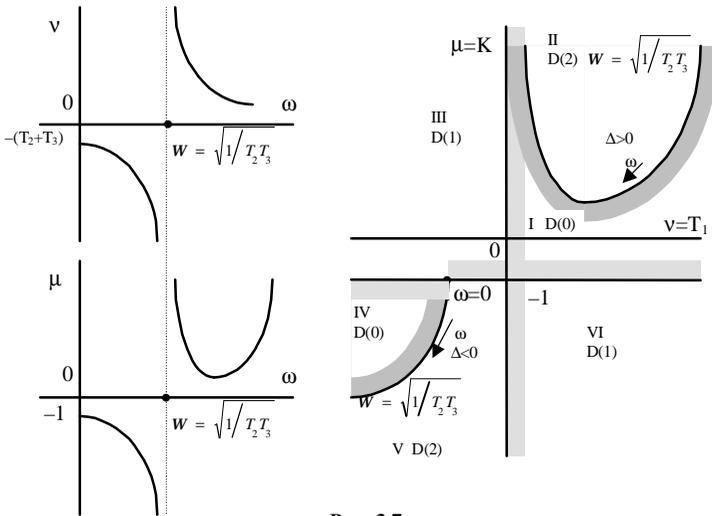


Рис. 3.7

Чтобы выделить особые прямые, приравняем нулю свободный член и коэффициент при старшей степени p характеристического уравнения. Особая прямая, соответствующая $w = \infty$, находится из выражения:

$$a_0 = T_1 T_2 T_3 = n T_2 T_3 = 0,$$

откуда уравнение особой прямой $n = 0$.

Особую прямую, соответствующую $w = 0$, находят из выражения $a_n = 1 + K = 1 + m = 0$,

откуда уравнение особой прямой $m = -1$.

Кривую D-разбиения штрихуют двойной штриховкой при изменении частоты w от 0 до ∞ слева по обходу, если главный определитель $\Delta > 0$ и справа по обходу, если определитель $\Delta < 0$. Особые прямые в данном случае штрихуют одинарной штриховкой, причем заштрихованные стороны прямых и кривой D-разбиения направлены друг к другу.

Главный определитель $\Delta < 0$ при $0 < w < \sqrt{1/(T_2 T_3)}$ и $\Delta > 0$ при $w > \sqrt{1/(T_2 T_3)}$.

Кривая D-разбиения и особые прямые делят плоскость (n, m) на шесть областей. Претендентами на область устойчивости являются области I и IV . Рассмотрим точки, принадлежащие положительной части оси абсцисс, т.е. полупрямой $m = K = 0$ при $n = T_1 > 0$. При любом $T_1 > 0$ и при $K=0$ характеристическое уравнение станет

$$D(p) = (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) = 0,$$

следовательно, все три корня характеристического уравнения будут левыми: $p_1 = -1/T_1$; $p_2 = -1/T_2$; $p_3 = -1/T_3$. Таким образом,

положительная часть оси абсцисс принадлежит области устойчивости $D(0)$, а поэтому и вся область I является областью устойчивости. Переходя из этой области в другие через границу D-разбиения или особую прямую размечаем области $D(1)$ и $D(2)$. Заметим, что в данном примере имеются две области устойчивости $D(0)$, однако мы будем интересоваться только областью I , соответствующей физически осуществимым положительным значениям постоянной времени $T_1 > 0$. В области IV $T_1 < 0$ и она интереса не представляет.

Из рис.3.7 видно, что при малых значениях коэффициента усиления K система устойчива при любых значениях T_1 . При больших K система устойчива лишь при достаточно малых либо достаточно больших значениях T_1 , что совпадает с результатами ранее рассмотренного примера.

Пример 3.4

Представляет практический интерес исследование устойчивости жидкостного ракетного двигателя ЖРД [8].

Низкочастотными колебаниями в камере сгорания называется вид вибрационного горения, при котором амплитуды колебаний давления во всех точках объема камеры сгорания одинаковы. Низкочастотные колебания в камерах сгорания ЖРД самопроизвольно возникают на некоторых режимах ее работы. Частота колебаний при этом обычно лежит в диапазоне 20...200 Гц. Эти колебания представляют собой наиболее простое проявление неустойчивости горения в ЖРД.

