Министерство образования Российской Федерации
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю. И. Медведев

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ
ЧАСТЬ 1

Рекомендовано
методическим советом Томского государственного университета
в качестве учебного пособия для специальности
“РОБОТЫ И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ”.

Томск-2004

Рецензенты:

Доктор ф-м. наук, профессор Архипов В. А.

Профессор каф. КИБЭВС ТУСУР Раводин О. М.

Медведев Ю. И.
Курс лекций. Часть 1: Учебное пособие.–Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004.–110с.

В первую часть учебного пособия включены вопросы теории автоматического управления линейных систем, их характеристики, передаточные функции, основные элементарные звенья систем управления, структурные схемы и их преобразования. Даются понятия нестационарных и квазистационарных систем.

Для студентов, обучающихся по программе специальности «Роботы и робототехнические системы».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Курс лекций по теории автоматического управления читается студентам физико-технического факультета, специализирующимся по программе «Роботы и робототехнические системы».

Необходимость написания пособия продиктована отсутствием достаточного количества учебной литературы, в частности хорошего учебника группы авторов под редакцией академика Воронова А. А., который и явился основой для создания лекционного курса. На наш взгляд в этом учебнике изложение материала в методическом отношении оказалось наиболее удачным.

Первая часть пособия посвящена вопросам теории линейных автоматических систем. Во введении сформулированы сущность и задачи проблем управления.

Первая глава посвящена основным понятиям и определениям, описанию фундаментальных принципов управления и алгоритмам функционирования систем.

Во второй главе дается математическое описание систем с помощью дифференциальных уравнений, передаточных функций, частотных и временных характеристик звеньев системы. Рассмотрены элементарные звенья и их характеристики.

Содержание третьей главы включает структурные схемы, правила их преобразования, нахождение передаточных функций одноконтурных и многоконтурных систем, частотных характеристик, дается представление математической модели системы управления с помощью ориентированных графов.

В четвертой главе рассмотрены многомерные стационарные системы, передаточные матрицы и импульсные переходные матрицы.

Глава пятая посвящена нестационарным и квазистационарным линейным системам и их особенностям при определении весовых и передаточных функций.

Первая часть курса по опыту преподавания занимает 34–36 лекционных часов.

ВВЕДЕНИЕ

Автоматизация производственных процессов, энергетических систем, транспорта, научно–испытательных установок и т.п., является одним из самых прогрессивных направлений в общем развитии науки и техники нашего времени. Широта автоматизации управления различными процессами во многом характеризует общий уровень и культуру производства на данном предприятии или же уровень и совершенство данного технического объекта. Передовые отрасли промышленности и энергетики немыслимы без широкой и полной автоматизации управления. Современные станки, заводы, автомобили, корабли, поезда, самолеты обязательно включают элементы автоматизации управления ими.

Полная автоматизация процессов управления – необходимая принадлежность и наиболее характерная черта техники настоящего времени и ближайшего будущего во всех ее отраслях.

Автоматизации подвергаются не только процессы управления машинами и другими сложными техническими объектами. Автоматизировать можно также технику инженерных расчетов при проектировании машин, предприятий, в том числе и при проектировании самих автоматических устройств.

Всякий рабочий процесс можно расчленить на ряд более простых составных, но связанных между собой процессов. Так обработка детали на токарном станке включает ряд следующих основных процессов: подготовку станка к работе, установку детали на станке, пуск станка, процесс резания, контроль резания, снятие изделия со станка. Эти процессы не равноценны.

В технических процессах можно выделить рабочие операции и операции управления. К рабочим операциям относят такие действия, непосредственным результатом которых является, например, требуемая обработка материала на станке и т.п. или, требуемое перемещение материала. Рабочие операции обычно сопряжены с большими затратами энергии. Если они выполняются человеком, то на них затрачиваются большие физические нагрузки (земляные работы, подъем грузов), во вредных производствах, в однообразных, утомительных для нервной системы операциях (завинчивания однотипных винтов при сборке), заполнения большого количества типовых документов, выполнение большого объема стандартных вычислений и т.п.). Замену труда человека в рабочих операциях называют *механизацией.*

Вместе с тем очевидно, что для правильного и высококачественного выполнения рабочих операций их необходимо направлять действиями другого рода – *операциями управления,* которые обеспечивают в нужные моменты времени начало, порядок следования и прекращение отдельных операций, выделяют для их выполнения необходимые ресурсы, задают нужные параметры самому процессу: направление, скорость рабочего инструмента, температуру, концентрацию в химическом процессе и т. д. Совокупность управляющих операций образует процесс управления.

В механизированном производстве человек не освобожден от функций управления и наблюдения за процессом. Замена труда человека в операциях управления действиями технических управляющих устройств называется *автоматизацией.* Техническое устройство, выполняющее операции управления без непосредственного участия человека, называется *автоматическим устройством.* Совокупность технических средств – машин, орудий труда, средств механизации, выполняющих данный процесс, с точки зрения управления, является *объектом управления.* Совокупность средств управления и объекта образует *систему управления.* Систему, в которой все рабочие и управляющие операции выполняют автоматические устройства, называют *автоматической системой.* В том случае, когда автоматизирована только часть операций, другая же их часть (обычно наиболее ответственная) остается за людьми, называют *автоматизированной системой* или *частично автоматической.* Объектами и операциями управления охватываются технические процессы и агрегаты, группы предприятий коллективы людей и организаций.

Глава 1. Основные понятия и определения.

§ 1.1 Координаты процесса.

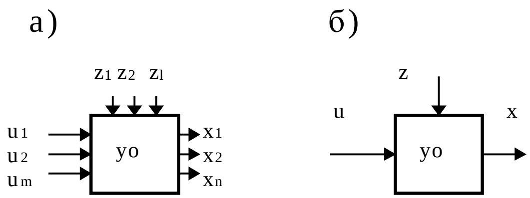


Рис. 1.1

Протекание всякого процесса характеризуется совокупностью физических величин – показателей процесса или координатами. Для осуществления управления и построения управляемых систем нужны знания двоякого вида: во первых– конкретные знания данного процесса, его технологии, и во вторых – знание принципов и методов управления, общих для самых разнообразных объектов и процессов. Конкретные, специальные знания позволяют установить, что и как следует изменить в системе, чтобы получить требуемый результат. Будем считать, что все это задано технологами и будем изучать только общие законы и методы управления. Для правильного и качественного ведения процесса некоторые из его координат –управляемые координаты – должны поддерживаться в определенных пределах или изменяться по определенному закону. Необходимость в управлении значениями координат возникает в том случае, когда нормальный ход процесса нарушается из-за различного рода возмущений – колебаний нагрузки, воздействий внешней среды или внутренних помех.

Пусть **x**=($x_{1.}$,$x_{2........}x_n$) – совокупность управляемых координат процесса. На схеме, изображенной на рис. 1,1,*а,б*. объект представлен прямоугольником, а управляемые координаты –выходные величины объекта – одиночными стрелками, если они изображают скалярные величины x_1, x_2, или двойными при изображении вектора **x**. На схеме показаны также возмущающие воздействия **z** = (z_1, z_2 .... z) и управляющие воздействия **u**(u_1,$u_{2,}$ $u_{m)}$, прикладываемые к управляющему органу объекта УО, с помощью которого можно изменять координаты **x**. Величины **x, u** и **z** могут быть связаны различными математическими зависимостями. В общем случае **x=A[z,u],** где **A**–оператор определяющий вид зависимости. В простейшем случае, когда это обычная функциональная зависимость

$$\mathbf{x = F\,[\,z,\,u\,]} \tag{1.1}$$

объект называют статическим или безынерционным, а зависимость (1.1) или ее графическое изображение – *статической характеристикой объекта*.

Если объект обладает инерцией, то изменения координат под действием возмущений или управлений происходят не мгновенно, и в этом случае объект называют *динамическим*. Величины **x, u, z** в динамических объектах связаны дифференциальными, интегральными или разностными уравнениями.

Изменения координат в нормальном, требуемом ходе процесса определяют совокупностью правил, предписаний или математических зависимостей, называемой *алгоритмом функционирования системы*. Алгоритм функционирования составляется на основании технологических, экономических и других требований без учета динамических искажений. В теории автоматического регулирования алгоритмы функционирования считают заданными.

Алгоритм *управления* будет зависеть как от алгоритма функционирования, так и от динамических свойств системы. Зная статические и динамические свойства системы управления, можно построить математическую модель системы и найти такой алгоритм управления, который обеспечивает заданный алгоритм функционирования при известных, заданных воздействиях. Однако, модель всегда приближенно отображает свойства оригинала, а возмущающие воздействия могут изменяться неизвестным заранее образом. Поэтому, при найденном алгоритме управления фактическое поведение системы может отличаться от желаемого, определяемого алгоритмом функционирования.

§ 1.2 Фундаментальные принципы управления.

Чтобы приблизить поведение системы к требуемому, алгоритм управления нужно увязать не только со свойствами системы и алгоритмом функционирования, но и с фактическим функционированием системы. В настоящее время известны и широко используются три фундаментальных принципа управления: разомкнутого управления, компенсации и обратной связи.

Принцип разомкнутого управления.

Сущность принципа состоит в том, что алгоритм управления вырабатывается только на основе заданного алгоритма функционирования и не контролируется другими факторами – возмущениями или выходными координатами процесса. Функциональная схема системы показана на рис.1.2. Задание $\mathbf{x_0(t)}$ алгоритма функциониро-

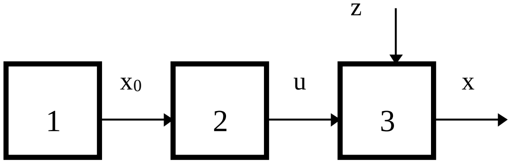


Рис. 1.2

вания может вырабатываться специальным устройством – задатчиком программы 1, или выполняться заранее при проектировании системы и использоваться при конструировании управляющего устройства 2, при этом блок 1 на схеме будет отсутствовать. Легко видеть, что схема имеет вид разомкнутой цепочки, в которой основное воздействие передается от входного элемента к выходному элементу 3, как показано стрелками. Близость $\mathbf{x}$ к $\mathbf{x_0}$ в разомкнутых системах обеспечивается только конструкцией и подбором физических закономерностей, действующих во всех элементах.

Несмотря на очевидные недостатки, этот принцип широко используется. Операции включения, отключения и переключения часто выполняют с помощью различных логических элементов и их наборов (выключателями, реле, элементами И, НЕ, ИЛИ и др.), каждый из которых может представлять собой элемент с управлением по разомкнутой цепи. Другим типом элементов могут быть датчики программы, состоящие из устройства запуска и самого программного элемента (магнитофон, профилированный кулачковый механизм, осуществляющий перемещение рабочего инструмента обрабатывающего станка по заданному контуру и т.п.).

К этому же типу относятся линейные преобразователи, например для пропорционального преобразования одной физической величины в другую, более удобную для использования, например, в электрическую. Другой их вид – усилители – имеют на входе и выходе одну и ту же физическую величину, но с различными значениями ее количественных показателей. Могут быть использованы и нелинейные функциональные преобразователи.

К элементам разомкнутого типа относятся и многие счетно решающие устройства, выполняющие операции дифференцирования, интегрирования и формирования разных дифференциально-интегральных операторов.

Принцип компенсации (управление по возмущению).

При больших возмущающих воздействиях разомкнутая цепь не обеспечивает требуемой точности выполнения алгоритма функционирования. Для повышения точности можно, измерив возмущение, внести коррективы в алгоритм управления, которые компенсировали бы отклонения алгоритма функционирования.

Поскольку отклонение регулируемой величины зависит не только от управляющего **u**, но и от возмущающего **z** воздействия, $x=F(u,z)$, то в принципе можно подобрать управление $u=R(z)$ таким образом, чтобы в установившемся режиме отклонение отсутствовало $x=x_0-F(u,z)=0$. Так, в простейшем линейном случае, если характеристика объекта в статике $x=k_0u-k_zz$, то, выбирая $u=x_0/k_0 + k_zz/k_0$, получим $x=x_0=\text{const}$.

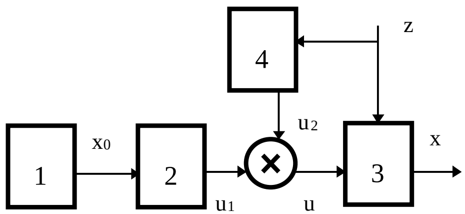


Рис. 1.3

Функциональная схема регулирования по возмущению показана на рис.1.3. Примерами систем компенсации могут служить биметаллическая система стержней с разными коэффициентами теплового расширения в маятнике хронометра, обеспечивающая постоянство длины маятника при колебаниях температуры; схема компаундирования генератора постоянного тока, обеспечивающая неизменность напряжения при колебаниях тока нагрузки (рис.1.4). Пусть э.д.с. генератора $E_г=кФ_b$ линейно зависит от его потока возбуждения $Ф_b$, а уменьшение напряжения вызвано только активным сопротивлением якоря, т.е. пропорционально току нагрузки, то для поддержания постоянства заданного напряжения $U_{г0}$ надо изменять э.д.с. генератора в функции тока нагрузки по закону $E_г=IR_a+U_{г0}$. Такое изменение осуществляют с помощью дополнительной компаундной обмотки КО. по которой проходит ток $I_н$, равный или пропорциональный току якоря I. С помощью компаундирования, выбирая коэффициент пропорциональности при I, можно уменьшить статизм характеристики до нуля и даже изменить знак статизма, получив возрастание напряжения при росте нагрузки (перекомпенсация).

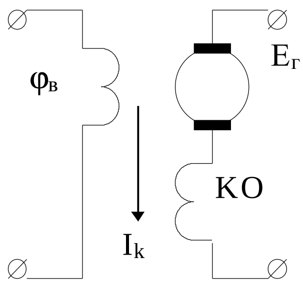


Рис. 1.4

Следует отметить, что при регулировании по возмущению мы можем учесть действие лишь одного возмущения, именно того, на которое реагирует регулятор. Измерение нагрузки, сравнительно легко осуществимое в электрических машинах, более трудно выполнить в неэлектрических двигателях и других объектах. Точная компенсация требует точной реализации требуемой функциональной зависимости между возмущением и воздействием регулятора на регулирующий орган. Эта зависимость чаще всего сложна, а иногда и неоднозначна. Поэтому реализуется она приближенно. Кроме того, другие возмущения, не измеряемые данным регулятором, вызывают изменения регулируемой величины, которые этот регулятор не может компенсировать. Такими дополнительными, некомпенсируемыми возмущениями в электрических машинах являются, например, колебания напряжения возбуждения, колебания скорости приводных двигателей, изменение сопротивления обмоток и щеток под влиянием колебаний температуры и других факторов и т. д. Поэтому регулирование по возмущению не отличается большой точностью.

Принцип обратной связи. Регулирование по отклонению.

Регулирование по отклонению отличается тем, что позволяет уменьшить отклонение независимо от того, какими причинами последнее вызвано, т.е. устраняет влияние любых возмущений без измерения их. На рис.1.5 показана схема, в которой коррективы в алгоритм управления вносятся по фактическому значению координат в системе. Для этой цели в конструкцию системы вводят дополнительную связь 4, в которую могут входить элементы для измерения **x** и для выработки корректирующих воздействий на управляющее устройство. Схема имеет вид замкнутой цепи, поэтому, осуществляемый в ней принцип называют принципом управления по замкнутому контуру. Поскольку направление передачи воздействий в дополнительной связи обратно направлению передачи основного воздействия на объект, введенную дополнительную цепь называют цепью обратной связи.

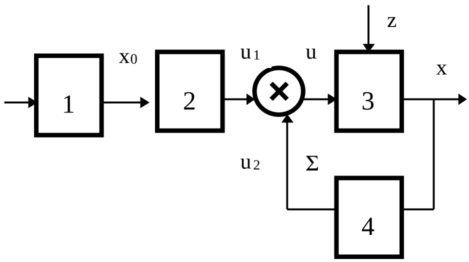


Рис. 1.5

Схема 1.5 представляет собой наиболее общий вид замкнутой системы. Однако, в управлении наиболее широко распространен частный вид замкнутых систем, когда коррекцию алгоритма управления осуществляют не по значениям координат, x, а по их отклонениям от значений, определяемым алгоритмом функционирования x_o, т.е. $\Delta x = x_o - x$. Такая схема с обратной связью показана на рис.1.6, в которой элемент 1, задающий алгоритм функционирования, и элемент сравнения – сумматор, осуществляющий вычитание x из x_o, т.е. вырабатывающий величину Δx, называемую *отклонением* или *ошибкой управления*. Часто оказывается целесообразным вырабатывать управляющее воздействие в функции не только сигнала ошибки управления, но и его производных и интегралов по времени.

Объект О и регулятор Р, рис.1.6, образуют замкнутою систему, называемую системой *автоматического регулирования* (САР). Обратную связь, образуемую регулятором, называют главной обратной связью. Кроме нее, внутри регулятора могут быть и другие местные обратные связи.

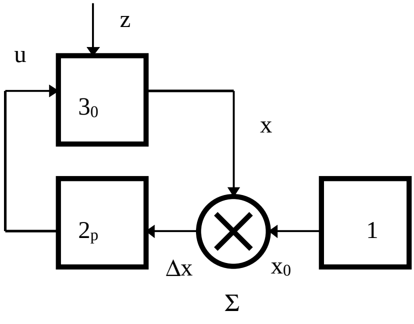


Рис. 1.6

САР вместе с регулируемым объектом представляет собой замкнутую систему. Процесс регулирования характеризуется передачей воздействий от одного звена к другому по замкнутому контуру. Все физические величины, участвующие в процессе, зависят друг от друга и влияют друг на друга. Поэтому здесь мы имеем не сумму процессов в отдельных звеньях системы, а единый круговой процесс. В процессе регулирования нельзя определить работу отдельного звена, не зная состояния в данный момент всех остальных звеньев. О качестве автоматического регулятора можно судить только тогда, когда исследована его работа совместно с регулируемым объектом.

Классический пример системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока показан на рис.1.7.

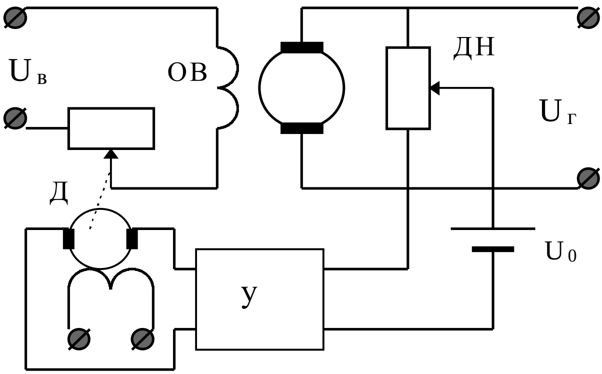


Рис. 1.7

С делителя напряжения ДН снимается напряжение $ku_г$, пропорциональное регулируемому напряжению $u_г$. Оно сравнивается с напряжением $u_о$ эталонной батареи. Разность $\Delta x = u_о - ku_г$ подается на вход усилителя У, к выходу которого подключен якорь двигателя постоянного тока Д. Двигатель приводит в движение регулирующий орган – реостат, включенный в цепь обмотки возбуждения ОВ генератора. При увеличении напряжения сверх заданной величины двигатель переместит ползунок реостата так, чтобы сопротивление реостата увеличилось и напряжение, подводимое к ОВ, уменьшилось. Вследствие этого уменьшится и регулируемое напряжение.

В данной схеме имеется усилительно-преобразующее устройство, питаемое извне от добавочного источника энергии. Такой регулятор называется регулятором непрямого действия. Однако иногда усилительно-преобразующего устройства может и не быть, т.е. чувствительный элемент может непосредственно (без дополнительного источника энергии) воздействовать на регулирующий орган. Такой регулятор называется регулятором прямого действия.

Выше говорилось об усилении и преобразовании воздействий, направленных по одному замкнутому контуру. Такая система называется *одноконтурной*. Однако в систему управления часто вводят ряд усовершенствований и усложняют закон регулирования. Появляются дополнительные контуры, так называемые *корректирующие устройства*. Существуют и связанные системы регулирования на сложных объектах, когда в единый автоматически работающий комплекс связаны несколько регуляторов с перекрестными связями между ними. Например, автопилот, который представляет собой связанную систему автоматического регулирования. Он включает в себя три самостоятельных канала управления – канал курса, тангажа или высоты, канал крена. Все три канала аналогичны. Они имеют гироскопические чувствительные элементы и действуют на свои рули. Но между ними имеются еще перекрестные связи. Например, для улучшения поворота самолета при изменении курса полезно самолет немного накренить, тем сильнее, чем на больший угол надо отклонить курс.

Весьма эффективно применение комбинированного регулирования: по возмущению и по отклонению. Такие схемы объединяют преимущества обоих способов регулирования. Естественно, что каждое добавление к схеме усложняет и удорожает регулятор, поэтому при выборе того или иного принципа регулирования следует взвесить все обстоятельства. Так, например, если требования к точности регулирования невысоки, но нагрузка, наиболее существенно влияющая на процесс, легко поддается измерению, можно применить регулироварие по возмущению; если такое регулирование не обеспечивает требуемой точности или если измерить возмущение сложно, можно рекомендовать регулирование по отклонению; если требования к процессу регулирования особенно жесткие, нужно применить комбинированный принцип. Функциональная схема комбинированного принципа управления показана на рис 1.8.

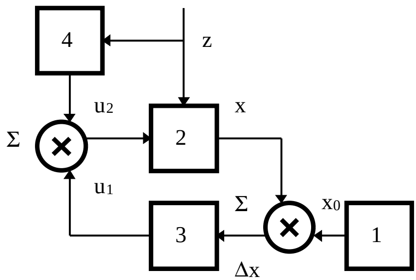


Рис. 1.8

Принцип обратной связи широко распространен не только в технике, но и в процессах управления, осуществляемых в живых организмах (системы регуляции различных функций организма – температуры, ритма кровообращения и др.). В управлении общественными организациями этот принцип реализуется в виде проверки исполнения принятых решений и распоряжений, играющих роль управляющих воздействий. В общем это связь в физических, биологических, экономических и других системах, основанная на обратном воздействии результата определенного явления на его причину. Явление обратной связи наблюдается в природе повсеместно.

§ 1.3 Алгоритмы функционирования.

На раннем этапе развития техники управления практически использовался лишь один вид алгоритмов – поддержание заданного постоянного значения регулируемой величины. Впоследствии число видов алгоритмов увеличивалось и к настоящему времени их существует шесть основных видов.

Стабилизация. Системы поддержания постоянства управляемой величины называют системами стабилизации. Алгоритм функционирования в них имеет вид $\mathbf{x_0(t)=const}$. Системы автоматической стабилизации могут быть построены на основе любого принципа управления. К таким системам относятся системы регулирования частоты и напряжения электрического тока на электростанциях, регулирования температуры и давления пара в котельных установках.

Известна важная особенность систем регулирования по отклонению. Если в них использовать регуляторы, состоящие только из элементов, осуществляющих обычные аналитические преобразования, т.е. обладающих аналитическими статическими характеристиками, то регулирование по отклонению может уменьшить, но не устранить ошибку.

В самом деле, рассмотрим схему с простейшими линейными преобразовательными звеньями. Уравнения статики для такой схемы (рис1.6) будут

$$x = k_0 u - k_z z, \quad u = k_p \Delta x = k_p \left(x_0 - x\right), \tag{1.2}$$

где k_0, k_p, k_z – постоянные коэффициенты, называемые соответственно коэффициентами передачи объекта, регулятора и нагрузки. Из (1.2) получаем

$$x = \frac{k_0 k_p}{1 + k_0 k_p} x_0 - \frac{k_z}{1 + k_0 k_p} z,$$

т.е. значение регулируемой величины x зависит от нагрузки z, уменьшаясь с ее ростом.

Регулирование, в котором величина установившейся ошибки при постоянном заданном значении x_0 зависит от величины нагрузки z, называют *статическим*. Установившаяся статическая ошибка

$$\Delta x_{st} = x_0 - x = \frac{1}{1 + k_0 k_p} x_0 + \frac{k_z}{1 + k_0 k_p} z. \tag{1.3}$$

Для оценки степени зависимости статической ошибки от нагрузки переходят к уравнениям, связывающим относительные безразмерные отклонения $j = \Delta x / x_{\min}$, $l = \Delta z / z_{nom}$ где абсолютные значения $\Delta x = x - x_ь$ и $\Delta z = z - z_{nom}$ отнесены к базовым значениям, соответствующим номинальной нагрузке z_{nom}, рис.1.9. Тогда статизм δ равен относительной крутизне регулировочной характеристики.

Если характеристика прямолинейна, то

$$d = -\frac{\Delta j_{\max}}{\Delta l_{\max}} = \frac{\left(x_{\max} - x_{\min}\right)/x_{\min}}{\left(z_{nom} - 0\right)/z_{nom}} = \frac{\left(x_{\max} - x_{\min}\right)}{x_{\min}}.$$

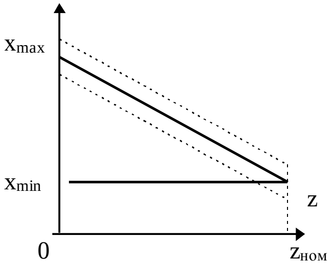


Рис. 1.9

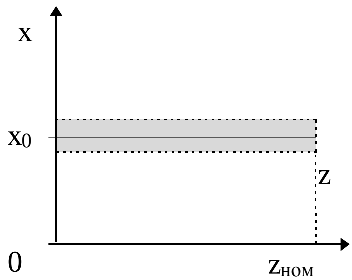


Рис. 1.10

Итак, статический регулятор поддерживает постоянное значение регулируемой величины с ошибкой. Статизм – это величина относительной ошибки при изменении нагрузки от холостого хода до номинальной. Во многих системах статическая ошибка нежелательна. Тогда переходят к регулированию, в котором она равна нулю, т.е. к *астатическому регулированию*.

Регулировочная характеристика идеального астатического регулирования представляет собой прямую линию, параллельную оси нагрузки, (рис.1.10), с некоторой зоной ошибки, (на рисунке заштрихована), но ошибка при этом не зависит от нагрузки. Для получения астатического регулирования нужно устранить жесткую зависимость между положением регулирующего органа и значением регулируемой величины, с тем чтобы поддерживать одно и то же значение регулируемой величины при любой нагрузке. Для этого в цепь регулирования вводят *астатическое звено*.

Заметим, что звенья, выполняющие операции интегрирования, являются астатическими. В самом деле, если выходная координата звена описывается уравнением $y = k\int xdt$ или $\dfrac{dy}{dt} = kx$, то при x=0 будет положение равновесия, т.е. y=const, причем y может иметь любое постоянное значение.

Наглядный пример того, как статическое регулирование можно перевести в астатическое, рассмотрим на следующей ситуации. Имеем простейшую схему автоматического прямого регулирования уровня воды в резервуаре посредством поплавкового регулятора (рис.1.11). Поплавок в этой схеме жестко связан с регулирующим органом – задвижкой, которая изменяет количество воды, посту-

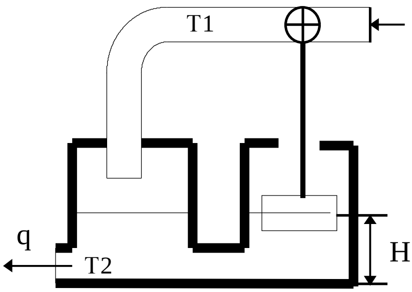


Рис. 1.11

пающей в единицу времени по питающей трубе Т1. Нагрузкой объекта, резервуара, в данном случае является расход воды q по трубе Т2. При увеличении расхода уровень воды в резервуаре начинает понижаться, поплавок опускается и перемещает задвижку, увеличивая ее открытие.

Количество воды, поступающее по трубе Т1 в единицу времени, увеличивается, и уровень начинает повышаться. Равновесие наступит тогда, когда приход воды будет равен ее расходу. Чем больше будет нагрузка, т.е. расход, тем больше будет открыта задвижка, и тем ниже будет находиться поплавок в состоянии равновесия. А это значит, что с возрастанием нагрузки в данной схеме значение уровня воды, т.е. регулируемой величины, будет уменьшаться. Такой регулятор называется *статическим регулятором*. Для получения астатического регулирования введем в цепь регулятора электрический двигатель с идеальной чувствительностью. Когда напряжение на зажимах двигателя равно нулю, он неподвижен. При появлении напряжения двигатель начинает вращаться до тех пор, пока напряжение не станет равным нулю. На рис.1.12 показана схема астатического регулирования уровня. Поплавок в этой схеме перемещает ползунок реостата, при помощи которого двигатель всякий раз, как ползунок смещается вверх или вниз от среднего положения, начинает вращаться и перемещает регулирующий орган до тех пор, пока не восстановится заданный уровень. Так как напряжение трогания двигателя отлично от нуля, возникает погрешность, лежащая внутри зоны нечувствительности, выделенной на рис.1.10.

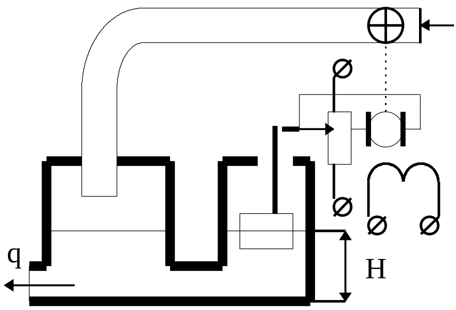


Рис. 1.12

Заметим, что электрический двигатель является примером астатического звена. В схеме рис.1.7 двигатель, перемещающий ползунок реостата возбуждения, – астатическое звено и изображенная схема есть система астатического регулирования.

Программное управление.

При программном управлении алгоритм функционирования задан и можно построить специальное устройство – датчик программы – вырабатывающее $x_0(t)$. Программное управление может быть осуществлено по любому из фундаментальных принципов. В практике используют два вида систем программного управления: системы с временной программой и системы с пространственной программой. В системах первого вида датчик программы вырабатывает непосредственно функцию $x_o(t)$. Системы второго вида используют в программном управлении металлообрабатывающими станками. В них движение исполнительного органа (инструмента) осуществляется по заданной в пространстве траектории и во времени мало существенен. Используются два способа пространственного программного управления. Первый состоит в том, что движение по каждой из координатных пространственных осей выполняется отдельным приводом, движение по одной из осей задается произвольно (обычно равномерным), а остальные движения увязываются с первым так, что инструмент двигался по заданной траектории. Примером может служить копировальный станок, рис.1.13.

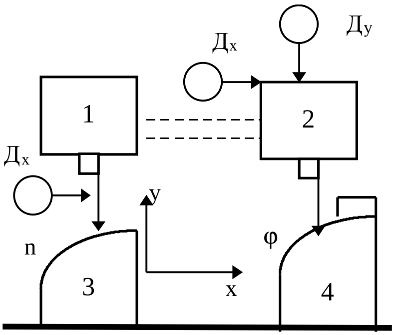


Рис. 1.13

Одно движение по оси x происходит равномерно, второе по оси ординат y задается профилем кулачка – шаблона. Инструмент Ф станка повторяет движение пальца П.

Второй способ состоит в том, что заданная траектория описывается с помощью системы параметрических уравнений, в которых параметром является время, и затем строится решающее устройство, задающее движение приводам по отдельным осям в соответствии с этими параметрическими уравнениями.

Системы програмного управления по структуре могут быть статическими и астатическими, однако, поскольку величины x_0 (t)и z в них не постоянны, статическая ошибка не устраняется, так как возникают установившиеся ошибки, зависящие от скорости и высших производных. Для устранения этих составляющих ошибки можно вводить в систему дополнительные астатические звенья.

Следящие системы.

Алгоритм функционирования в этом случае заранее неизвестен. Регулируемая величина в таких системах должна воспроизводить изменение некоторого внешнего фактора, следить за ним. Очень часто следящие системы применяются для дистанционного управления самыми разнообразными объектами. а так же для телеуправления. По принципу следящей системы работают многие системы дистанционного управления самыми разнообразными объектами, радиолокационные системы сопровождения самолетов, гироскопические стабилизаторы, многие счетно-решающие устройства, многие точные измерительные системы, радиокомпас, радиодальномер, и т.п. Телеуправление применяется, когда пульт управления относится на большие расстояния. Он может быть неподвижным, а управляемый объект перемещается в пространстве. В этом случае между задатчиком величины x(t) и входом следящей системы вводится радиолиния или другая линия связи (космические объекты).

Следящая система может быть выполнена в соответствии с любым фундаментальным принципом управления и будет отличаться от системы программного управления тем, что вместо датчика программы в ней будет помещено устройство слежения за изменением внешнего фактора.

В настоящее время во многих областях техники существует необозримое количество самых разнообразных систем автоматического управления, использующих принцип следящей системы. Он применяется почти везде, где нужно добиться высокой точности и надежности автоматического управления.

Системы с поиском экстремума показателя качества.

Управление можно считать оптимальным, если оно обеспечивает в каждый момент времени показатель качества или эффективности процесса в точке максимума или минимума. Например, настройка радиоприемника на частоту передающей станции по наибольшей громкости приема. Особенность такой системы состоит в том, что когда точка настройки под воздействием разных возмущений окажется смещенной от экстремума, то заранее не известно, в каком направлении нужно воздействовать на регулирующий орган, чтобы вернуть ее к экстремуму. Поэтому экстремальное управление начинают с поиска. Сначала выполняют небольшие пробные движения в каком-то выбранном направлении, затем анализируют реакцию системы на эти пробы и после этого по результатам анализа вырабатывают управляющее воздействие, приближающее систему к экстремуму. На рис.1.14 приведена функциональная схема экстремального регулирования с поиском.

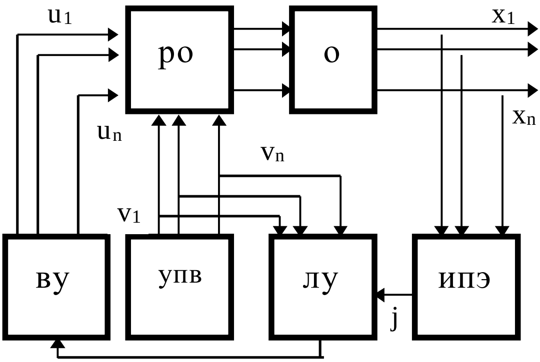


Рис. 1.14

Измерительно-преобразующий элемент ИПЭ, измеряющий координаты процесса и вычисляющий показатель качества $J=F\{x_1, x_2,......x_n\}$, подключен к выходу объекта О. Устройство пробных воздействий УПВ генерирует пробные воздействия $v_1, v_2, ...,v_n$ на систему регулирующих органов РО. Логическое устройство ЛУ, получая информацию о введенных пробных воздействиях и об изменении J под их влиянием, анализирует полученные данные и результат сообщает вычислительному устройству ВУ, которое вырабатывает управляющие воздействия $u_1, u_2, ...,u_n$.

Для поиска экстремума необходим чувствительный элемент. Один из способов обнаружения экстремума функции одной переменной $y=f(x)$ состоит в измерении производной dy/dx, которая в точке экстремума должна быть равна нулю, и в оценке знака второй производной. Однако одиночной проверкой можно пользоваться лишь в том случае, если известно, что экстремум существует, что он единственный и что в рабочей области нет точек перегиба. В противном случае поиск усложняется.

В случае функции многих переменных используют вычислительные устройства поиска, основанные на итерационных методах решения экстремальных задач – методах Гаусса-Зайделя, градиента, наискорейшего спуска и т.д.

Если в рабочей области системы существует несколько локальных экстремумов, то упомянутые методы позволяют обнаружить лишь один из локальных экстремумов, именно тот, в окрестности которого оказалась исходная точка поиска. Для нахождения глобального экстремума, если априорной информации об его окрестности нет, приходится просматривать всю рабочую область, выявляя все локальные экстремумы и сравнивая их между собой.

Оптимальное управление.

Принцип оптимального управления применяется как в технических системах для повышения эффективности производственных процессов, так и в системах организационного управления для совершенствования деятельности предприятий, организаций, отраслей народного хозяйства. В организационных системах обычно интересуются конечным результатом команды, окончательным результатом, не исследуя эффективность во время переходного процесса. Это объясняется тем, что обычно в таких системах потери в переходных процессах достаточно малы и незначительно влияют на общую величину выигрыша в установившемся режиме, поскольку сам установившийся режим более длителен, чем переходный процесс.

Напротив, в управлении динамическими техническими системами оптимизация часто существенна именно для переходных процессов, в которых показатель эффективности зависит не только от текущих значений координат, но также от характера их изменения в прошлом, настоящем и будущем, и выражается некоторым функционалом от координат, их производных и времени.

Нахождение оптимального управления в таких динамических задачах требует в процессе решения достаточно сложной математической задачи методами вариационного исчисления или математического программирования в зависимости от математической модели системы. Поэтому составной частью системы оптимального управления становится счетно-решающее устройство или ЭВМ.

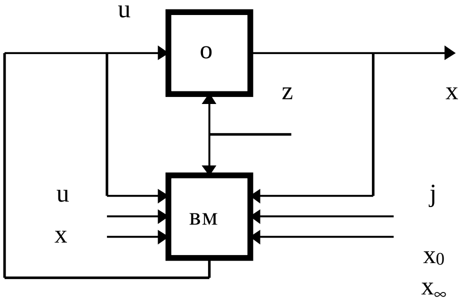


Рис. 1.15

Принцип действия в самых общих чертах поясняется на рис.1.15 На вход вычислительной машины ВМ поступает информация о текущих значениях координат **x** с выхода объекта **О**, об управлениях **u** с его входа, о внешних воздействиях **z** на объект, а также задания извне различных условий: значение критерия оптимальности **J**, граничных условий, информация о допустимых значениях координат и т.п. Вычислительное устройство по заложенной в него программе вычисляет оптимальное управление **u**. Оптимальные системы могут быть как разомкнутыми, так и замкнутыми.

Адаптивные системы.

Системы, автоматически изменяющие значения своих параметров или структуру при непредвиденных изменениях внешних условий путем анализа состояния или поведения системы так, чтобы сохранялось заданное качество ее работы, называют адаптивными. Термин заимствован из биологии, где адаптацией называют приспособление организма к изменяющейся среде для сохранения жизнедеятельности. Но в теории управления понятие адаптации сужено. К ней относят лишь такие виды приспособления, когда управляющим устройством изменяются параметры или структуры системы по данным анализа ее работы.

Адаптивные системы с изменением значений параметров называют *самонастраивающимися*, а с изменением структуры и алгоритма управления – *самоорганизующимися*.

Обычно адаптивная система содержит в качестве основы схему, реализующую один из фундаментальных принципов управления, а контур адаптации пристраивают к ней как вторичный, осуществляющий коррекцию параметров. Контур адаптации обычно состоит из устройства измерений ИУ, вычисления ВУ и управления УУ. Он может быть разомкнут (рис.1.16а), если на его вход подается только входное воздействие, или замкнут (рис.1.16 б), если он реагирует также и на выход системы.

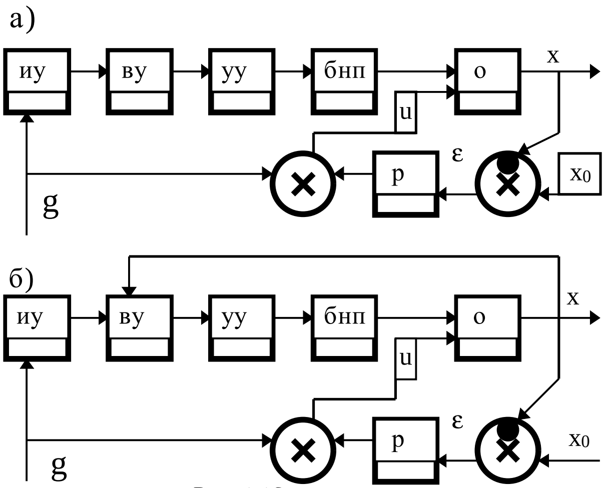


Рис. 1.16

Контур самонастройки воздействует на блок настройки параметров БНП, который может быть включен не только последовательно, как показано на рисунке, но и любым другим способом, например, в цепь обратной связи.

Вычисление воздействий для коррекции параметров это довольно сложная математическая задача, поскольку в реальных условиях внешние возмущения иногда приводят к изменению не только координат, но и параметров системы (коэффициентов уравнений), причем в таких системах, как баллистические ракеты, весьма существенны. Поэтому в составе таких систем используют различные счетно-решающие устройства. Способы адаптации и соответствующие им схемы конечно различаются алгоритмами и программами ЭВМ.

§ 1.4 Основные законы управления.

Законом регулирования называют математическую зависимость, в соответствии с которой управляющее воздействие на объект вырабатывалось бы безынерционным управляющим устройством.

Закон управления тесно связан с конструкцией управляющего устройства, и одним из распространенных видов классификации регуляторов является классификация по законам управления.

Из многих законов управления, существующих на практике, здесь мы ограничимся упоминанием наиболее распространенных законов, реализуемых линейными регуляторами по отклонению непрерывного действия. В этих простейших законах управляющее воздействие линейно зависит от отклонения, его интеграла и первой производной по времени. При описании законов будем пользоваться безразмерными относительными переменными $e = \Delta x / x_b$, $m = u / u_b$, где x_b и u_b - базовые значения (например, соответствующие номинальному режиму работы объекта).