На рис.3.8 представлена принципиальная схема ЖРД с вытеснительной баллонной подачей. Жидкий окислитель и горючее из баллонов 1 и 2, в которых поддерживается постоянное давление p_0 , поступают по трубопроводам 3 в форсуночную головку 4 камеры сгорания 5. Форсуночная головка обеспечивает распыление и смешение компонентов. В непосредственной близости от нее сосредоточена зона интенсивного горения, в которой сгорает основная доля поступающего в камеру сгорания топлива. Продукты сгорания покидают камеру через сверхзвуковое сопло 6.

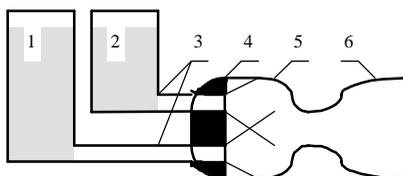


Рис. 3.8 Принципиальная схема ЖРД с вытеснительной баллонной подачей:

- 1 – баллон окислителя; 2 – баллон горючего;
- 3 – трубопровод; 4 – форсуночная головка;
- 5 – камера сгорания; 6 – сопло.

Принимая квадратичную зависимость гидравлического сопротивления от расхода жидкости, запишем уравнение прихода топлива, поступающего в камеру сгорания, в виде

$$G_{\phi} = G_1 + G_2 = A_1 \sqrt{p_6 - p} + A_2 \sqrt{p_6 - p} = A \sqrt{p_6 - p} \quad (3.13)$$

где G_{ϕ} – расход топлива через форсуночную головку; G_1 и G_2 – расходы окислителя и горючего; $A_1, A_2, A=A_1+A_2$ – коэффициенты, определяемые плотностью компонентов и коэффициентами гидравлического сопротивления трактов окислителя и горючего от баллонов до газового объема камеры сгорания; p_6 – давление в баллонах, которое принимается одинаковым для обоих компонентов; p – давление в камере сгорания.

Для расхода газов из сопла воспользуемся формулой для критического истечения

$$G_c = pF_* / b \quad (3.14)$$

где F_* – площадь критического сечения сопла; $b \sim \sqrt{T}$ – расходный комплекс; T – температура в камере сгорания.

На стационарном режиме работы приход компонентов в камеру сгорания равен их расходу через сопло. Из равенства (3.13) и (3.14) найдется давление \bar{p} , соответствующее этому режиму. Черта над буквой указывает на то, что рассматривается стационарное значение величины. Однако полученное таким образом значение давления не обязательно реализуется физически. Необходимо, чтобы оно было устойчивым.

В реальных условиях любая физическая система подвержена хотя бы малым случайным возмущениям. Простейшую динамическую модель камеры сгорания можно получить, приняв, что жидкое топливо, поступающее в камеру сгорания, мгновенно превращается в продукты сгорания. Если в рамках такой модели рассмотреть эволюцию системы после отклонения давления от стационарного значения на некоторую малую величину, то легко показать, что система всегда устойчива. Лучшее приближение к действительности можно получить, учтя конечную скорость образования продуктов сгорания.

Зависимость доли выгоревшего жидкого топлива от времени его пребывания в камере сгорания называют кривой выгорания. Простейшей аппроксимацией реальной кривой выгорания является ступенчатая функция. Ей соответствует следующая картина процесса горения: жидкое топливо, поступающее в камеру сгорания, в течение времени t проходит процесс подготовки, а затем мгновенно

сгорает, превращаясь в газ. Введение постоянного времени задержки t позволяет сформулировать весьма простую динамическую модель горения. В камере сгорания в каждый момент $t-t$

$$G_e(t) = G_\phi(t-t), \quad (3.15)$$

где $G_e(t)$ – скорость образования продуктов сгорания в момент времени t ; t – время запаздывания.

Качественный анализ показывает, что при конечном значении времени t переходный режим, возникающий после возмущения, приобретает колебательный характер. Если размах этих колебаний с течением времени будет расти, значит система неустойчива.

Чтобы получить уравнение динамики камеры сгорания, воспользуемся законом сохранения вещества. Изменение массы газа в камере сгорания в единицу времени равно разности секундного прихода газа, поступающего за счет горения, и секундного расхода газа, выходящего через сопло

$$\frac{dQ}{dt} = G_e(t) - G_c(t) \quad (3.16)$$

где Q – масса газа в камере сгорания. Для ее нахождения можно воспользоваться уравнением состояния идеального газа, но при этом пренебрежем объемом жидкой фазы несгоревшего топлива в объеме камеры v и будем считать температуру T в камере сгорания постоянной по пространству и времени. Тогда

$$Q = \frac{pv}{RT}. \quad (3.17)$$

Приход газа, поступающего в камеру сгорания G_r , и расход жидкости через форсуночную головку G_ϕ связаны соотношением (3.15). Однако расход топлива через форсуночную головку в общем случае не подчиняется уравнению (3.13), поскольку при нестационарном течении становится существенным инерционность и упругость столба жидкости в питающих трубопроводах. Если трубопроводы имеют малую длину, то влиянием этих факторов можно пренебречь.