Пропорциональный закон (обозначаемый **П**): $m = k_p e$.

Регулятор, осуществляющий этот закон, называют пропорциональным. Постоянную k_p называют коэффициентом передачи (усиления) регулятора, обратную величину – статизмом регулятора. С возрастанием статизма регулятора возрастает и статизм регулирования.

Интегральный закон (**И**): $m = \frac{1}{T}\int_0^t e.dt$, или $dm/dt = e/T$.

Постоянная Т имеет размерность времени, и её называют *постоянной времени интегрирования*. Интегральный регулятор – астатический и именно с его помощью осуществляется рассмотренная выше простейшая схема астатического регулирования.

Пропорционально-интегральный закон (**ПИ**):

$$m = k_p\left(e + \frac{1}{T}\int_0^t e.dt\right).$$

Иногда его называют пропорциональным законом с интегральной коррекцией. Регулятор ПИ также обеспечивает астатическое регулирование. В этом можно убедиться, представив уравнение в виде

$$dm/dt = k_p\left(de/dt + e/T\right).$$

В состоянии равновесия при постоянных воздействиях должно быть $dm/dt = 0$, $de/dt = 0$, откуда равновесие может иметь место лишь при ε=0.

Пропорционально-интегрально-дифференциальный закон

$$m = k_p \left(e + \frac{1}{T_{\text{È}}} \int_0^t e.dt + T_{\text{Ä}} \frac{de}{dt} \right).$$

Постоянные $T_И$ и $T_Д$ соответственно называют постоянными времени интегрирования и дифференцирования. Регулятор ПИД также обеспечивает астатическое регулирование. Производную de/dt вводят в закон регулирования для повышения качества процесса регулирования.

Глава 2. Математическое описание автоматических систем управления.

На этапе разработки и исследования системы управления получают ее математическое описание. Оно может быть аналитическим (с помощью уравнений), графическим (с помощью графиков, структурных схем и графов) и табличным. Для получения математического описания всей системы обычно составляют описание ее отдельных элементов. В частности, для получения уравнений системы составляют уравнения для каждого входящего в нее элемента. Совокупность всех уравнений элементов и дают уравнения системы.

Уравнения а также структурные схемы АСУ называют ее *математической моделью*. В зависимости от цели исследования математическая модель одной и той же системы может быть разной. Обычно полезно начинать исследование с простейшей модели, а затем постепенно ее усложнять, с тем чтобы учесть дополнительные явления и связи, которые на начальном этапе не были учтены как несущественные.

Во многих АСУ процессы описываются дифференциальными, разностными, дифференциально-разностными, интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями. Здесь мы будем рассматривать математические модели систем, которые могут быть описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями.

§ 2.1. Уравнения динамики и статики. Линеаризация.

Система управления и любой ее элемент производят преобразование входного сигнала **x(t)** в выходной сигнал **y (t)**. С математической точки зрения они осуществляют отображение **y(t)=Ax(t)**, согласно которому каждому элементу **x**(t) из множества **X** входных сигналов ставится в соответствие единственный, вполне определенный элемент **y(t)** из множества **Y** выходных сигналов. В приведенном соотношении **A** называется *оператором*. Оператор, определяющий соответствие между входным и выходным сигналами системы управления, задает правило определения выходного сигнала этой системы по ее входному сигналу.

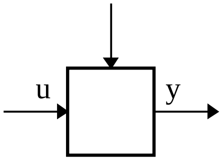


Рис.2.1

В большинстве случаев звенья и системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями довольно высокого порядка. Для примера рассмотрим звено (рис.2.1), которое можно описать дифференциальным уравнением второго порядка.

$$F\left(y,\dot{y},\ddot{y},u,\dot{u}\right)+f=0, \qquad (2.1)$$

где $\boldsymbol{y}$ – выходная величина; $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{f}$ – входные величины; $\dot{y}$ и $\dot{u}$ – первые производные по времени; $\ddot{y}$ – вторая производная по времени.

Уравнение (2.1), описывающее процессы в звене при произвольных входных воздействиях, называют *уравнениями динамики*. При постоянных входных величинах $u=u^0$ и $f=f^0$ процесс в звене с течением времени установится и выходная величина примет постоянное значение $y=y^0$. Тогда (2.1) примет вид

$$F\,(y^0,0,0,u^0,0)+f^0=0\,. \qquad (2.2)$$

Это уравнение описывает статический или установившийся режим и называется *уравнением статики*. Статический режим можно описать графически с помощью статических характеристик. *Статической характеристикой* звена или элемента или всей системы называют зависимость выходной величины от входной в статическом режиме. Эту характеристику можно получить экспериментально, подавая на вход постоянное воздействие и измеряя выходную величину после окончания переходного процесса, или расчетным путем, используя уравнения статики.

Если звено имеет несколько входов, то оно описывается с помощью семейства статических характеристик. Это будут кривые зависимости выходной величины **y** от одной входной величины ***u*** (или ***f***) при фиксированных различных значениях другой.

Линеаризация. Как правило, автоматические системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, решение которых представляет большие трудности. Чтобы избежать этого, прибегают к их линеаризации, т.е. заменяют исходные нелинейные уравнения линейными, приближенно описывающими процессы в системе. Такой процесс преобразования называют *линеаризацией*.

Смысл процедуры линеаризации можно проследить на следующем примере. Обычно в АСУ поддерживается некоторый заданный режим, когда входные и выходные величины звеньев системы изменяются по определенному закону. Например, в системах стабилизации они принимают определенные постоянные значения. Однако, в нормально функционирующей автоматической системе за счет различных возмущающих факторов фактический режим немного отличается от требуемого, но отклонения входных и выходных величин входящих в нее звеньев от требуемых значений малы. Это и позволяет произвести линеаризацию, разлагая нелинейные функции, входящие в уравнения, в ряд Тейлора. Линеаризацию можно производить по звеньям.

Возьмем звено, описываемое уравнением (2.1). Пусть заданному режиму соответствуют

$$u=u^*,\ \dot u = \dot u^*,\ f=f^*,\ y=y^*,\ \dot y = \dot y^*,\ \ddot y = \ddot y^*. \qquad (2.3)$$

Обозначим отклонения реальных значений u, f и y от требуемых через Δu, Δf и Δy т.е. $\Delta u = u - u^*$, $\Delta f = f - f^*$, $\Delta y = y - y^*$. Тогда $u=u^*+\Delta u$, $\dot u = \dot u^* + \Delta\dot u$, $f = f^*+\Delta f$, $y=y^*+\Delta y$, $\dot y = \dot y^* + \Delta\dot y$, $\ddot y = \ddot y^* + \Delta\ddot y$. Подставим эти выражения в (2.1) и, рассматривая F как функцию от независимых переменных u, $\dot u$, y, $\dot y$ и $\ddot y$, разложим ее в ряд Тейлора в точке (2.3) и отбросим малые члены более высокого порядка, чем сами отклонения. Тогда (2.1) примет вид

$$\begin{gathered} F^* + (dF/dy)^*\Delta y + (dF/d\dot y)^*\Delta\dot y + (dF/d\ddot y)^*\Delta\ddot y + \\ + (dF/du)^*\Delta u + (dF/d\dot u)^*\Delta\dot u + f^* + \Delta f = 0 \end{gathered} \qquad (2.4)$$

Здесь звездочка сверху обозначает, что соответствующие функции и производные вычисляются в точке (2.3). Когда в системе устанавливается заданный режим, уравнение (2.1) принимает вид

$$F^* + f^* = 0$$

Вычтя это уравнение из (2.4), получим линеаризованное уравнение звена в отклонениях.

$$a_0 \Delta \ddot{y} + a_1 \Delta \dot{y} + a_2 \Delta y - b_0 \Delta \dot{u} - b_1 \Delta u - c_0 \Delta f = 0 \quad (2.5)$$

где $a_0 = \left(dF/d\ddot{y}\right)^*$; $a_1 = \left(dF/d\dot{y}\right)^*$; $a_2 = \left(dF/dy\right)^*$;

$$b_0 = -\left(dF/d\dot{u}\right)^*;\ b_1 = -\left(dF/du\right)^*;\ c_0 = -1.$$

Если время **t** явно не входит в исходное уравнение (2.1) и, кроме того, заданный режим является статическим, т.е. величины y*, u* и f* не зависят от времени, то коэффициенты линеаризованного уравнения (2.5) будут постоянными.

Звенья и системы, которые описываются линейными уравнениями, называются *линейными звеньями* и *линейными системами*.

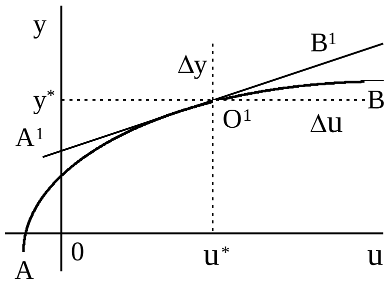


Рис.2.2

Уравнение (2.5) было получено в предположениях, что отклонения выходной и входной величин достаточно малы, а функция F обладает непрерывными частными производными по всем своим аргументам в окрестности точек, соответствующих заданному режиму. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, линеаризацию производить нельзя. Жесткие (сильные) нелинейности процедуре линеаризации обычно не поддаются.

Иногда нелинейная зависимость между отдельными переменными, входящими в уравнение звена, задается в виде экспериментальной кривой. В таком случае линеаризацию можно произвести графически. Геометрически линеаризация нелинейной зависимости между двумя переменными означает замену исходной кривой AB (Рис.2.2) отрезком ее касательной AB* в точке O*, соответствующей заданному режиму и параллельному переносу начала координат в эту точку.

В зависимости от того, входит или нет явно время в уравнение, системы разделяют на стационарные и нестационарные. Автоматические системы управления (звенья) называют стационарными, если они при постоянных внешних воздействиях описываются уравнениями, не зависящими явно от времени. Это означает, что свойства системы со временем не изменяются. В противном случае система называется нестационарной. Такое разграничение касается и линейных систем. Стационарные линейные системы описываются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. Нестационарные линейные системы онисываются уравнениями с переменными коэффициентами. Иногда оказывается, что исходная нелинейная модель системы может быть стационарной, а ее линейная модель – нестационарной. Это может случиться, если заданный режим, относительно которого производится линеаризация, является динамическим.

§ 2.2 Некоторые свойства преобразования Лапласа.

Здесь будут даны основные сведения о преобразовании Лапласа, которые используются при рассмотрении систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями.

Преобразованием Лапласа называют соотношение, ставящее функции x(t) вещественного переменного в соответствие функцию X(s) комплексного переменного s= $s + jw$ по формуле

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt . \qquad (2.6)$$

При этом x(t) называют *оригиналом*, а X(s) – *изображением по Лапласу* или просто *изображением*. То, что x(t) имеет своим изображением X(s), пользуются символической записью

$$X(s)= L\{x(t)\} \text{ или } X(s) \div x(t),$$

где L – оператор Лапласа.

Функция x(t), которая подвергается преобразованию Лапласа, должна обладать следующими свойствами: x(t) определена и кусочно-дифференцируема на всей положительной числовой полуоси $[0, \infty]$; x(t)=0 при $t \leq 0$. Существуют такие положительные числа M и с, что $\left|x(t)\right| \le M\ e^{Ct}$ при $0 \le t \le \infty$. Функции, обладающие указанными тремя свойствами, называют *функциями - оригиналами*.

По известному изображению его оригинал определяется по соотношению.

$$x(t) = \frac{1}{2p\,.\,j}\int_{s_0 - j_\infty}^{s_0 + j_\infty} X(s)e^{st}ds$$

и называется *обратным преобразованием Лапласа*. В нем интеграл берется вдоль любой прямой Re s= $s_0 \ge a$. Символически обратное преобразование Лапласа записывают так $x(t) \div X(s)$ или x(t)=L^{-1}{ X(s)}, где символ L^{-1} – обратный оператор Лапласа.

В курсах операционного исчисления доказываются следующие важные для нас теоремы.

1. *Свойство суперпозиции* или *свойство линейности*. Изображение суммы равно сумме изображений слагаемых. Для любых постоянных a и b

$$L\left\{ax_1(t) + bx_2(t)\right\} = aL\left\{x_1(t)\right\} + bL\left\{x_2(t)\right\}.$$

2. *Дифференцирование оригинала*. Если производная x(t) является функцией-оригиналом, т.е. обладает указанными выше тремя свойствами, то

$$L\left\{x(t)\right\} = sX(s) - x(0),$$

где $X(s) = L\left\{x(t)\right\}$, $x(0) = \lim\limits_{x \to +0} x(t)$.

Если начальные условия нулевые, т.е.

$$x(0) = \dot{x}(0) = \mathbf{L} = \overset{(n-1)}{\underset{(n)}{x}}(0) = 0,$$

то последняя формула принимает вид $L\left\{\overset{(n)}{x}(t)\right\} = s^n X(s)$. Таким образом, при нулевых начальных условиях дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на s.

3. *Интегрирование оригинала*. Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на s:

$$L\left\{\int_0^t x(t)dt\right\} = \frac{X(s)}{s}.$$

4. *Теорема запаздывания*. Если оригинал смещается вдоль оси **t** на постоянную величину t , то для любого положительного числа t

$$L\{x(t-t)\} = e^{-st} L\{x(t)\} = e^{-st} X(s).$$

5. *Теорема о свертке*. (теорема умножения изображений). Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – оригиналы, а $X_1(s)$ и $X_2(s)$ – их изображения, то

$$X_1(s)\cdot X_2(s) \div \int_0^t x_1(t)x_2(t-t)dt = \int_0^t x_2(t)x_1(t-t)dt .$$

Интеграл правой части равенства называют *сверткой функций* $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и обозначают $x_1(t)*x_2(t)$:

$$x_1(t)*x_2(t) = \int_0^t x_1(t)x_2(t-t)dt = \int_0^t x_2(t)x_1(t-t)dt .$$

6. *Теоремы о предельных значениях*. Если $x(t)$ – оригинал, а $X(s)$ – его изображение, то $x(0) = \lim\limits_{s\to\infty} sX(s)$ и при существовании предела $x(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s).$$

7. *Теорема разложения*. Если функция $X(s) = A(s)/B(s)$ дробно-рациональна, причем степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя, то ее оригиналом является умноженная на l(t) функция

$$x(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{s\to s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} \left[X(s)(s-s_k)^{n_k} e^{st}\right],$$

где s_k – корни уравнения B(s)=0, а n_k – их кратности и l – число различных корней. Если все корни уравнения простые, то эта формула разложения принимает вид

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_k t},$$

где n - степень полинома B(s), $B'(s_k)=\left.\frac{dB}{ds}\right|_{s=s_k}$.

Соответствие между оригиналами и изображениями

При решении задач методом преобразования Лапласа приходится пользоваться парами соответствующих друг другу функций f(t) и F(s). Чтобы сберечь время, составлены таблицы таких пар, наиболее часто встречающихся в приложениях. В таблице 1 приведены некоторые наиболее обычные пары. Чтобы пояснить метод, при помощи которого составляются такие таблицы, рассмотрим некоторые простые функции.

Единичная линейная функция . Пусть f(t) есть линейная функция, начинающаяся при t=0,

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0\\ t & \text{при } t\geq 0\end{cases} \tag{2.7}$$

Тогда по (2.6) имеем

$$L|f(t)|=\int_0^\infty te^{-st}dt=-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt=0+\frac{1}{s}\cdot\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s^2} \tag{2.8}$$

Такой тип входа соответствует единичному скачку производной.

Экспоненциальная функция. Это пример трансцендентного оригинала:

$$f(t)=e^{-at} \quad \text{при} \quad t\geq 0,$$

где a – действительное число. Имеем:

$$L|f(t)|=\int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt=\frac{1}{s+a} \tag{2.9}$$

Это хороший пример того, как преобразование Лапласа упрощает функции. Трансцендентная функция преобразовывается в сравнительно простую алгебраическую.

Синусоидальная функция. Пусть будет $f(t)=\sin w_0 t$ при $t \geq 0$, где w_0 – действительное положительное число. Получим:

$$L|f(t)| = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin w_0 t \, dt = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-st} \left(e^{jw_0 t} - e^{-jw_0 t}\right) dt =$$
$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - jw_0} - \frac{1}{s + jw_0}\right) = \frac{w_0}{s^2 + w_0^2} \, . \tag{2.10}$$

Вычисление подобного рода приводятся таблице 1.

Таблица 1.

Изображения в смысле Лапласа и их оригиналы

№	Изображения F(s)	Оригинал f(t)
1	$\frac{1}{s}$	1 или единичный скачок $u(t)$ при t=0
2	$\frac{1}{s^2}$	t, единичная линейная функция
3	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
4	$\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$	$\sin w_0 t$
5	$\frac{s}{s^2+w_0^2}$	$\cos w_0 t$
6	1	единичный импульс при t=0, δ(t)
7	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
8	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$

Обратное преобразование Лапласа для дробно-рациональной функции

Обычно функция переменного s, из которой путем обратного преобразования Лапласа получают решение задачи, представляется в виде дробно-рациональной функции

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\mathbf{L}+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\mathbf{L}+b_1 s+b_0}, \qquad (2.11)$$

где все **a** и **b** – действительные постоянные, а **m** и **n** – целые положительные числа. Оригинал для изображения такого типа только в редких случаях может быть найден в таблицах. Вообще же при $n \geq m$ нужно разложить B(s) на множители и затем представить F(s) в виде суммы простейших дробей. Здесь могут встретиться два важных случая: 1) корни многочлена B(s) все действительные и различны (нулевой корень не исключается); 2) имеются кратные корни.

Случай 1: различные корни. Пусть n корней многочлена B (s) будут s_1, s_2,…s_n, причем один из них может быть нулем, но никакие два из них не равны друг другу. Тогда можно записать

$$F(s)=\frac{A(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\mathbf{L}(s-s_n)}: \qquad (2.12)$$

или в виде разложения на простейшие

$$F(s)=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\mathbf{L}+\frac{K_n}{s-s_n}\;. \qquad (2.13)$$

Найдем не определенные пока коэффициенты этого выражения. Чтобы найти, например, K_1, умножим обе части (2.13) на $s-s_1$ и затем положим $s-s_1=0$. Для любого коэффициента K_p это дает:

$$K_p=\left|(s-s_p)\frac{A(s)}{B(s)}\right|_{s-s_p}\;. \qquad (2.14)$$

Когда все K определены, уже не трудно найти оригинал для каждой из простейших дробей, например,

$$L^{-1}\left|\frac{K_p}{s-s_p}\right|=K_p e^{s_p t}\;. \qquad (2.15)$$

П р и м е р 1. Найти оригинал по изображению

$$F(s)=\frac{K(s+w_0)}{s(s+w_1)(s+w_2)},$$

где все w – действительные различные положительные постоянные.

Согласно (2.13) это может быть переписано так:

$$F(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+w_1}+\frac{K_3}{s+w_2},$$

где выражения для неопределенных коэффициентов по (2.14) таковы:

$$\left.\begin{aligned}
K_1&=\left|\frac{K(s+w_0)}{(s+w_1)(s+w_2)}\right|_{s=0}=\frac{Kw_0}{w_1w_2},\\
K_2&=\left|\frac{K(s+w_0)}{s(s+w_2)}\right|_{s=-w_1}=\frac{K(-w_1+w_0)}{-w_1(-w_1+w_2)},\\
K_3&=\left|\frac{K(s+w_0)}{s(s+w_1)}\right|_{s=-w_2}=\frac{K(-w_2+w_0)}{-w_2(-w_2+w_1)}.
\end{aligned}\right\}\qquad(2.16)$$

Поскольку все К постоянны, оригинал F(s) по (2.15) будет

$$L^{-1}\left|\frac{K(s+w_0)}{s(s+w_1)(s+w_2)}\right|=$$

$$=\frac{Kw_0}{w_1w_2}-\frac{K(w_0-w_1)}{w_1(w_2-w_1)}e^{-w_1t}-\frac{K(w_0-w_1)}{w_2(w_1-w_2)}e^{-w_2t}.$$

Случай 2: По крайней мере один кратный корень. Обозначим n корней B(s) через s_1 , s_2,...... s_{n-q} , причем корень s_1 имеет кратность q. Теперь можно записать :

$$F(s)=\frac{A(s)}{(s-s_1)^q(s-s_2)\mathbf{L}(s-s_n)}.$$

Разложение на простейшие дроби будет следующим:

$$F(s)=\frac{K_{11}}{(s-s_1)^q}+\frac{K_{12}}{(s-s_1)^{q-1}}+\mathbf{L}+$$
$$+\frac{K_{1q}}{(s-s_1)}+\frac{K_2}{s-s_2}+\frac{K_3}{s-s_3}+\mathbf{L}+\frac{K_{n-q}}{s-s_{n-q}} \qquad (2.17)$$

Коэффициенты K_2, K_3,......K_n могут быть вычислены совершенно так же, как и в случае 1. Но для вычисления первых q коэффициентов K_{11}, K_{12},........K_{1q} требуется другой метод. Чтобы найти K_{1l}, умножим обе части равенства (2.17) на $(s-s_1)^q$ и продифференцируем l –1 раз. Если теперь положить $s=s_1$, то получится выражение для K_{1l}. Таким образом,

$$K_{1l}=\frac{1}{(l-1)!}\left|\frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}}\frac{(s-s_1)qA(s)}{B(s)}\right|_{s=s_1} . \qquad (2.18)$$

Этот метод вычисления может оказаться очень утомительным, если q велико. Если у B(s) имеются еще и другие кратные корни, нужно повторить указанные действия для каждого из них. Следующий пример может помочь разобраться в последовательности вычислений.

П р и м е р 2. Найти оригинал, если изображение имеет вид

$$F(s)=\frac{K(s+w_0)}{s^2(s+w_1)^3}$$

Согласно (2.17) можно записать:

$$F(s)=\frac{K_{11}}{s^2}+\frac{K_{12}}{s}+\frac{K_{21}}{(s+w_1)^3}+\frac{K_{22}}{(s+w_1)^2}+\frac{K_{23}}{(s+w_1)}$$

Вычисляем коэффициенты по (2.18)

$$K_{11}=\left|\frac{K(s+w_0)}{(s+w_1)^3}\right|_{s=0}=\frac{Kw_0}{w_1^3}$$

$$K_{12}=\left|\frac{d}{ds}\frac{K(s+w_0)}{(s+w_1)^3}\right|_{s=0}=\left|\frac{K(s+w_1)-3K(s+w_0)}{(s+w_1)^4}\right|_{s=0}=$$

$$=\frac{K(w_1-3w_0)}{w_1^4}$$

$$K_{21}=\left|\frac{K(s+w_0)}{s^2}\right|_{s=-w_1}=\frac{K(w_0-w_1)}{w_1^2}$$

$$K_{22}=\left|\frac{d}{ds}\frac{K(s+w_0)}{s^2}\right|_{s=-w_1}=\left|\frac{-K(s+2w_0)}{s^3}\right|_{s=-w_1}=$$

$$=\frac{K(2w_0-w_1)}{w_1^3}$$

$$K_{23}=\frac{1}{2!}\left|\frac{d^2}{ds^2}\frac{K(s+w_0)}{s^2}\right|_{s=-w_1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{d}{ds}\frac{-K(s+2w_0)}{s^3}\right|_{s=-w_1}=\frac{K(3w_0-w_1)}{w_1^4}$$

При вычислении $К_{2\,3}$ использован результат, полученный ранее при вычислении $К_{2\,2}$.

Воспользовавшись теперь таблицей 1, получим следующее выражение для оригинала при $t\geq 0$:

$$L^{-1}\left[\frac{K(s+w_0)}{s^2(s+w_1)^3}\right]=K_{11}t+K_{12}+\left\{\frac{1}{2}K_{21}t^2+K_{22}t+K_{23}\right\}e^{-w_1t}\quad(2.19).$$

§ 2.3 Формы записи линейных дифференциальных уравнений. Передаточные функции.

При описании автоматических систем управления широко используют символическую форму записи линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим ее на примере уравнения второго порядка и напишем его так, чтобы в левой части оставались только члены, содержащие выходную переменную и её производные

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\dot{u} + b_1 u + c_0 f \,. \tag{2.20}$$

Это уравнение является тем же уравнением (2.5), если в последнем опустить знак Δ. Введем для операции дифференцирования обозначение p, т.е. $d/dt \equiv p$, $d^{k/}/dt^{k} \equiv p^{k}$

Используя его, уравнение (2.20) можно записать в виде

$$a_0 p^2 y + a_1 py + a_2 y = b_0 pu + b_1 u + c_0 f \,. \tag{2.21}$$

При записи и преобразованиях дифференциальных уравнений оператор дифференцирования **p** нужно рассматривать как алгебраический сомножитель, а выражение **py** – как произведение, не обладающее свойством коммутативности т.е. нельзя вместо **py** писать **yp**. Учитывая это правило, перепишем (2.20), вынеся **y** и **u** за скобки

$$\left(a_0 p^2 + a_1 p + a_2\right)y = \left(b_0 p + b_1\right)u + c_0 f \,. \tag{2.22}$$

Введем обозначения

$$Q(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2 \,, \quad R_1(p) = b_0 p + b_1 \,, \quad R_2(p) = c_0 \,.$$

Тогда уравнение (2.22) можно записать в компактной форме

$$Q(p)y = R_1(p)u + R_2(p)f \,. \tag{2.23}$$

В этом выражении Q(p)–дифференциальный оператор при выходной величине называют *собственным оператором*, а $R_1(p)$ и $R_2(p)$–дифференциальные операторы при входных величинах называют *операторами воздействия*.

Передаточные функции. Отношение оператора воздействия к собственному оператору называют *передаточной функцией или передаточной функцией в операторной форме*. Звено, описываемое уравнениями (2.22)–(2.23), можно характеризовать двумя передаточными функциями: передаточной функцией $W_1(p)$ по входной величине **u**, т.е.

$$W_1(p) = R_1(p)/Q(p) = (b_0 p + b_1)/\left(a_0 p^2 + a_1 p + a_2\right) \quad (2.24)$$

и передаточной функцией $W_2(p)$ по входной величине f, т.е.

$$W_2(p) = R_2(p)/Q(p) = c_0/\left(a_0 p^2 + a_1 p + a_2\right). \quad (2.25)$$

Используя передаточные функции, уравнение (2.23) записывают в виде

$$y = W_1(p)u + W_2(p)f\ . \quad (2.26)$$

Это уравнение представляет собой условную, более компактную форму записи исходного уравнения (2.20) в операторной форме. Наряду с передаточной функцией в операторной форме широко используют передаточную функцию в форме изображений Лапласа .

Передаточной функцией в форме изображений Лапласа называют отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях. Если звено (система) имеет несколько входов, то при определении передаточной функции относительно какой-либо одной входной величины остальные величины полагаются равными нулю. Например, найдем передаточную функцию в форме изображения по Лапласу для звена , описываемого уравнением

$$a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 \dot{u} + b_1 u + c_0 f\ .$$

Перейдем в обеих частях этого уравнения к изображениям по Лапласу

$$L\{a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y\ \} = L\{b_0 \dot{u} + b_1 u + c_0 f\ \}.$$

Используя свойства линейности и дифференцирования оригинала при нулевых начальных условиях, получим

$$\left(a_0 s^2 + a_1 s + a_2\right)Y(s) = (b_0 s + b_1)U(s) + c_0 F(s), \quad (2.27)$$

где $Y(s) = L\{y(t)\ \}$; $U(s) = L\{u(t)\ \}$; F(s)= L$\{f(t)\ \}$.

Полагая последовательно F(s)=0 и U(s)=0 и определяя каждый раз отношение выходной величины к входной, получим передаточные функции

$$W_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}\ ; \quad (2.28)$$

$$W_2(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{c_0}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}\ . \quad (2.29)$$

Нетрудно заметить, что передаточные функции в форме изображений Лапласа и в операторной форме с точностью до обозначений совпадают. Следовательно, передаточную функцию в форме изображений Лапласа можно получить из передаточной функции в операторной форме, если в последней сделать подстановку **p=s**. Это следует из того, что дифференцированию оригинала, т.е. символическому умножению оригинала на **p** при нулевых начальных условиях соответствует умножение изображения на комплексное число **s**.

Используя передаточные функции, уравнение (2.27) в изображениях Лапласа можно записать

$$Y(s)= W_1(s)\,U(s)+ W_2(s)\,F(s). \qquad (2.30)$$

Это уравнение адекватно исходному дифференциальному уравнению (2.20) только при нулевых начальных условиях. Если начальные условия не равны нулю, то уравнениями (2.21) и (2.30) как математическими описаниями исходного звена пользоваться нельзя.

Еще отметим важное обстоятельство. Сходство между передаточными функциями в форме изображений по Лапласу и в операторной форме чисто внешнее. Оно имеет место только в случае стационарных систем. Если система (звено) является нестационарным, т.е. коэффициенты в уравнениях зависят от времени, формулы (2.28, 2.29) не верны.

Стандартная форма записи линейных дифференциальных уравнений.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами не выше второго порядка обычно записывают в стандартной форме. При этом члены, содержащие выходную величину и ее производные, записывают в левой части уравнения, а все остальные члены – в правой. Коэффициент при выходной величине делают равным единице. Если в правой части имеются производные, то члены, содержащие какую-либо одну входную величину и ее производные, объединяют в одну группу и коэффициент при соответствующей входной величине выносят за скобки.

Уравнение (2.20) в стандартной форме принимает вид

$$T_0^2\ddot{y}+T_1\dot{y}+y=k_1\left(T_2\dot{u}+u\right)+k_2 f\ ,$$

где $T_0^2 = a_0/a_2$; $T_1 = a_1/a_2$, $k_1 = b_1/a_2$, $T_2 = b_0/b_1$, $k_2 = c_0/k_2$.

Постоянные T_0, T_1 и T_2 имеют размерность времени и их называют *постоянными времени*, а коэффициенты k_1 и k_2 *–передаточными коэффициентами*. Если исходное уравнение (2.20) не содержит **у** (a_2=0), то в стандартной форме коэффициент при производной **у** должен быть равен единице, т.е. обе части уравнения делят на коэффициент a_1. Тогда в символической форме уравнение принимает вид

$$\left(T_0^2 p + T_2 p + 1\right) y = k_1 \left(T_2 p + 1\right) u + k_2 f \ .$$

§ 2.4 Частотные и временные характеристики линейных стационарных систем.

При описании линейных стационарных систем важное значение имеют частотные характеристики. Если на вход системы подавать гармоническое воздействие, то вынужденное движение системы будет также описываться гармонической функцией. Легко показать, что операции дифференцирования по времени соответствует замена оператора р на jw . Например, пусть вход будет

$$u = A \cos w t, \tag{2.31}$$

что равно действительной части Ae^{jwt} . Поэтому мы можем положить

$$u = Ae^{jwt}\ , \tag{2.32}$$

помня, что в результате следует взять только действительную часть. Тогда из (2.31)

$$pu = du/\,dt = A\,\frac{d \cos wt}{dt} = -A\omega \sin \omega t, \tag{2.33}$$

а из (2.32)

$$\frac{du}{dt} = Ajwe^{jwt}\ . \tag{2.34}$$

Найдем действительную часть этого выражения

$$\mathrm{Re}\,[\,A\, j\omega\, e^{j\omega t}\,] = \mathrm{Re}[\,Aj\omega(\,\cos \omega t + j \sin \omega t)] =$$
$$= \mathrm{Re}[-\,A\omega \sin \omega t + Aj\omega \cos \omega t\,] = -A\omega \sin \omega t$$

т.е. мы получили тот же самый результат, что и в (2.33). Отсюда
$pu = jw,\ \ u = Ajwe^{jwt}$.

Для линейных систем справедлив принцип *суперпозиции*, согласно которому реакция системы на несколько одновременно действующих входных воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности. Это позволяет ограничиться изучением систем только с одним входом. В общем случае уравнение линейной стационарной системы с одним входом можно записать так:

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \mathbf{K} + a_n\right) y = \left(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \mathbf{K} + b_m\right) u . \quad (2.35)$$

Ее передаточная функция по определению

$$\mathrm{W(p)}= \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots\ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n} . \quad (2.36)$$

Функцию W(j,w), которую получают из передаточной функции (2.36) подстановкой в неё p= jw

$$\mathrm{W(j\omega)}= \frac{b_0 (jw)^m + b_1 (jw)^{m-1} + \ldots\ldots + b_m}{a_0 (jw)^n + a_1 (jw)^{n-1} + \ldots\ldots + a_1} \quad (2.37)$$

называют *частотной передаточной функцией*. Частотная передаточная функция является комплексной функцией от действительной переменной w, которая называется *частотой*. Поэтому функцию W(jw) можно представить в виде

$$\mathrm{W}(\mathrm{j}w) = \mathrm{U}(w) + \mathrm{jV}(w) = Ae^{jj(w)} ,$$

где $A(w) = \sqrt{U^2(w) + V^2(w)}, \quad j(w) = \arg W(jw).$

Если $\left|\arg W(jw)\right| \le p/2$, то $j(w) = arctg \dfrac{V(w)}{U(w)}$.

На комплексной плоскости (рис.2.3) частотная передаточная функция W(j,w) определяет вектор ОС, длина которого равна A(w), а аргумент (угол, образованный этим вектором с действительной положительной полуосью)– $j(w)$. Кривую, которую описывает конец этого вектора при изменении частоты от

0 до ∞ (иногда от $-\infty$ до $+\infty$), называют *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (АФЧХ).

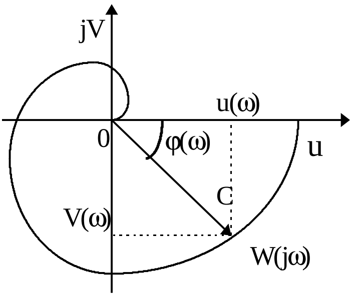


Рис. 2.3

Частотную передаточную функцию называют также *амплитудно-фазовой частотной функцией*. Ее действительную часть U(ω) = Re W (jω) и мнимую часть V (ω)=Im W (jω) называют соответственно *вещественной* и *мнимой частотной функцией*. Модуль $A(w) = \left|W(jw)\right|$ называют *амплитудной частотной функцией*, ее график – *амплитудной частотной характеристикой*.

Аргумент $j(w) = \arg W(jw)$ называют *фазовой частотной функцией*, ее график – *фазовой частотной характеристикой*.

Кроме перечисленных частотных характеристик используют еще логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ) – логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ) и логарифмические фазовые частотные характеристики (ЛФЧХ). Назовем функцию

$$L(\omega)=20\ \lg A(\omega)=20\ \lg\left|W(jw)\right|$$

логарифмической амплитудной частотной функцией. График зависимости логарифмической амплитудной частотной функции L(ω) от логарифма частоты (lg ω) называют *логарифмической амплитудной частотной характеристикой* (ЛАЧХ). При ее построении по оси абсцисс откладывают частоту в логарифмическом масштабе: на отметке, соответствующей значению lg ω, пишут само значение ω, а не значение lg ω, а по оси ординат – L(ω). *Логарифмической фазовой частотной характеристикой* (ЛФЧХ) называют график зависимости фазовой частотной функции $j(w)$ от логарифма частоты lg(ω). При его построении по оси абсцисс, как и при построении ЛАЧХ, на отметке, соответствующей значению lg ω, пишут значение ω.

Единицей измерения L(ω) является децибел, а единицей логарифма частоты в ЛЧХ– декада. *Декадой* называют интервал, на котором частота изменяется в 10 раз. При изменении частоты в 10 раз говорят, что она изменилась на одну декаду.

Ось ординат при построении ЛЧХ проводят через произвольную точку, а не через точку $\omega=0$, поскольку частоте $\omega=0$ соответствует бесконечно удаленная точка ($\lg\omega=-\infty$).

Логарифмические частотные характеристики имеют то преимущество, что для многих простых систем они приближенно представляют собой прямые линии. Вообще известно, что кривизна значительного количества кривых при построении их в логарифмическом масштабе уменьшается. Кроме того, перемножение двух передаточных функций сводится к сложению ординат двух логарифмических частотных характеристик. Амплитудно-фазовые характеристики могут быть построены также и для отрицательных частот. Хотя они и не имеют физического смысла, но иногда могут быть использованы для решения некоторых вопросов устойчивости. Такие амплитудно-фазовые характеристики представляют собой зеркальное изображение обычных амплитудно-фазовых характеристик относительно вещественной оси.

Применяются еще *обратные амплитудно-фазовые характеристики,* которые являются графическим представлением функции 1/W, т.е. обратной передаточной функцией. В этом случае фазовый угол изменяет свой знак, а амплитуды A_0 заменяются на $1/A_0$. При этом амплитудно-фазовая характеристика изменяет свою форму и расположение относительно системы координат. Ветвь, которая у обычной амплитудно-фазовой характеристики уходит в бесконечность, у обратной амплитудно-фазовой характеристики стремится к началу координат.

Рассмотрим, какой физический смысл имеют частотные характеристики и как их можно построить экспериментально. Найдем математическое описание вынужденного движения системы при подаче на ее вход гармонического воздействия. Пусть

$$u = u_m \cos \omega t . \qquad (2.38)$$

Для этого решим уравнение

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots\ldots + a_n)y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots\ldots + b_m)u,$$

подставив в правую часть выражение (2.38). Общее решение имеет вид

$$y(t) = y_c(t) + y_b(t) , \qquad (2.39)$$

где y_c – общее решение однородного уравнения, а y_b – частное решение неоднородного уравнения.

Составляющая $y_c(t)$ определяет свободные движения (переходный процесс). В устойчивых системах она со временем затухает и стремится к нулю. Вынужденное движение описывается частным решением $y_b(t)$. Чтобы его найти, представим входное воздействие (2.38) с помощью формулы Эйлера в виде суммы

$$u = u_m \frac{e^{jwt} + e^{-jwt}}{2} = u_1 + u_2 ,$$

где
$$u_1 = \frac{u_m}{2} e^{jwt}, \quad u_2 = \frac{u_m}{2} e^{-jwt}. \tag{2.40}$$

Используя принцип суперпозиции, решение уравнения можно представить в виде суммы $y=y_1 + y_2$, где y_1 – решение при $u=u_1$, а y_2 – решение при $u=u_2$. Найдем каждое из этих решений. Подставим выражение для u_1 в правую часть уравнения (2.35) вместо u. Так как

$$\left.\begin{aligned} & pu_1 = \frac{u_m}{2} pe^{jwt} = \frac{u_m}{2}(jw)e^{jwt} = (jw)u_1 \\ & p^2 u_1 = p(pu_1) = p(jwu_1) = (jw)^2 u_1, \ldots, \\ & p^m u_1 = (jw)^m u_1 \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

уравнение (2.35) примет вид

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) y_1 = \left[b_0 (jw)^m + b_1 (jw)^{m-1} + \ldots + b_m\right] u_1 \tag{2.42}$$

Частное решение последнего уравнения будем искать в виде

$$y_1 = A_1 u_1 = A_1 \frac{u_m}{2} e^{jwt} , \tag{2.43}$$

где A_1 не зависит от времени. При подстановке этого выражения в (2.42) получим

$$\left[a_0 (jw)^n + a_1 (jw)^{n-1} + \ldots + a_n\right] A_1 u_1 =$$
$$= \left[b_0 (jw)^m + b_1 (jw)^{m-1} + \ldots + b_m\right] u_1$$

откуда

$$A_1 = \frac{b_0(jw)^m + b_1(jw)^{m-1} + \mathbf{K} + b_m}{a_0(jw)^n + a_1(jw)^{n-1} + \mathbf{K} + a_n}.$$

Очевидно, это выражение совпадает с частотной передаточной функцией (2.37) рассматриваемой системы

$$A_1 = W(jw) = A(w)e^{j.j(w)}.$$

Подставив это выражение в формулу (2.43), получим

$$y_1 = A(w)\frac{u_m}{2}e^{j[wt+j(w)]}. \qquad (2.44)$$

Теперь найдем частное решение $\mathbf{y_2}$ исходного уравнения, подставив вместо $\mathbf{u}$ выражение для $\mathbf{u_2}$. Так как

$$pu_2 = \frac{u_m}{2}pe^{-jwt} = (-jw)\frac{u_m}{2}e^{-jwt} = (-jw)u_2,$$

$$p^2u_2 = p(pu_2) = (-jw)^2u_2, \mathbf{K}, p^mu_2 = (-jw)^mu_2,$$

то (2.35) в этом случае

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \mathbf{K} + a_n)y_2 = [b_0(-jw)^m + b_1(-jw)^{m-1} + \mathbf{K} + b_m]u_2$$

Частное решение этого уравнения ищем в виде

$$y_2 = A_2u_2 = A_2\frac{u_m}{2}e^{-jwt}.$$

Проделав те же выкладки, что и при нахождении частного решения $\mathbf{y_1}$, получим

$$A_2 = W(-jw) = A(w)e^{-jj(w)}, \quad y_2 = A(w)\frac{u_m}{2}e^{-j[wt+j(w)]}. \qquad (2.45)$$

Сложив (2.44) и (2.45) для $\mathbf{y_1}$ и $\mathbf{y_2}$, получим математическое описание вынужденного движения:

$$y = y_1 + y_2 = A(w)u_m\cos[wt + j(w)]. \qquad (2.46)$$

Таким образом, при гармоническом воздействии в устойчивых системах после окончания переходного процесса, выходная величина также изменяется по гармоническому закону, но с другими амплитудой и фазой. При этом отношение амплитуд выходной и входной величин равно модулю, а сдвиг по фазе – аргументу частотной передаточной функции. Следовательно, амплитудная частотная характеристика показывает изменение отношения амплитуд, а фазовая частотная характеристика – сдвиг фазы выходной величины относительно входной в зависимости от частоты входного гармонического воздействия.