Подставляя соотношения (3.13–3.15) в уравнение (3.16), получим

$$\frac{v}{RT} \frac{dp}{dt} = A\sqrt{p_e - p(t-t)} - \frac{pF_*}{b} \quad (3.18)$$

Уравнение (3.18) является нелинейным уравнением динамики камеры сгорания, устойчивость которой нам предстоит исследовать.

Согласно теореме Ляпунова условие устойчивости исходной нелинейной системы и линеаризованной вблизи стационарного режима идентичны. Полагая в (3.18) $dp/dt = 0$, получим соотношение, определяющее стационарное давление в камере сгорания и расход топлива. Эти величины отмечены чертой сверху

$$\bar{G} = A\sqrt{p_e - \bar{p}} = \frac{\bar{p}F_*}{b}. \quad (3.19)$$

Представим давление в камере сгорания в виде суммы стационарного значения и малого отклонения от него:

$$p = \bar{p} + dp' = \bar{p} + \bar{p}dp, \quad (3.20)$$

где dp' – отклонение давления от стационарного, $dp = dp'/\bar{p}$ – безразмерное значение dp' .

После подстановки (3.20) в уравнение (3.18) после несложных преобразований получим

$$\bar{Q} \frac{d dp}{dt} = \bar{G} \sqrt{1 - \frac{\bar{p}}{\Delta p} dp(t-t)} - \bar{G} - \bar{G}p \quad (3.21)$$

где $\Delta p = p_e - \bar{p}$ – перепад давления на участке от баллонов до газового объема камеры сгорания на стационарном режиме.

После разложения квадратного корня в ряд Маклорена, отбрасывания нелинейных членов и несложных преобразований получим

$$t_{II} dp + h^{-1} dp(t-t) + dp = 0 \quad (3.22)$$

$$\text{где } t_{II} = \bar{Q}/\bar{G}; \quad h = 2\Delta\bar{p}/\bar{p} \quad (3.23)$$

Постоянную h называют безразмерным перепадом давлений. Величина t_{II} , равная отношению массы газа в камере к его секундному расходу, представляет собой время пребывания газов в камере сгорания. Легко убедиться в том, что для цилиндрической камеры с коротким соплом время пребывания газов в камере равно отношению длины камеры к скорости газа в ней и от давления практически не зависит.

Уравнение (3.22) относится к классу линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и постоянными коэффициентами. Такие уравнения всегда удовлетворяют решениям вида

$$dp_i = d\bar{p}_i e^{z_i t}, \quad (3.24)$$

где $d\bar{p}_i$ и z_i – некоторые постоянные, не зависящие от времени.

После подстановки этого выражения в дифференциальное уравнение (3.22), опуская индекс i и сокращая на общий множитель, получим характеристическое уравнение, содержащее неизвестное z и заданные параметры системы

$$R(z) \equiv t_{II} z + h^{-1} e^{-zt} + 1 = 0. \quad (3.25)$$

Для построения границ устойчивости системы применим метод D-разбиений в плоскости двух параметров. Действительная часть одного из корней на границе устойчивости обращается в нуль, следовательно $z = j\omega$. Подставляя это значение в характеристическое уравнение, получим после деления его на действительную $R^* = 0$ и мнимую $R^{**} = 0$ части и умножения на h два уравнения

$$R^* = h + \cos \omega t = 0; \quad R^{**} = h\omega t_{II} - \sin \omega t = 0. \quad (3.26)$$

Уравнения (3.26) легко приводятся к виду

$$h = -\cos \bar{w}; \quad \bar{t} = -\bar{w} \operatorname{ctg} \bar{w}; \quad \bar{w} = \omega t; \quad \bar{t} = t/t_{II}, \quad (3.27)$$

где \bar{w} и \bar{t} – безразмерные частота и время запаздывания.