Для экспериментального построения частотных характеристик необходима специальная аппаратура, в состав которой должен входить генератор гармонических колебаний с регулируемой частотой и устройства для измерения амплитуды и фазы колебаний.

Временные характеристики.

Важнейшей характеристикой автоматических систем (звеньев) являются переходные и импульсные переходные функции и их графики – временные характеристики. Они используются при описании линейных систем, как стационарных, так и нестационарных.

Переходной функцией системы (звена) называют функцию h(t), описывающую изменение выходной величины системы, если на ее вход подается ступенчатое единичное воздействие при нулевых начальных условиях. Аналитически ступенчатое единичное воздействие описывается единичной функцией

$$1(t) = \begin{cases} 1 \quad \text{при } t \geq 0 \\ 0 \quad \text{при } t < 0 \end{cases}$$

График переходной функции – кривая зависимости функции h(t) от времени называют *переходной или разгонной характеристикой*.

Импульсной переходной или *весовой* функцией системы (звена) называют функцию w(t), описывающую реакцию системы на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях. График импульсной переходной функции называют *импульсной переходной характеристикой*.

Переходную и импульсную переходную характеристики называют *временными характеристиками*.

При определении весовой функции используется понятие единичного импульса. Физически этот импульс можно представить как очень узкий импульс, ограничивающий единичную площадь. Математически он описывается дельта-функцией $d(t)$.

Дельта-функция является обобщенной функцией. Здесь мы только отметим, что в рамках теории обобщенных функций любые встречающиеся в приложении функции обладают производными любого порядка. В частности, существует производная от единичной функции. Она равна дельта-функции. Сама дельта-функция обладает производными любого порядка.

При решении практических задач, как правило, дельта-функция и ее производные встречаются только на промежуточных этапах. В окончательном результате они или вовсе отсутствуют, или фигурируют под знаком интеграла в произведении с какой-либо “обычной” функцией. В соответствии с этим дельта-функцию можно определить как функцию, обладающей следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t)dt = \int_{-e}^{e} d(t)dt = 1, \tag{2.47}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t)j(t)dt = \int_{-e}^{e} d(t)j(t)dt = j(0). \tag{2.48}$$

Производные от дельта-функции можно определить по следующим соотношениям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d'(t)j(t)dt = \int_{-e}^{e} d'(t)j(t)dt = -j(0), \tag{2.49}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overset{(m)}{d}(t)j(t)dt = \int_{-e}^{e} \overset{(m)}{d}(t)j(t)dt = (-1)^m \overset{(m)}{j}(0), \tag{2.50}$$

где e – произвольное положительное число, $j(t)$ – обычная функция, обладающая m-ой производной, $\overset{(m)}{d}(t)$ – m-я производная по времени от дельта-функции.

Найдем изображение по Лапласу от дельта-функции и ее производных. При этом преобразование Лапласа будем трактовать как предельное соотношение

$$X(s) = \lim_{e \to 0} \int_{-e}^{\infty} x(t) e^{-st} dt .$$

Используя (2.47)–(2.50), нетрудно получить

$$L\{d(t)\} = 1,\ L\{\dot{d}(t)\} = s,\ L\left\{\overset{(m)}{d}(t)\right\} = s^m. \qquad (2.51)$$

А теперь рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в общем виде:

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \mathbf{K} + a_n\right) y = \left(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \mathbf{K} + b_m\right) u . \qquad (2.52)$$

В изображениях по Лапласу это уравнение имеет вид

$$Y(s) = W(s) U(s), \qquad (2.53)$$

где $W(s) = \left(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \mathbf{K} + b_m\right) / \left(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \mathbf{K} + a_n\right)$ есть передаточная функция.

Привлекая (2.51), легко убедиться, что уравнение (2.53) справедливо и в тех случаях, когда u=1(t) или u=$d(t)$.

В соответствии с определением весовой функции при u=$d(t)$ переменная y(t)=w(t). И так как L{δ(t)}=1, то при этом (2.53) можно записать

$$L\{\omega(t)\},= W(s). \qquad (2.54)$$

Таким образом, передаточная функция равна изображению по Лапласу от весовой функции и соответственно

$$\omega(t) = L^{-1}\{W(s)\} \qquad (2.55)$$

Последнюю формулу можно использовать для вычисления весовой функции.

Установим связь между весовой и переходной функциями. Поскольку L{1(t)}=1/ s, то уравнение (2.53) при u=1(t) принимает вид

$$L\{ h(t) \} = W(s)\ 1/s$$

Сравнивая эту формулу с (2.54), легко заметить, что sL{h(t)}= L{w(t)}. Так как при нулевых начальных условиях умножению изображения на **s** соответствует дифференцирование оригинала, то из последнего равенства следует w(t)= $\dot{h}(t)$.

Весовая и переходная функции совместно с передаточной функцией являются исчерпывающими характеристиками системы (звена) при нулевых начальных условиях. По ним можно однозначно определить выходную величину при произвольном входном воздействии. Действительно, с помощью теоремы о свертке, исходя из уравнения (2.53), можем записать

$$y(t) = \int_0^t w(t-t)u(t)dt = \int_0^t w(t)u(t-t)dt \ .$$

Эта формула также справедлива только при нулевых начальных условиях.

§ 2.5. Элементарные звенья и их характеристики.

Звеном называют математическую модель элемента, соединения элементов или любой части системы. Звенья, как и системы, могут описываться дифференциальными уравнениями довольно высокого порядка, и в общем случае их передаточные функции могут быть записаны в виде

$$W(s) = \left(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \mathbf{K} + b_m\right) / \left(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \mathbf{K} + a_n\right). \quad (2.56)$$

Из алгебры известно, что полином произвольного порядка можно разложить на простые множители вида

$$k_1 s, \quad (d_1 s + d_2), \quad (d_1 s^2 + d_2 s + d_3). \qquad (2.57)$$

Поэтому передаточную функцию (2.56) можно представить как произведение простых множителей вида (2.57) и простых дробей вида

$$k / s, \quad k/(d_1 s + d_2), \quad k/(d_1 s^2 + d_2 s + d_3). \qquad (2.58)$$

Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или простых дробей, называют *типовыми или элементарными звеньями*.

Напомним следующее правило модулей и аргументов комплексных чисел. Пусть комплексное число представлено в виде отношения двух произведений комплексных чисел.

$$Z = \prod_{i=1}^{m} z_i \Big/ \prod_{k=1}^{n} \tilde{z}_k$$

Так как $z_i = |z_i| e^{l \cdot \arg \cdot z_i}$, $\tilde{z}_k = |\tilde{z}_k| e^{j \cdot \arg \cdot \tilde{z}_k}$, то для модуля и аргумента комплексного числа будем иметь

$$|Z| = \frac{\prod_{i=1}^{m} |z_i|}{\prod_{k=1}^{n} |\tilde{z}_k|}; \quad \arg Z = \sum_{i=1}^{m} \arg \cdot z_i - \sum_{k=1}^{n} \arg \cdot \tilde{z}_k$$

Таким образом, модуль комплексного числа, представленного в виде отношения двух произведений комплексных чисел, равен отношению произведения модулей сомножителей числителя к произведению модулей сомножителей знаменателя, а его аргумент – разности суммы аргументов сомножителей числителя и суммы аргументов сомножителей знаменателя.

Пропорциональное звено. Его еще называют идеальным или безынерционным звеном. Это звено, постоянная времени которого настолько мала, что ею можно пренебречь. Оно не обладает инерционностью и мгновенно дает на выходе величину y(t)=ku(t). Для такого звена уравнение динамики перестает быть дифференциальным уравнением, а становится простейшей алгебраической зависимостью и совпадает со статической характеристикой. В качестве примеров устройств, работающих на этом принципе, назовем обычный выключатель, реостат, потенциометр, электронный усилитель, помещенный в электромеханическую систему регулирования.

Передаточная функция звена W(s)=k. Частотные и временные функции имеют следующий вид:

W(jω)=k: U(ω)=k; V(ω)=0; A(ω)=k; L(ω)=20 lg k; h(t)=k1(t):

$$w(t) = d(t): \quad j(w) = 0$$

На рис.2.4 представлены некоторые из характеристик пропорционального звена; амплитудно-фазовая частотная характеристика, (рис.2.4а) есть точка на действительной оси; фазовая частотная характеристика (и ЛФЧХ) совпадает с положительной полуосью частот; логарифмическая амплитудная частотная характеристика (рис.2.4б) параллельна оси частот и проходит на уровне L(ω)=20 lg k. Переходная характеристика (рис.2.4в) параллельна оси времени и проходит на уровне h=k.

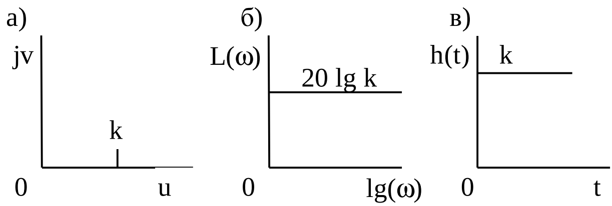


Рис.2.4

Иногда бывает необходимо учитывать чистое запаздывание по времени, когда выходная величина идеально повторяет входную, но с отставанием на постоянный отрезок времени t , что описывается уравнением y(t)=ku(t– t).

Интегрирующее звено. Это устройство, у которого выходная величина пропорциональна интегралу от входной. Такое звено описывается уравнением py=ku, или передаточной функцией W(s)=k/s.

Частотная передаточная функция звена W(jω)=k/jω=–jk/ω. Остальные частотные и временные функции имеют следующий вид:

U(ω)=0, V(ω)=–k/ω, A(ω)=k/ω, $j\left(w\right) = -p/2$, L(ω)=20 lg k–20 lg ω,

$$h(t) = k\,t\ ,\quad w(t) = k.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис.2.5а) идеального интегрирующего звена совпадает с отрицательной мнимой полуосью координат, ЛФЧХ (рис.2.5б) параллельна оси частот и проходит на уровне $j = -p/2$, т.е. сдвиг фазы не зависит от частоты. ЛАЧХ представляется наклонной прямой, проходящей через точку с координатами ω=1 и L(ω)=20 lg k. Как видно из уравнения для ЛАЧХ, при увеличении частоты на одну декаду ордината L(ω) уменьшается на 20дБ. Поэтому говорят, что наклон характеристики *минус двадцать децибел на декаду*.

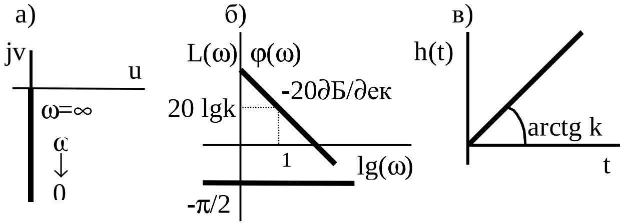


Рис. 2.5

Переходная характеристика представляет собой прямую, проходящую через начало координат с угловым коэффициентом наклона, равным k, (рис.2.5в).

Примером такого звена может служить маломощный электродвигатель, сконструированный так, что угловая скорость вращения его вала ω точно пропорциональна напряжению U в цепи якоря.

$$\omega = k\ U$$

или в выражении через угол поворота вала j

$$dj/dt = k\ U$$

что соответствует уравнению интегрирующего звена, если выходной величиной у звена является угол поворота вала.

Дифференцирующее звено. Идеальное дифференцирующее звено представляет собой устройство, которое на выходе дает “чистую” (без искажений) производную по времени. Оно описывается уравнением y=kpu или передаточной функцией W(s)=ks. Частотные и временные функции имеют следующий вид:

W(jω)=jkω; U(ω)=0; V(ω)=kω; A(ω)=kω; $j(w)=p/2$; h(t)=$d(t)$;

w(t)=$\dot{d}(t)$; L(ω)=20 lg k + 20 lg ω.

Амплитудно-фазовая характеристика (рис.2.6а) совпадает с положительной мнимой полуосью. ЛФЧХ (рис.2.6б) параллельна оси частот; сдвиг фазы не зависит от частоты и равен $p/2$. ЛАЧХ есть прямая, проходящая через точку с координатами ω=1 и L(ω)=20 lg k и имеющая наклон 20 дБ/дек. (читается: плюс двадцать децибел на декаду).

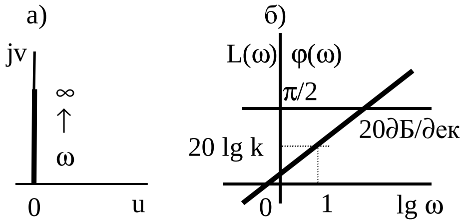


Рис. 2.6

В качестве примера такого звена можно привести тахогенератор в случае, если входной величиной служит угол поворота вала. Тахогенератор дает напряжение пропорциональное угловой скорости вращения вала, а та в свою очередь является производной по времени от угла поворота.

Апериодическое звено первого порядка. Апериодическим звеном первого порядка называют звено, которое описывается уравнением

$$(Tp+ 1)y = ku \,, \tag{2.59}$$

или передаточной функцией

$$W(s) = k /(Ts+1) \,.$$

Его также называют инерционным звеном, релаксационным, одноемкостным звеном.

В отличие от ранее рассмотренных, это звено характеризуется двумя параметрами: постоянной времени **T** и передаточным коэффициентом **k**.

Частотная передаточная функция апериодического звена

$$W(j\omega) = k /(Tj\omega+1) \tag{2.60}$$

после умножения её числителя и знаменателя на комплексно-сопряженное знаменателю выражение позволяет определить

$$U(\omega) = k /[(T\omega)^2+1]; \quad V(\omega) = -\, kT\omega/[(T\omega)^2 +1] \,. \tag{2.61}$$

Амплитудную и фазовую частотные функции определим, воспользовавшись правилом модулей и аргументов. Так как модуль числителя передаточной функции равен **k**, а модуль знаменателя

$$\sqrt{(Tw)^2+1}, \text{ то}$$

$$A(\omega) = k / \sqrt{(Tw)^2+1} . \qquad (2.62)$$

Аргумент числителя W(jω) равен нулю, а аргумент знаменателя arctg ωT, Поэтому

$$j(w) = \arg W(j\omega) = -\operatorname{arctg} \omega T.$$

Из (2.62) имеем

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(Tw)^2+1}. \qquad (2.63)$$

Решив дифференциальное уравнение звена (2.59) при u=1(t) и нулевом начальном условии, получим

$$h(t) = k\left(1-e^{-t/T}\right) .$$

Весовая функция есть производная по времени от разгонной функции

$$w(t) = \dot{h}(t) = (k/T)e^{-t/T} .$$

АФЧХ апериодического звена (рис.2.7 а) есть полуокружность, в чем можно убедиться, исключив из параметрических уравнений (2.61) частоту.

ЛАЧХ представлена на рис.2.7б в виде кривой и ломаной линии, так называемой асимптотической ЛАЧХ. Разница между точной ЛАЧХ и асимптотической обычно не очень велика и небольшая погрешность может повлиять на выводы только в критических случаях.

Частоту $\omega_1 = 1/T$, при которой пересекаются асимптоты, называется *сопрягающей частотой*. Точная и асимптотическая ЛАЧХ наиболее сильно отличаются при сопрягающей частоте и отклонение примерно равно 3 дБ.

Уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(w) \approx \begin{cases} 20 \lg k \ \text{ при } w < w_1 \\ 20 \lg k - 20 \lg Tw \ \text{ при } w \geq w_1 \end{cases}$$

Оно получается из уравнения (2.63), если в нем под корнем при ω **p** ω_1 пренебречь первым слагаемым, а при $\omega \geq w_1$ – вторым слагаемым.

Согласно полученному уравнению, асимптотическую ЛАЧХ можно строить следующим образом: на уровне L(ω)=20 lg k до частоты $\omega=\omega_1$ провести прямую, параллельную оси частот, а далее через точку с координатами $\omega=\omega_1$ и L(ω)=20 lgk – прямую под наклоном –20 дБ/дек. По АФЧХ или ЛАЧХ можно легко определить параметры T и k апериодического звена.

Логарифмическая частотная фазовая характеристика изображена на рис.2.7б. Она стремится к нулю при $\omega \to 0$ и к –π/2 при $w \to \infty$. При $\omega=\omega_1$ фазовая частотная функция принимает значение –π/4, Таким образом, ЛФЧХ всех апериодических звеньев имеют одинаковую форму и могут быть получены по какой-либо одной характеристике параллельным сдвигом вдоль оси частот влево или вправо в зависимости от постоянной времени T.

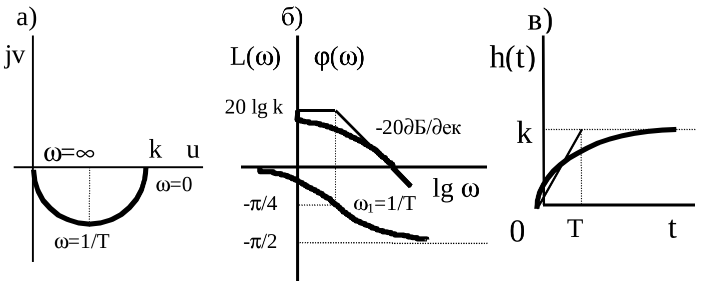


Рис. 2.7

Переходная характеристика апериодического звена (рис2.7в) представляет собой экспоненциальную кривую. По ней можно определить параметры: передаточный коэффициент, равный установившемуся значению h(∞); постоянную времени, равную значению **t**, соответствующему точке пересечения касательной к характеристике в начале координат с её асимптотой.

Форсирующее звено. Форсирующим звеном, или форсирующим звеном первого порядка называют звено, которое описывается уравнением

$$y = k(Tp+1)u,$$

или, что то же, передаточной функцией

$$W(s) = k(Ts+1).$$

Это звено, как и апериодическое, характеризуется двумя параметрами: постоянной времени T и передаточным коэффициентом k.

Частотная передаточная функция

$$W(jw) = k(Tjw + 1).$$

Остальные частотные и временные функции

$$U(w) = k,\ V(w) = kTw,\ A(w) = k\sqrt{(Tw)^2 + 1},$$

$$j(w) = arctg\,Tw,\ L(w) = 20\lg k + 20\lg\sqrt{(Tw)^2 + 1},$$

$$h(t) = k[Td(t) + 1],\ w(t) = k[T\dot{d}(t) + d(t)]$$

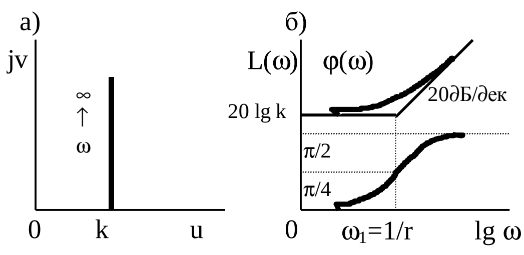


Рис. 2.8

АФЧХ (рис.2.8а) есть прямая, параллельная мнимой оси и пересекающая действительную ось в точке U=k. ЛАЧХ изображена на рис.2.8б. Как и в случае апериодического звена, на практике ограничиваются построением асимптотической ЛАЧХ (ломаная линия). Частоту ω=1/T, соответствующую точке излома этой характеристики, называют сопрягающей частотой.

Уравнение асимптотической ЛАЧХ форсирующего звена имеет вид

$$L(w) \approx \begin{cases} 20\lg k & \text{при } w < w_1 \\ 20\lg k + 20\lg Tw & \text{при } w \geq w_1 \end{cases}$$

Асимптотическая ЛАЧХ при $\omega<\omega_1$ параллельна оси частот и пересекает ось ординат при L=20 lg k, а при $w \geq w_1$ имеет наклон 20 дБ/дек.

Колебательное, консервативное и апериодическое второго порядка звенья. Звено, которое можно описать уравнением

$$\left(T_0^2 p^2 + T_1 p + 1\right) y = ku$$

или, в другой форме

$$\left(T^2 p^2 + 2xTp + 1\right) y = ku, \tag{2.64}$$

где Т=T_0, ξ=T_1/2Т, или передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2xTs + 1}, \tag{2.65}$$

называют колебательным если 0<ξ<1, консервативным если ξ=0 (T_1=0), и апериодическим звеном второго порядка, если $x \geq 1$. Коэффициент ξ называют коэффициентом демпфирования.

Колебательное звено (0<x<1). Частотная передаточная функция

$$W(jw) = \frac{k}{\left(1 - T^2 w^2\right) + j2xTw}.$$

Умножив числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное знаменателю выражение, получим вещественную и мнимую частотные функции

$$U(w) = \frac{k\left(1 - T^2 w^2\right)}{\left(1 - T^2 w^2\right)^2 + \left(2xTw\right)^2}, \quad V(w) = \frac{-2kxTw}{\left(1 - T^2 w^2\right)^2 + \left(2xTw\right)^2}.$$

Фазовая частотная функция, как это видно из АФЧХ (рис.2.9,а), изменяется монотонно от 0 до –π и выражается формулой

$$j(w) = \begin{cases} -arctg\dfrac{2xTw}{1 - T^2 w^2} & \text{при } w \leq 1/T, \\ -p - arctg\dfrac{2xTw}{1 - T^2 w^2} & \text{при } w > 1/T. \end{cases}$$

ЛФЧХ (рис.2.9б) при $w \to 0$ асимптотически стремится к оси частот, а при $w \to \infty$ к прямой $j = -p$. Её можно построить с помощью шаблона.

Амплитудная частотная функция

$$A(w) = \frac{k}{\sqrt{\left(1 - T^2 w^2\right)^2 + \left(2xTw\right)^2}}$$

и логарифмическая амплитудная функция

$$L(w) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{\left(1 - T^2 w^2\right)^2 + \left(2xTw\right)^2} \qquad (2.66)$$

Уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(w) \cong \begin{cases} 20 \lg k & \text{п ри } w < w_1 \\ 20 \lg k - 40 \lg Tw & \text{п ри } w \geq w_1 \end{cases}$$

где ω_1=1/T, ω_1 – сопрягающая частота. Она получается из уравнения (2.66), если под корнем при $\omega<\omega_1$ оставить только единицу, а при $\omega>\omega_1$ – слагаемое $T^4\omega^4$. Асимптотическая ЛАЧХ (рис.2.9.б) при $\omega<\omega_1$ параллельна оси частот, а при $\omega>\omega_1$ имеет наклон 40 дБ/дек.

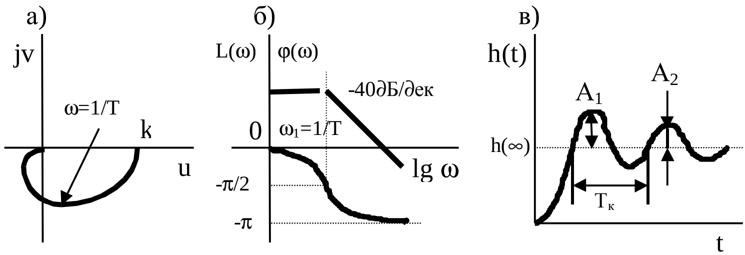


Рис 2.9

Следует иметь в виду, что асимптотическая ЛАЧХ при малых значениях коэффициента демпфирования довольно сильно отличается от точной ЛАЧХ.

Решив дифференциальное уравнение (2.64) колебательного звена при u=l(t) и нулевых начальных условиях $\left(y(0) = \dot{y}(0) = 0\right)$, найдем переходную функцию

$$h(t) = k\left[1 - \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} e^{-at} \sin\left(bt + j_0\right)\right],$$

где $a = \dfrac{x}{T}, \ b = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{T}, \ j_0 = arctg \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Весовая функция

$$w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k\left(a^2 + b^2\right)}{b} e^{-at} \sin bt \,.$$

По переходной характеристике (рис.2.9.в) можно определить параметры колебательного звена следующим образом.

Передаточный коэффициент k определяют по установившемуся значению h(∞) переходной функции k=h(∞). Постоянную времени T и коэффициент демпфирования ξ можно найти из уравнений

$$bT_k = 2p \ , \quad A_1 / A_2 = e^{aT_k}$$

или

$$b = 2p / T_k \ , \quad a = \frac{1}{T_k} \ln A_1 / A_2 \ ,$$

где T_k – период колебаний, A_1 и A_2 – амплитуды двух соседних колебаний относительно установившегося значения .

Консервативное звено (x**=0).** Передаточная функция

$$W(s) = k \big/ \left(T^2 s^2 + 1\right)$$

Частотная передаточная функция

$$W(jw) = k \big/ \left(1 - T^2 w^2\right)$$

Фазовая частотная функция, как это следует из АФЧХ (рис.2.10.а),

$$j(w) = \begin{cases} 0 & \text{при } w < 1/\mathrm{T}, \\ -p & \text{при } w > 1/\mathrm{T} \end{cases}$$

Нетрудно выписать выражения для остальных частотных функций; ЛЧХ приведены на рис.2.10.б.

Переходная функция

$$h(t) = k\left(1 - \cos w_1 t\right), \quad w_1 = 1/T.$$

Переходная характеристика (рис.2.10.в) представляет собой график гармонических колебаний.

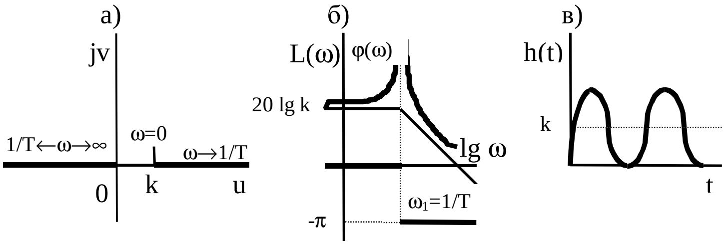


Рис. 2.10

Апериодическое звено второго порядка $(x \geq 1)$**.** Передаточную функцию (2.65) при $x \geq 1$ можно преобразовать к виду

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где
$$T_{1,2} = \frac{T}{x \pm \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Апериодическое звено второго порядка можно представить как последовательное соединение двух апериодических звеньев первого порядка. Оно не относится к числу элементарных звеньев.

Форсирующее звено второго порядка. Так называют звено, которое описывается уравнением

$$y = k\left(T^2 p^2 + 2xTp + 1\right)u$$

или, что то же, передаточной функцией

$$W(s) = k\left(T^2 s^2 + 2xTs + 1\right) \tag{2.67}$$

при условии, что ξ<1, частотная функция имеет вид

$$W(jw) = k\left(1 + 2xjwT - T^2 w^2\right),$$

откуда $U(w) = k\left(1 - w^2 T^2\right)$, $V(w) = 2kxjwT$.

Амплитудная частотная функция имеет вид

$$A(w) = k\sqrt{\left(1 - w^2 T^2\right)^2 + (2xwT)^2}$$

Логарифмическая амплитудная функция

$$L(w) = 20\lg k + 20\lg\sqrt{\left(1 - w^2 T^2\right)^2 + (2xwT)^2}.$$

Уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(w) \cong \begin{cases} 20\lg\, k \quad \text{п ри } w < w_1 \\ 20\lg\, k + 40\lg\, Tw \quad \text{п ри } w > w_1 \end{cases}$$

где ω_1=1/T – сопрягающая частота. Асимптотическая ЛАЧХ при $\omega<\omega_1$ параллельна оси частот, а при $\omega>\omega_1$ имеет наклон +40дБ/дек. ЛФЧХ получается зеркальным отражением относительно оси частот ЛФЧХ соответствующего колебательного (ξ<1) или консервативного (ξ=0) звена.

Если ξ>1, то звено с передаточной функцией (2.67) не относится к числу элементарных звеньев. Его можно представить как последовательное соединение двух форсирующих звеньев первого порядка. Временные функции получаются решением дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях.

Неминимально-фазовые звенья. Звено называют минимально-фазовым, если все нули и полюса его передаточной функции имеют отрицательные или равные нулю вещественные части. Звено называют неминимально-фазовым, если хотя бы один нуль или полюс его передаточной функции имеет положительную вещественную часть.

Известно, что нулями передаточной функции W(s)=R(s)/Q(s), где R(s) иQ(s) есть полиномы от **s**, называют корни уравнения R(s)=0, т.е. такие значения **s**, при которых передаточная функция обращается в нуль, а полюсами – корни уравнения Q(s)=0, т.е. такие значения **s**, при которых передаточная функция обращается в бесконечность.

Примерами неминимально-фазовых элементарных звеньев являются звенья с передаточными функциями

$$W(s) = k/(Ts-1), \qquad W(s) = k\,(Ts-1)$$

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 - 2xTs + 1}\ , \ W(s) = k\left(Ts^{2^2} - 2xTs + 1\right)\ ;$$

Все ранее рассмотренные элементарные звенья относятся к минимально-фазовым. Минимально-фазовые системы имеют при заданной энергии источника минимальную величину сдвига фазы. У неминимально-фазового звена сдвиг фазы по модулю больше почти в два раза, чем у минимально-фазового звена, имеющего одинаковую АЧХ с неминимально-фазовым звеном. Этим и объясняется его название.

На рис.(2.11) приведены логарифмические частотные характеристики неминимально-фазовых звеньев с передаточными функциями

W(s) = k /(Ts – 1)   и   W(s) = k (Ts – 1)

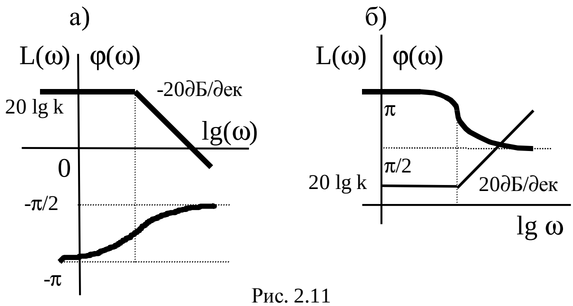


Рис. 2.11

ЛАЧХ этих звеньев полностью совпадают с ЛАЧХ апериодического и форсирующих звеньев, рис.(2.7), (2.8). Сдвиг фазы у последних меньше: фазовые частотные функции апериодического и форсирующих звеньев по абсолютной величине не превышают значения $p/2$, в то же время фазовые частотные функции соответствующих неминимально-фазовых звеньев достигают по абсолютной величине значения p .

К неминимально-фазовым звеньям относится и звено *чистого запаздывания* с передаточной функцией

$$W(s) = ke^{-ts} .$$

Частотная передаточная функция

$$W(jw) = ke^{-jtw} = k\left(\cos wt - j\sin wt\right) .$$

Для остальных частотных и временных функций будем иметь

U(ω)=k cos ωτ; V(ω)=–k sin ωτ; A(ω)=k; φ(ω)=–ωτ;
L(ω)=20 lg k; h(t)=kl(t–τ); ω(t)=kδ(t–τ).

АФЧХ рис.(2.12 .а) представляет собой окружность с центром в начале координат и радиусом **k**. Каждой точке этой характеристики соответствует бесконечное множество значений частот. ЛАЧХ, рис.(2.12.б) совпадает с характеристикой безинерционного звена с передаточным коэффициентом **k**, ЛФЧХ – с графиком функции $y=-\tau 10^x$ $(y=L(\omega);\ x=\lg\omega)$.

Переходная характеристика приведена на рис.2.12 в.

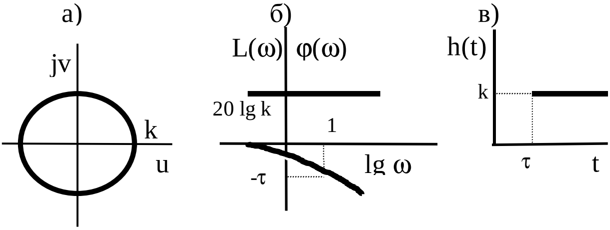


Рис. 2.12

Глава 3. Структурные схемы стационарных линейных систем.

Структурной схемой в теории автоматического управления называют графическое изображение математической модели системы управления в виде соединения звеньев. Звено на схеме рисуют в виде прямоугольника с указанием входных и выходных величин и передаточной функции внутри него. Иногда вместо передаточной функции внутри прямоугольника пишут уравнение или рисуют переходную функцию. Звенья могут быть просто пронумерованы, а их передаточные функции, уравнения или характеристики представлены вне структурной схемы.

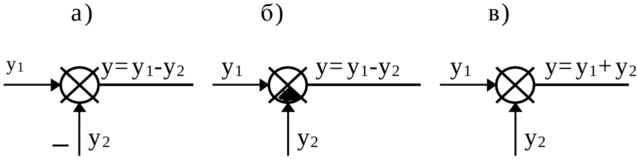


Рис. 3.1

Входные и выходные величины принято записывать в виде изображений, если передаточные функции заданы в форме изображений. Если же передаточные функции заданы в операторной форме или звенья описаны дифференциальными уравнениями, то входные и выходные переменные записывают в виде оригинала.

Сравнивающие и суммирующие звенья изображают в виде кружочка, разделенного на секторы, (рис.3.1). В сравнивающем звене сектор, на который подается вычитаемое, затемняют, или перед соответствующим входом ставят знак минус, (рис.3.1.б).

При математическом описании автоматическую систему обычно изображают в виде блок-схемы и для каждого блока записывают уравнения, исходя из физических законов, которым подчиняются процессы в нем. Структурную схему можно составить на основании этой блок-схемы и полученных уравнений или только на основании последних. Дальнейшие преобразования, необходимые для получения уравнений и передаточных функций системы, проще и нагляднее производить по структурной схеме.

Звено на структурной схеме не обязательно изображает модель какого-либо отдельного элемента. Оно может быть и моделью соединения элементов или любой части системы.

§ 3.1 Правила преобразования структурных схем.

1. *Последовательное соединение звеньев.* (рис.3.2). При последовательном соединении выходная величина каждого предшествующего звена является входным воздействием последующего. При этом подразумевается, что звенья обладают свойством направленности, т.е. подключение последующего звена к предыдущему не изменяет его координат. Многие звенья в системе регулирования обладают этим свойством.

Группу последовательно включенных направленных звеньев можно заменить одним сложным звеном, передаточная функция которого равна произведению передаточных функций отдельных звеньев.

Действительно, запишем уравнения звеньев

$$y_1 = W_1 y_0,\ \ y_2 = W_2 y_1,\ \ldots\ldots\ldots\ y_n = W_n y_{n-1}.$$

Исключив из этой системы переменные $y_1, y_2, \ldots\ldots\ y_{n-1},$ получим

$$y_n = W_1 W_2 \ldots\ldots W_n y_0, \tag{3.1}$$

откуда

$$W = y_n / y_0 = \prod_{i=1}^{n} W_i\ .$$

По передаточным функциям можно получить дифференциальное уравнение.
Пусть в изображениях по Лапласу

$$W_1(s)=\frac{K_1(s)}{D_1(s)} \quad ....W_i(s)=\frac{K_i(s)}{D_{i_i}(s)}, \tag{3.2}$$

где K, D – полиномы. Подставляя (3.2) в (3.1) и избавляясь от знаменателей, получим

$$[\ D_1(s)\ D_2(s)......D_n(s)]\ Y_n(s) = [\ K_1(s)\ K_2\ (s)......K_n(s)]\ Y_0(s),$$

откуда, переходя к оригиналу (при нулевых начальных условиях), получим

$$[D_1(p)\ D_2(p).......D_n(p)]\ y_n = K_1(p)\ K_2(p).......K_n(p)\ y_0.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение можно получить из передаточных функций, заменив **s** на символ дифференцирования р.

2. *Параллельное соединение звеньев,* (рис.3.3). При параллельном соединении на вход всех звеньев подается один и тот же сигнал, а выходные величины складываются.

Цепь из параллельно соединенных звеньев можно заменить одним звеном с передаточной функцией W(s), равной сумме передаточных функций входящих в нее звеньев

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s)\,.$$

Для вывода этой формулы составим уравнения для каждого из звеньев

$$y_1=W_1\,y_0,\ \ y_2=W_2\,y_0\ \ ....\ y_n=W_n\,y_0$$

Сложив эти уравнения и учитывая, что $y=\sum_{i=1}^{n} y_i$, получим искомую формулу.

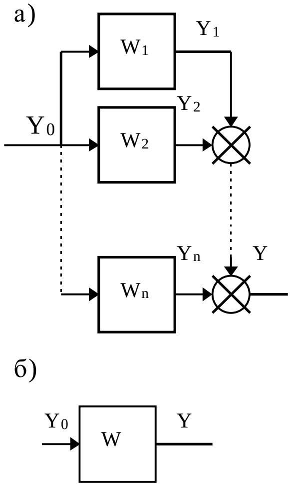


Рис. 3.3

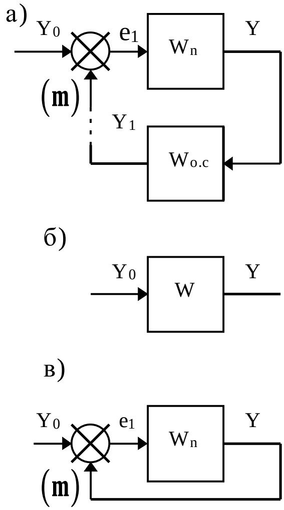


Рис. 3.4

3. *Звено, охваченное обратной связью,* (рис.3.4.а). Считается, что звено охвачено обратной связью, если его выходной сигнал через какое-либо звено подается на вход. При этом, если сигнал обратной связи y_1 вычитается из входного сигнала y_0, то обратная связь называется *отрицательной*. Если сигнал обратной связи y_1 складывается с входным воздействием y_0, то обратная связь называется *положительной*.

Обратимся к рис.3.4.а. Разомкнем обратную связь перед сравнивающим звеном и получим цепь из двух последовательно соединенных звеньев. Передаточная функция такой разомкнутой цепи W равна произведению передаточной функции $W_п$ прямой цепи и передаточной функции $W_{о.с.}$ обратной связи: $W=W_пW_{о.с}$ Покажем, что *передаточная функция* $W_з$ *замкнутой цепи с отрицательной (положительной) обратной связью равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу плюс (минус) передаточная функция разомкнутой цепи*

$$W_з = W_п \big/ \left(1 \pm W\right).$$

Для этого выпишем уравнения для каждого звена при отрицательной обратной связи

$$y=W_п\, e_1, \qquad y=W_{о.с.}\, y, \qquad e_1=y_o-y_1\ .$$

Здесь последнее уравнение для сравнивающего звена называют уравнением замыкания. Исключив переменные e_1 и y_1 из приведенной системы, получим

$$y = W_п (y_о - W_{ос} y) \text{ или } (1+W_п W_{ос})y = W_п y_0.$$

Отсюда

$$W_з = y/y_о = W_п/(1+W_п W_{ос}) = W_п/(1+W).$$

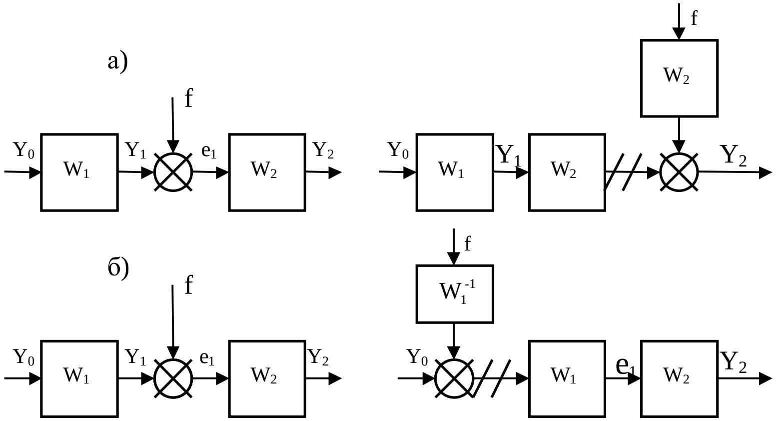
Если обратная связь положительна, то аналогично получим

$$W_з = y/y_о = W_п/(1-W).$$

Если передаточная функция $W_{о,с.}=1$, то обратная связь называется *единичной* и структурная схема изображается так, как показано на рис.3.4.в. Передаточная функция $W_з$ при этом принимает вид $W_з=W_п/(1+W_п)$ при отрицательной обратной связи и $W_з=W_п/(1-W_п)$ при положительной обратной связи. При положительной обратной связи система часто оказывается неустойчивой. В системе возникает регенерация самовозбуждения. Если амплитуда сигнала обратной связи имеет достаточную величину, то при наличии в системе нелинейных элементов возникают устойчивые колебания. Важное свойство обратной связи можно определить при рассмотрении передаточной функции замкнутой цепи, когда коэффициент усиления прямой цепи передачи делается очень большим. Когда этот коэффициент приближается к бесконечности, передаточная функция замкнутой цепи приближается к $1/W_{о.с}$, т.е. передаточная функция замкнутой системы становится независимой от прямой цепи передачи. Это свойство широко используется в радиотехнике в схемах усилителей с обратной связью с целью получить стабильное усиление независимое от дрейфа нулей и изменения параметров усилителя. Если обеспечить стабильность пассивных элементов цепи обратной связи, то стабильность коэффициента усиления может быть очень высокой.

При преобразованиях структурных схем возникает необходимость переноса и перестановки сумматоров и узлов. Рассмотрим, какие изменения в схеме при этом нужно произвести.