Уравнения (3.27) задают в параметрической форме кривые D-разбиения в координатах h, \bar{t} . Они представлены на рис.3.9 в фи-

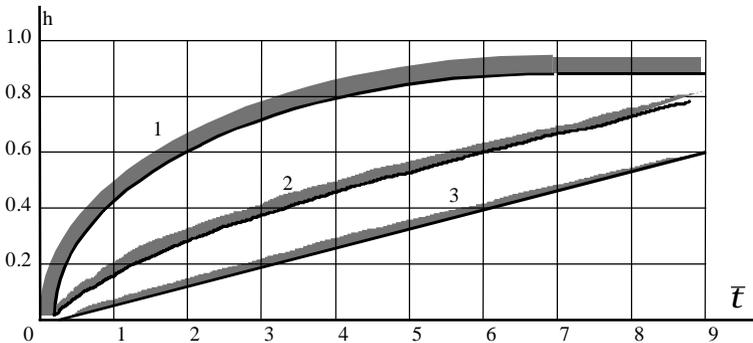


Рис. 3.9

зически реализуемой плоскости $h > 0, \bar{t} > 0$. По характеру изменения входящих функций в зависимости от \bar{w} можно сделать заключение, что кривые имеют бесконечное множество ветвей. Мы ограничимся тремя.

Ветвь 1 соответствует диапазонам изменения \bar{w} от $\pm p/2$ до $\pm p$. Ветвь n – диапазонам изменения от $\pm 2pn \pm p/2$ до $\pm 2pn \pm p$. Каждая ветвь кривой, таким образом, проходится дважды: один раз при $w \leq 0$ справа налево, другой раз при $w \geq 0$ в противоположном направлении.

Для определения направления штриховки оценим знак якобиана

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial R^*}{\partial h} & \frac{\partial R^*}{\partial t} \\ \frac{\partial R^{**}}{\partial h} & \frac{\partial R^{**}}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Учитывая, что $\frac{\partial R^*}{\partial h} = 1$, $\frac{\partial R^*}{\partial t} = -w \sin wt$,

$\frac{\partial R^{**}}{\partial h} = wt_{II}$, $\frac{\partial R^{**}}{\partial t} = -w \cos wt$, получим

$$\Delta = wh[1 + (wt_{II})^2]. \quad (3.28)$$

Если h, t положительные, то при $w > 0$ якобиан $\Delta > 0$ и, следовательно, учитывая направление движения вдоль кривой, её надо штриховать сверху. Если же $w < 0$, то $\Delta < 0$, однако направление движения противоположное, так что направление штриховки сохраняется. Таким образом, каждая из ветвей кривых штрихуется дважды с одной стороны, как это показано на рис.3.9.

Претендентом на область устойчивости является пространство над кривой 1. Чтобы определить число корней с положительной действительной частью в каждой из областей, определим их число на оси h . Полагая в характеристическом уравнении $t = 0$, получим, что вдоль оси h имеется всего один корень z_0 , который действителен и меньше нуля:

$$z_0 = -\frac{1}{t_{II}} \frac{h+1}{h}.$$

Из этого следует, что и во всей области, лежащей выше ветви 1 кривой D-разбиения, положительные корни отсутствуют. Таким образом, эта область является областью устойчивости $D(0)$ и будет единственной. Для того, чтобы попасть в область, лежащую между

кривыми 1 и 2, необходимо пересечь дважды заштрихованную кривую и тогда попадаем в область $D(2)$, где появляются два корня с положительной действительной частью и т.д.

Повышению устойчивости способствует возрастание h и уменьшение t . При этом существует некоторое предельное значение $h=1$. При $h>1$ система устойчива при любых t .

Здесь мы не будем проводить детального анализа полученных результатов. Заметим, что выводы, которые в конечном счете можно сделать, находятся в полном качественном соответствии с опытными данными [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория автоматического управления / Под редакцией акад. А.А. Воронова / ч.1. Теория линейных систем автоматического управления. М. 1986.
2. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Часть 1. М. 1965.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М. «Наука», 1968.
4. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М. «Наука», 1978.
5. Цыпкин Я.З., Бромберг П.В. О степени устойчивости линейных систем.–Известия АН СССР, ОТН, 1945, № 12.
6. Локк А.С. Управление снарядами (перевод с английского). Гос. издательство физико-математической литературы. М. 1958.
7. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М. «Высшая школа». 1989.
8. Нотанзон М.С. Неустойчивость горения. М. «Машиностроение». 1986.