4. *Перенос сумматора* (рис.3.5). Элементарная логика показывает, что при переносе сумматора по ходу сигнала необходимо добавить звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор.



Если сумматор переносится против хода сигнала, то необходимо добавить звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которую переносится сумматор.

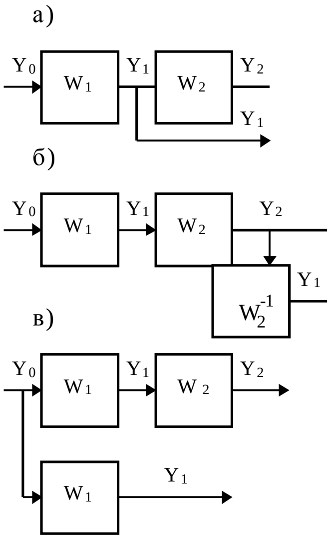


Рис. 3.6.

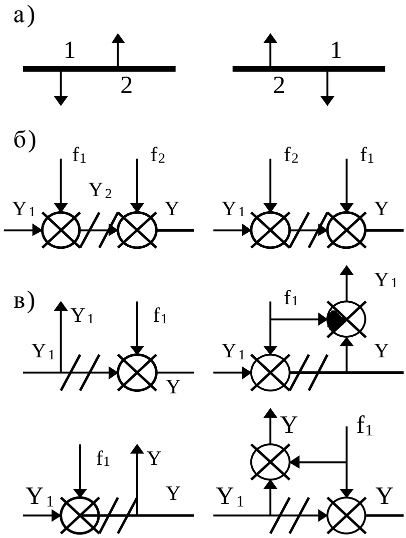


Рис. 3.7.

5. *Перенос узла* .(рис.3.6.а). При переносе узла также необходимо добавить звено. Если узел переносится по ходу сигнала, то добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис.3.6.б). Если узел переносится против хода сигнала, то добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис.3.6.в).

6. *Перестановка узлов и сумматоров* (рис.3.7). Узлы также как и сумматоры можно переставлять местами, не добавляя звена (рис.3.7.а.б). При перестановке узла и сумматора (перенос узла через сумматор) необходимо добавить звено – суммирующее или сравнивающее (рис.3.7.в,г). При переносе узла через сумматор, а также при перестановке сумматоров возникают неэквивалентные участки линии связи. Эти участки на рисунках заштрихованы.

§ 3.2 Вычисление передаточной функции одноконтурной системы.

Замкнутую систему называют одноконтурной, если при ее размыкании в какой-либо точке получается цепочка из последовательно соединенных звеньев или цепь, не содержащая параллельных и обратных связей.

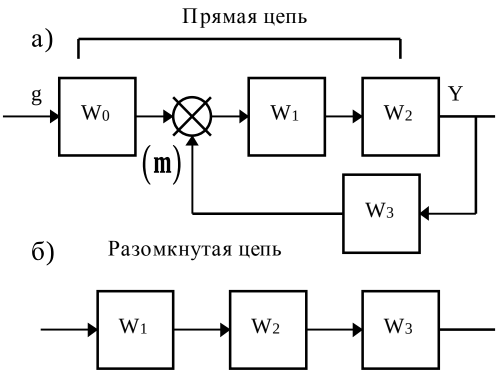


Рис. 3.8

Рассмотрим одноконтурную систему на рис.3.8.,а и найдем передаточную функцию по входу g и выходу y. Участок по ходу сигнала от точки приложения входного воздействия до точки съема выходного сигнала называют прямой цепью, а цепь из последовательно соединенных звеньев, входящих в замкнутый контур (рис 3.8.б), разомкнутой цепью. Легко видеть, что справедливо следующее утверждение: *передаточная функция одноконтурной системы с отрицательной (положитель-*

ной) обратной связью равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу плюс (минус) передаточная функция разомкнутой цепи:

$$W_{yg} = y/g = \frac{W_0 W_1 W_2}{1 \pm W_1 W_2 W_3} = W_n / (1 \pm W),$$

где Wп – передаточная функция прямой цепи, W – передаточная функция разомкнутой цепи. Это правило справедливо для любой одноконтурной системы.

При наличии нескольких входных величин можно каждую из них рассматривать независимо от остальных. Знаки в любой суммирующей точке соответствуют тому, как та или иная входная величина вводится в систему. Путем суперпозиции отдельные выходные величины, обусловленные каждая своим входным сигналом, складываются для получения общей выходной величины, когда все входные сигналы действуют одновременно. Для примера рассмотрим систему с несколькими входными звеньями, изображенную на рис.3.9.а. Особое внимание следует обратить на знаки в суммирующих точках. Они определяют следующие зависимости:

$E_1(s)=R_1(s)–B(s)$, $E_2(s)=M_1(s)+R_2(s)$, $E_3(s)=M_2(s)–R_3(s)$.

Для определения той или иной выходной величины, обусловленной каждым входным сигналом, схема на рис.3.9.а перечерчена на рис.3.9.б–г для каждого входного сигнала отдельно. Применяя формулы преобразования структурной схемы, легко можно написать следующие передаточные функции для этих схем:

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_4 W_1 W_2 W_3}; \quad \frac{C_2(s)}{R_2(s)} = \frac{W_2 W_3}{1 + W_4 W_1 W_2 W_3}; \quad \frac{C_3(s)}{R_3(s)} = \frac{-W_3}{1 + W_4 W_1 W_2 W_3}.$$

Знаменатели каждого из этих выражений должны быть одинаковы, так как, как будет показано ниже, после приравнивания нулю каждого знаменателя он становится характеристическим уравнением для данной системы, и последняя является независимой для любого входного сигнала. Когда все входные сигналы действуют одновременно, то выходная величина является суммой выходных сигналов и будет определяться выражением

$$C(s) = C_1(s) + C_2(s) + C_3(s) = \frac{W_1 W_2 W_3 R_1(s) + W_2 W_3 R_2(s) - W_3 R_3(s)}{1 + W_4 W_1 W_2 W_3}.$$

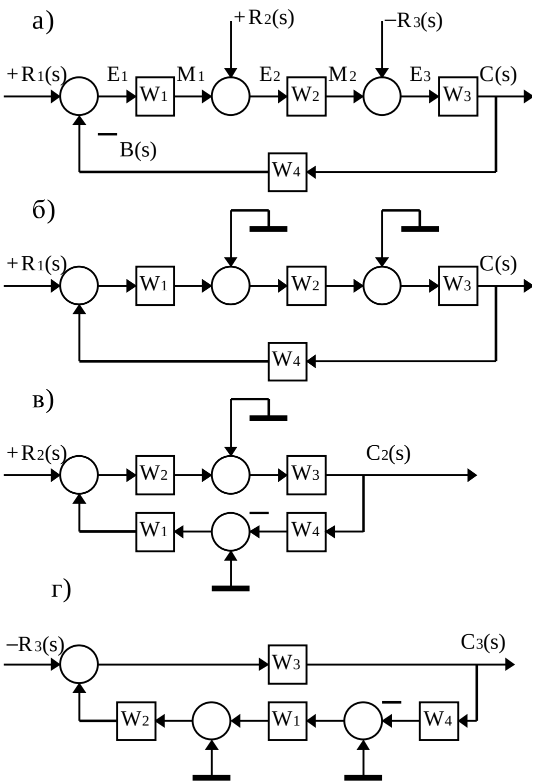


Рис. 3.9

Тот же результат может быть получен другим путем при рассмотрении рис.3.10. на котором изображена преобразованная предыдущая схема. Здесь суммирующие точки перемещены впереди блоков с передаточными функциями W_1, W_2, W_3 в соответствии с правилом переноса сумматоров. Эта схема позволяет сделать интересный вывод о том, что каждый вход может быть преобразован в эквивалентный вход при R_1. Для получения эквивалентного входного сигнала первоначальный сигнал был умножен на обратные значения коэффициентов прямой передачи, которые имеют место в прямой цепи передачи от R_1 до рассматриваемого входного звена. Этот вывод полезен для сравнения влияний сигналов помех, возникающих в разных точках системы. Если W_2 – постоянный коэффициент усиления и $R_2(s)$ и $R_3(s)$ – равные входные сигналы помех, то отсюда следует, что величина помех на выходе, обусловленных $R_3(s)$, в $1/W_2$ раз больше выходного сигнала, обусловленного $R_3(s)$.

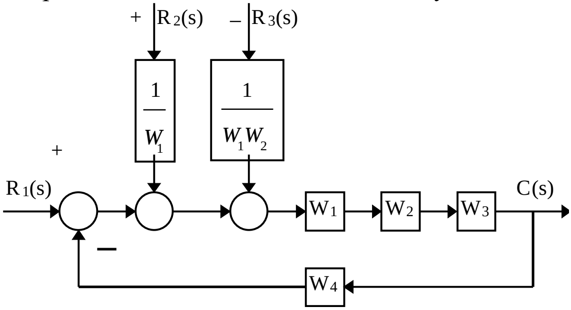


Рис. 3.10

§ 3.3 Передаточная функция многоконтурной системы.

Замкнутую систему называют многоконтурной, если при ее размыкании получается цепь, содержащая параллельные или обратные связи. Иначе говоря, замкнутую систему называют многоконтурной, если она помимо главной обратной связи содержит местные обратные или параллельные связи (рис.3.11 а,б.)

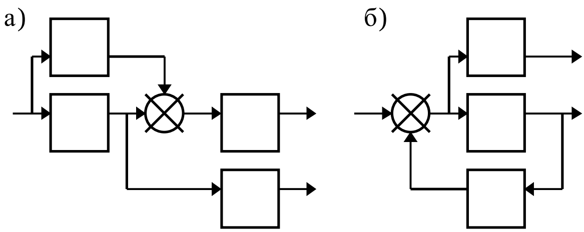


Рис. 3.11

Рассмотрим пример нахождения передаточной функции системы, приведенной на рис.3.12, по входам **g** и **f** и выходам **y** и **e**. Как видно из схемы, система является многоконтурной с перекрещивающимися связями.

Для вычисления передаточной функции многоконтурной системы необходимо прежде всего перестановкой и переносом узлов и сумматоров освободиться от перекрещивающихся связей. Затем, используя первые три правила преобразования структурных схем, преобразовать её в одноконтурную систему, передаточную функцию которой легко вычислить согласно сформулированному выше правилу.

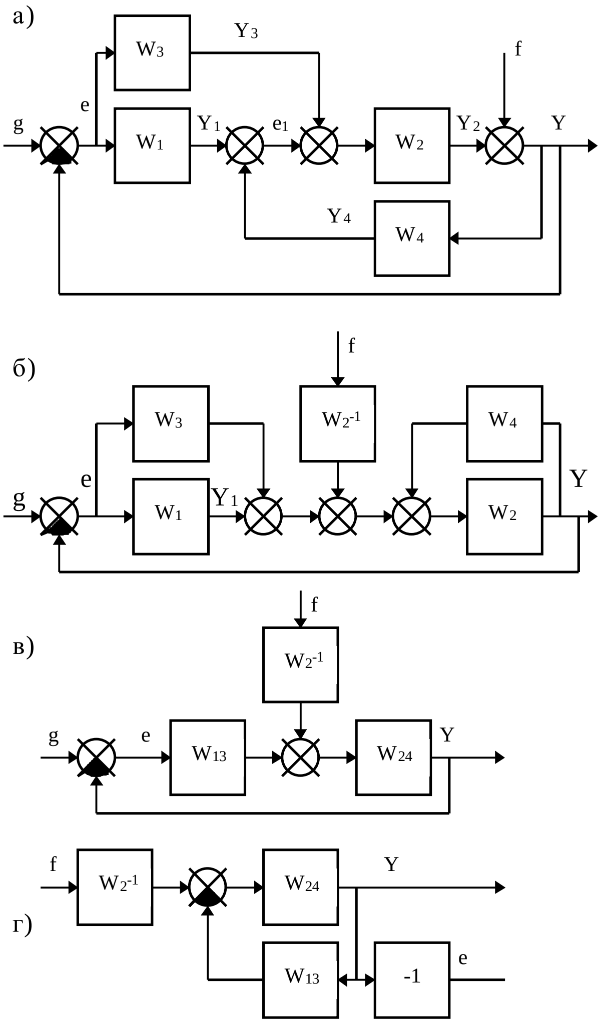


Рис. 3.12

Следует иметь в виду, что при преобразовании структурной схемы нельзя переносить сумматор через точку съёма выходного сигнала, так как при этом точка съёма оказывается на неэквивалентном участке линии связи. Перенеся и переставив сумматоры, ее можно привести к многоконтурной системе без перекрещивающихся связей (рис.3.12.а,б.). После замены параллельно соединенных звеньев и звена, охваченного обратной связью, эквивалентными звеньями с передаточными функциями

$$W_{13} = W_1 + W_3; \quad W_{24} = W_2/(1 - W_2 W_4),$$

получим одноконтурную схему (рис.3.12 в).

При вычислении передаточной функции по входному воздействию g полагаем f=0. По правилу вычисления передаточной функции одноконтурных систем, имеем

$$W_{yg} = W_{13} W_{24}/(1 + W_{13} W_{24}); \quad W_{eg} = 1/(1 + W_{13} W_{24}).$$

При вычислении передаточной функции по входному воздействию f полагаем g=0. При этом сравнивающее звено становится инвертирующим звеном с передаточной функцией, равной –1. Инвертирующее звено в замкнутый контур можно не вводить, если суммирующее звено преобразовать в сравнивающее. Поэтому, структурную схему можно представить так, как показано на рис.3.12 г. Из этой схемы легко получить

$$W_{y\,f} = y/f = W_2^{-1} W_{24}/(1 + W_{24}), \qquad W_{e\,f} = e/f = -W_2^{-1} W_{24}/(1 + W_{24} W_{13}).$$

§ 3.4 Дифференциальные уравнения.

Если известны передаточные функции системы, можно записать и ее дифференциальное уравнение. Мы уже показывали как это сделать несколько ранее, в данном случае проделаем все подробнее.

Если система имеет одну управляемую величину, то для ее полного описания достаточно иметь одно дифференциальное уравнение, выражающее зависимость между входной и выходной величиной. Такие автоматические системы называются *одномерными*. Получим дифференциальное уравнение одномерной системы с двумя входными величинами – задающим воздействием **g** и возмущающим воздействием **f**.

Обратимся к уже рассмотренному примеру на рис.3.12. Для этой системы можно записать

$$y = W_{yg}\, g + W_{yf}\, f\,. \qquad (3.3)$$

Это и есть дифференциальное уравнение в символической форме, связывающее выходную величину **y** с входными величинами. Подставив в это выражение конкретные значения передаточных функций, легко перейти от уравнения (3.3) к обычной форме записи.

Пусть для рассматриваемого примера $W_1=k_1$, $W_2=k_2/(p+1)$, $W_3=k_3/p$, $W_4=k_4$. Тогда после несложных арифметических преобразований будем иметь

$$W_{yg} = \frac{T_3 p + 1}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}\ ; \qquad W_{yf} = \frac{k\left(p^2 + p\right)}{T_1^2\left(p^2 + T_2 p + 1\right)}\ .$$

Здесь введены обозначения

$$k = 1/\left(k_2 k_3\right),\ T_1 = \sqrt{k},\ T_2 = \left(1 + k_1 k_2 - k_2 k_4\right)/\left(k_2 k_3\right),\ T_3 = k_1 / k_2\,.$$

Поэтому, на основании (2.68) можем записать

$$T_1^2 \ddot{y} + T_2 \dot{y} + y = T_3 \dot{g} + g + k\left(\ddot{f} + \dot{f}\right).$$

Таким образом, получено линейное дифференциальное уравнение второго порядка в стандартной форме.

§ 3.5 Построение частотных характеристик.

При проектировании автоматических систем и их исследовании на устойчивость используют амплитудно-фазовые (АФХЧ) и логарифмические (ЛЧХ) частотные характеристики разомкнутых систем. Передаточные функции W (s) разомкнутых одноконтурных, а иногда и многоконтурных систем, могут быть преобразованы к виду

$$W(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i(s), \qquad (3.4)$$

где $W_i(s)$ – передаточные функции элементарных звеньев. Модули и аргументы частотных передаточных функций системы и звеньев в соответствии с правилом модулей и аргументов комплексных чисел связаны между собой соотношениями

$$A(w) = \left|W(jw)\right| = \prod_{i=1}^{n} A_i(w),\ j(w) = \arg W(jw) = \sum_{i=1}^{n} j_i(w)\,. \qquad (3.5)$$

Вещественные и мнимые частотные функции системы определяются равенствами

$$U(w) = A(w)\cos j(w),\;\; V(w) = A(w)\sin j(w). \qquad (3.6)$$

Приведенные соотношения дают возможность построить амплитудную фазочастотную характеристику. При наличии ЭВМ это не составляет особого труда не только для отдельных звеньев, но и для всей системы.

На практике часто ограничиваются построением асимптотических логарифмических характеристик.

Из (3.5) очевидно

$$L(w) = \sum_{i=1}^{n} L_i(w), \qquad (3.7)$$

где L(ω) и L_i(ω) логарифмические амплитудные частотные функции равные, по определению, L(ω)=20 lg A(ω) и L_i=20 lg A_i (ω).

Из (3.5) и (3.6) следуют правила построения логарифмических характеристик систем. Строят ЛЧХ отдельных звеньев и затем их графически складывают.

Однако, можно использовать более простой порядок построения ЛАЧХ.

Воспользуемся примером.

Пусть имеем разомкнутую цепь с последовательно соединенными апериодическим, форсирующим, колебательными звеньями и несколькими интегрирующими и дифференцирующими звеньями. В этом случае передаточная функция системы будет выражаться формулой

$$W(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^n (T_1 s + 1)(T_3^2 s^2 + 2x T_3 s + 1)},$$

где n равно разности между числами интегрирующих и дифференцирующих звеньев.

Возьмем для конкретности числовые значения общего коэффициента усиления системы K=100 и постоянные времени T_1=10, T_2=1, T_3=0.1, (2ξ=1 – колебательное звено).

Амплитудно-частотная функция такой системы имеет вид:

$$A(w) = |W(jw)| = \frac{100\sqrt{1+w^2}}{w^n \sqrt{1+100w^2}\sqrt{(1-0.01w^2)^2 + (0.1w)^2}}.$$

Логарифмическая амплитудная частотная функция:

$$L(w)=20\lg 100+20\lg\sqrt{w^2+1}-n20\lg w-20\lg\sqrt{(10w)^2+1}-$$
$$-20\lg\sqrt{\left(1-0.01w^2\right)^2+(0.1w)^2}$$

Рассчитываем сопрягающие частоты: $\omega_{1=}1/10=0.1$, периодического, $\omega_2=1$ форсирующего, $\omega_3=1/0.1=10$ колебательного звеньев. Принято, что при построении асимптотической ЛАЧХ элементарных звеньев при частотах, меньших сопрягающей частоты, под корнем оставляют только единицу (остальными членами пренебрегают), при частотах, больших сопрягающей частоты,– член с наивысшей степенью ω.

Поэтому в нашем примере при $w \le w_1$

$$L(\omega)\approx 40-n20\lg w\,.$$

Это уравнение первой асимптоты. Согласно этому уравнению, первую асимптоту проводят через точку с координатами ω=1 и L=20 lg k с наклоном $-n20$ дБ/дек.

Она кончается на первой сопрягающей частоте.

При $w_1 \le w < w_2$ аналогично имеем

$$L(w)\approx 40-n\lg w-20\lg 10w=20-n20\lg w-20\lg w\,.$$

Это уравнение второй асимптоты. Ее наклон изменяется на –20 дБ/дек. и обусловливается апериодическим звеном. Вторую асимптоту проводят от конца первой асимптоты до второй сопрягающей частоты согласно ее уравнению с наклоном $(-n20-20)$ дБ/ дек.

При $w_2 \le w < w_3$

$$L(w)\approx 20-n\lg w-20\lg w+20\lg w=20-n20\lg w\,.$$

Это уравнение третьей асимптоты. Ее наклон изменяется на 20 дБ/дек и обусловливается форсирующим звеном. Третью асимптоту проводят от конца второй асимптоты до третьей сопрягающей частоты с наклоном $-n20$ дБ/дек.

При $w \ge w_3$

$$L(w)=20-n20\lg w-40\lg 0.1w=60-n20\lg w-40\lg w$$

На основе этого примера сформулируем общие правила построения асимптотической ЛАЧХ системы с передаточной функцией вида (3.4).

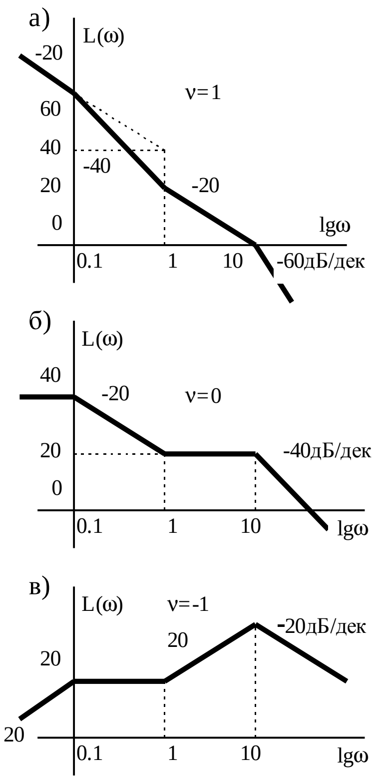


Рис. 3.13

1. Вычисляют сопрягающие частоты и значение 20 lg k. где k есть передаточный коэффициент системы, равный произведению передаточных коэффициентов звеньев.

2. Строят первую асимптоту, которую проводят до первой сопрягающей частоты через точку с координатами ω=1 и L=20 lg k с наклоном $-\nu*20$ дБ/дек. Здесь ν равно разности между числами интегрирующих и дифференцирующих звеньев.

3. Проводят вторую асимптоту от конца первой асимптоты до второй сопрягающей частоты. Её наклон изменяется на 20, –20, 40 или –40 дБ/дек в зависимости от того, является ли ω_1 сопрягающей частотой форсирующего, апериодического, форсирующего второго порядка или колебательного звена соответственно.

4. Строят каждую последующую асимптоту аналогично второй. Изменение наклона $(i+1)$-й асимптоты зависит от того, сопрягающей частотой какого элементарного звена является ω_i.

Если какая-либо сопрягающая частота является кратной и её кратность равна **l**, т.е. имеется **l** одинаковых элементарных звеньев, то изменение наклона при этой частоте в **l** раз больше, чем при соответствующей простой частоте.

Для колебательных звеньев с малым коэффициентом демпфирования $(x < 0.4)$ асимптотическая ЛАЧХ должна быть скорректирована в окрестности сопрягающей частоты по точным формулам.

§ 3.6 Графы. Формула Мейсона.

Математическую модель системы управления можно представить с помощью ориентированных графов. Графом называется совокупность множества **V** точек, называемых *вершинами*, и множества **R** простых самонепересекающихся кривых, называемых *ребрами*, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Каждое незамкнутое ребро содержит ровно две точки множества **V**, которые являются граничными точками ребра.
2. Каждое замкнутое ребро содержит только одну точку из **V**, т.е. граничные точки совпадают.
3. Ребра не имеют общих точек, за исключением точек из множества **V**.

Если множества **V** и **R** состоят из конечного числа элементов, то граф **G=(V,R)** называется конечным. Граф $\mathbf{G_1=(V_1,R_1)}$, который состоит из части вершин и части ребер графа **G** называется *подграфом*. При этом **G** называется *надграфом* $\mathbf{G_1}$.

Вершины графа на рисунках изображаются точкой или окружностью. Если ребра ориентированы, т.е. на каждом ребре задано направление, то граф называется *ориентированным графом*, или *орграфом*. Ориентированные ребра называются *дугами*. Поэтому орграф можно определить как совокупность множества **V** вершин и множества **D** дуг, удовлетворяющих перечисленным выше трем условиям.

Если вершины $\mathbf{V_k}$ и $\mathbf{V_l}$ являются граничными точками ребра **r** или дуги **d**, то говорят, что **r** или **d** *инцидентно* каждой из этих вершин, и обратно, каждая из вершин $\mathbf{V_k}$ и $\mathbf{V_l}$ инцидентна (принадлежит) **r** или **d**. Если ребро или дуга замкнуты, т.е. имеют только одну граничную точку, то их называют *петлей*.

Вершина, являющаяся начальной граничной точкой дуги $\mathbf{d_i}$, называется ее *начальной вершиной*, а вершина, являющаяся конечной граничной точкой этой дуги ее *конечной вершиной*.

Последовательность дуг, для которой конечная вершина $\mathbf{V_i}$ дуги $\mathbf{d_i}$ является начальной вершиной дуги $\mathbf{d_{i+1}}$, называется ориентированным маршрутом (ормаршрутом). Ориентированный маршрут называется *замкнутым*, если конечная вершина $\mathbf{V_n}$ дуги $\mathbf{d_n}$ совпадает с начальной вершиной $\mathbf{V_0}$ дуги $\mathbf{d_1}$. В противном случае ормаршрут называется *незамкнутым*. Ормаршрут, в котором нет повторяющихся дуг, называется *путем* от вершины $\mathbf{V_0}$ к вершине $\mathbf{V_n}$, если он незамкнут, и *контуром (ориентированным циклом)*, если он замкнут. Если все вершины $\mathbf{V_0}$, $\mathbf{V_1}$.....$\mathbf{V_n}$ различны, то путь или контур называется *простым*. Дуги $\mathbf{d_1}$ и $\mathbf{d_2}$ называются *параллельными*, если они имеют общие начальную и конечную вершины.

Граф системы управления представляет собой ориентированный граф, обладающий следующими свойствами:

1. Каждая дуга изображает звено и характеризуется оператором изображаемого ею звена. Поэтому можно говорить о передаточной функции, дифференциальном уравнении, частотных и временных характеристиках дуги.

2. Каждой вершине ставится в соответствие одна из переменных. Если к вершине подходит (входит в нее) только одна дуга, то соответствующая ей переменная равна выходной величине дуги (выходной величине изображаемого ею звена).

3. Если к вершине подходит несколько дуг, то соответствующая ей переменная равна сумме выходных величин этих дуг. Входная величина дуги равна переменной вершины, из которой эта дуга исходит. Если из вершины исходят несколько дуг, то входная величина всех этих дуг одна и та же.

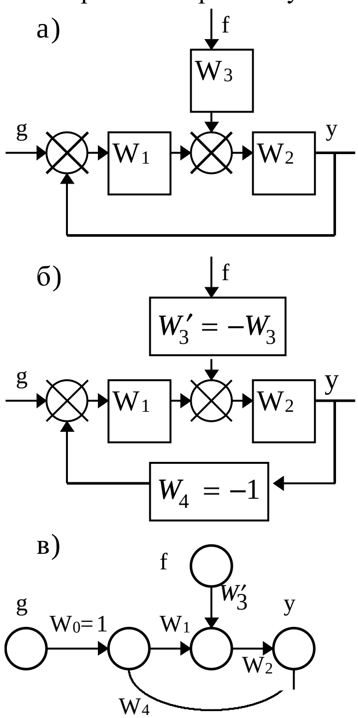


Рис. 3.14

Граф системы управления можно построить по ее структурной схеме, и наоборот, по графу системы управления легко построить структурную схему. Однако, при построении графа нужно исходную схему (рис.3.14.а) представить так, чтобы в сумматорах все переменные складывались с положительным знаком (рис.3.14.б). Затем, по последней схеме построить граф (рис.3.14.в), соблюдая следующие правила:

1) каждый сумматор заменяется вершиной, которой ставится в соответствие выходная переменная заменяемого сумматора;

2) каждое звено (прямоугольник на структурной схеме) заменяется дугой с оператором, равным опера-

тору заменяемого звена;

3) каждой переменной, в том числе переменной, обозначающей внешнее воздействие, соответствует своя вершина;

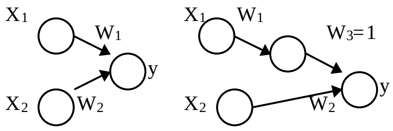


Рис. 3.15

4) Если нужно изобразить выход одной из дуг (например, дуги с передаточной функцией W_1 на рис.3.15.а), входящих в общую вершину, то следует ввести дополнительную, конечную для этой дуги вершину и соединить эту вершину с исходной вершиной дугой с единичным оператором (рис.3.15.б).

Нетрудно показать, что параллельные дуги можно заменить одной дугой с передаточной функцией, равной сумме передаточных функций исходных дуг (рис.3.16.а,б).

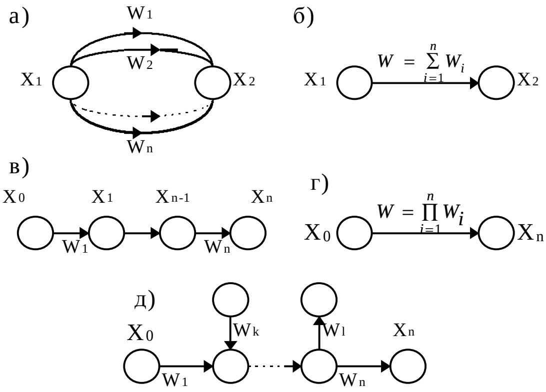


Рис. 3.16

Простой путь, если нет не принадлежащих ему дуг, инцидентных его промежуточным вершинам, можно заменить дугой с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций дуг этого пути. Например, простой путь на рис.3.16.в,г можно заменить дугой $W = \prod_{i=1}^{n} W_i$.

Простой путь на рис.3.16.д заменить дугой нельзя, так как имеются не принадлежащие этому пути дуги W_k и W_l, инцидентные его промежуточным вершинам.

Формула Мейсона.

Для вычисления передаточной функции системы управления по ее графу проще всего воспользоваться формулой Мейсона.

$$W_{xg} = \sum_{i=1}^{m} \left(W_i \Delta_i\right) / \Delta .$$

Здесь W_i – передаточная функция i- го простого пути от вершины **g** к вершине **x**, равная произведению передаточных функций дуг, входящих в этот путь; m – общее число таких путей; Δ –определитель графа:

$$\Delta = 1 - \sum W_{0j} + \sum_{j,k} W_{0j} W_{0k} - \sum_{j,k,l} W_{0j} W_{0k} W_{0l} + ...,$$

где в первой сумме $W_{0\,j}$ – передаточная функция j-го простого контура, равная произведению передаточных функций входящих в этот контур дуг и суммирование производится по всем простым контурам; во второй сумме $W_{0j}W_{0\,r}$ – произведение передаточных функций j-го и k-го контуров и суммирование производится по всем несоприкасающимся парам контуров. В третьей сумме $W_{0\,j}W_{0k}W_{0l}$ – произведение передаточных функций j-го, k-го и l-го контуров и суммирование производится по всем несоприкасающимся тройкам контуров и т. д.

Δ_i – определитель подграфа, получающегося из исходного графа при удалении дуг и вершин i-го простого пути, а также всех дуг, инцидентных этим вершинам. Два контура называются *несоприкасающимися*, если они не имеют общих дуг и (или) общих вершин. Тройка (четверка и т.д.) контуров называется *несоприкасающейся*, если любая пара контуров из этой тройки (четверки и т.д.) является несоприкасающейся.

Подграф, получающийся при удалении дуг и вершин какого-либо простого пути, а также всех дуг, инцидентных удаляемым вершинам, называется подграфом, соответствующим этому простому пути.

Граф на рис.3.17.а имеет два простых пути от вершины **g** к вершине **x** (пунктирные линии). Передаточные функции этих путей $W_1=W_{11}W_{12}W_{13}$; $W_2=W_{21}W_{22}$. Он содержит пять простых контуров (замкнутые пунктирные линии) с передаточными функциями:

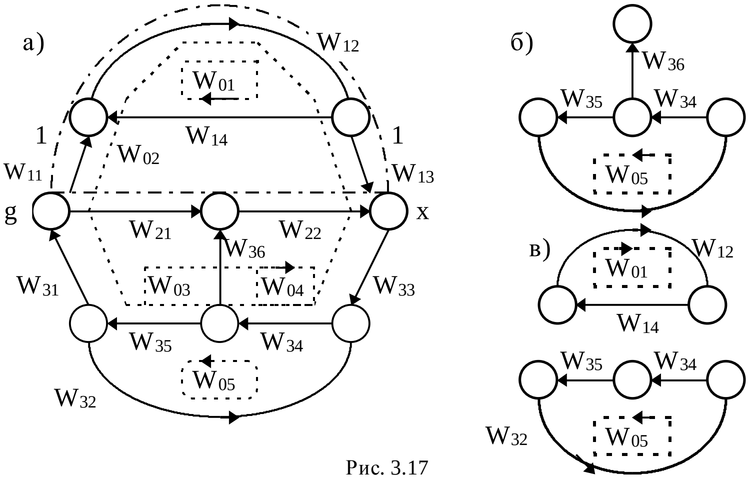


Рис. 3.17

$$W_{01}=W_{12}W_{14};\quad W_{02}=W_{11}W_{12}W_{13}W_{33}W_{34}W_{35}W_{31};$$
$$W_{03}=W_{21}W_{22}W_{33}W_{34}\,W_{35}W_{31};$$
$$W_{04}=W_{22}W_{33}W_{34}W_{36};\quad W_{05}=W_{35}W_{34}W_{32}\,,$$

и три несоприкасающиеся пары контуров с передаточными функциями

$$W_{01}\text{ и }W_{03},\;\; W_{01}\text{ и }W_{04},\;\; W_{01}\text{ и }W_{05}\,.$$

Этот граф не содержит несоприкасающихся троек и большего числа контуров, поэтому определитель

$$\Delta = 1–(W_{01}+W_{02}+W_{03}+W_{04}+W_{05})+(W_{01}W_{03}+W_{01}W_{04}+W_{01}W_{05})$$

Подграф, соответствующий первому простому пути (рис.3.17.б), имеет один контур, а подграф, соответствующий второму простому пути (рис3.17.в),– два контура. Определители этих подграфов $\Delta_1=1–W_{05}$; $\Delta_2=1–(W_{01}+W_{05})+W_{01}W_{05}$.

Согласно формуле Мейсона, передаточная функция

$$W_{xg} = \left(W_{11}W_{12}W_{13}\Delta_1 + W_{21}W_{22}\Delta_2\right)/\Delta\,.$$

Рассмотрим еще один пример нахождения передаточной функции с помощью формулы Мейсона. Для этого воспользуемся ранее использованной схемой (рис.3.12.а). Схема многоконтурная с перекрещивающимися связями. Граф этой системы управления легко построить, и он представлен на рис.3.18**.** Вычислим передаточные функции системы управления. Найдем передаточные функции W_{yg}, W_{yf} и W_{eg}. От вершины **g** к вершине **y** имеются два простых пути с передаточными функциями

$$W_1' = W_0 W_1 W_2 = W_1 W_2; \quad W_2' = W_0 W_3 W_2 = W_2 W_3.$$

Имеется три контура с передаточными функциями

$$W_{01} = W_1 W_2 W_5 = -W_1 W_2; \;\; W_{02} = W_2 W_4; \;\; W_{03} = W_3 W_2 W_5 = -W_2 W_3.$$

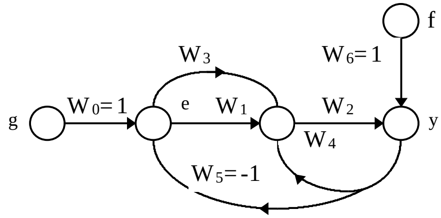


Рис. 3.18

Несоприкасающихся пар и большего числа контуров граф не содержит. Поэтому его определитель

$$\Delta = 1 - \left(W_{01} + W_{02} + W_{03}\right) = 1 + W_1 W_2 - W_2 W_4 + W_2 W_3.$$

Подграфы, соответствующие простым путям от вершины g к вершине y, замкнутых контуров не содержат, и их определители Δ_1=1, Δ_2=1.

По форуле Мейсона,

$$W_{yg} = \left(W_1' + W_2'\right)/\Delta = \left(W_1 W_2 + W_2 W_3\right)/\left(1 + W_1 W_2 - W_2 W_4 + W_2 W_3\right).$$

От вершины f к вершине y ведет один простой путь – дуга W_6. Соответствующий этому пути подграф не имеет замкнутых контуров, и его определитель Δ_1=1. Следовательно,

$$W_{yf} = W_6/\Delta = 1/\left(1 + W_1 W_2 - W_2 W_4 + W_2 W_3\right).$$

От вершины g к вершине e ведет также один простой путь - дуга W_0. Соответствующий этому пути подграф имеет один контур с передаточной функцией $W_{01}=W_2W_4$, и его определитель $\Delta_1=1-W_{01}=1-W_2W_4$.

Передаточная функция

$$W_{eg} = W_0 \Delta_1/\Delta = \left(1 - W_2 W_4\right)/\left(1 + W_1 W_2 - W_2 W_4 + W_2 W_3\right).$$

Полученные передаточные функции полностью соответствуют полученным ранее по структурной схеме.

Глава 4. Многомерные стационарные линейные системы.

Такими системами или *системами многосвязного управления* называют автоматические системы управления, в которых имеется несколько управляемых величин. Объекты, имеющие несколько управляемых величин, называют *многомерными объектами*. Примером многомерного объекта может быть самолет, у которого управляемыми величинами являются курс, углы тангажа и крена, высота полета.

Управляемые величины называют выходами или выходными величинами, поэтому многомерные системы еще определяют как автоматические системы с многомерным (векторным) выходом.

Многомерные системы и объекты называют *линейными и стационарными*. если они описываются системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

§ 4.1 Уравнения многомерных линейных стационарных систем.

Пусть $y_1 .... y_r$ обозначают выходные величины.

$u_1 .... u_m$ – параметры управления или задающие воздействия.

$f_1 .... f_l$ – возмущающие воздействия.

Тогда уравнения многомерных стационарных линейных систем и объектов в общем случае можно записать в виде следующей системы:

$$a_{11}(p)y_1+\ldots+a_{1r}(p)y_r = b_{11}(p)u_1+\ldots b_{1m}(p)u_m + c_{11}(p)f_1+\ldots c_{1l}(p)f_l,$$

$$a_{r1}(p)y_1+\ldots+a_{rr}(p)y_r = b_{r1}(p)u_1+\ldots b_{rm}(p)u_m + c_{r1}(p)f_1.+\ldots c_{rl}(p)f_l$$

или в более компактной форме

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(p)y_j = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(p)u_j + \sum_{j=1}^{l} c_{ij}(p)f_j, \quad \mathrm{i} = 1\ldots\ldots r. \tag{4.1}$$

Здесь $a_{ij}(p)$, $b_{ij}(p)$, $c_{ij}(p)$ обозначают стационарные линейные операторы, т.е. полиномы от оператора дифференцирования с постоянными коэффициентами.

Переходя в обеих частях (3.1) к изображениям по Лапласу, при нулевых начальных условиях получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij}(s)Y_j(s) = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(s)U_j(s) + \sum_{j=1}^{l} c_{ij}(s)F_j(s), \quad \mathrm{i} = 1\ldots r., \tag{4.2}$$

где $Y_j(s) = L\{y_j(t)\}$, $U_j(s) = L\{u_j(t)\}$, $F_j(s) = L\{f_j(t)\}$.

Для многомерных систем удобна матричная форма записи уравнений

Введем в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ y_r \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}(\mathrm{p})=\begin{bmatrix} a_{11}(p) & . & a_{1r}(p) \\ . & . & . \\ a_{r1}(p) & . & a_{rr}(p) \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ u_m \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}(\mathrm{p})=\begin{vmatrix} b_{11}(p) & . & b_{1m}(p) \\ . & . & . \\ b_{r1}(p) & . & b_{rm}(p) \end{vmatrix}; \qquad \mathbf{f}=\begin{bmatrix} f_1 \\ . \\ f_l \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C}(\mathrm{p})=\begin{bmatrix} c_{11}(p) & . & c_{1l}(p) \\ . & . & . \\ c_{r1}(p) & . & c_{rl}(p) \end{bmatrix}$$

С их помощью (4.1) в матричной форме будет

$$\mathbf{A}(\mathrm{p})\,\mathbf{y} = \mathbf{B}(\mathrm{p})\,\mathbf{u} + \mathbf{C}(\mathrm{p})\,\mathbf{f} \tag{4.3}$$

Точно так же можно записать (4.2) в изображениях Лапласа в матричной форме:

$$\mathbf{A}(\mathrm{s})\mathbf{Y}(\mathrm{s})=\mathbf{B}(\mathrm{s})\mathbf{U}(\mathrm{s})+\mathbf{C}(\mathrm{s})\mathbf{F}(\mathrm{s}) \tag{4.4}$$

Здесь

$$\mathbf{A}(\mathrm{s})=\begin{bmatrix} a_{11}(s) & . & a_{1r}(s) \\ . & . & . \\ a_{r1}(s) & . & a_{rr}(s) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y}(\mathrm{s})=\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ . \\ Y_r(s) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}(\mathrm{s})=\begin{bmatrix} b_{11}(s) & . & b_{1m}(s) \\ . & . & . \\ b_{r1}(s) & . & b_{rm}(s) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{U}(\mathrm{s})=\begin{bmatrix} U_1(s) \\ . \\ U_m(s) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}(\mathrm{s})=\begin{bmatrix} c_{11}(s) & . & c_{1l}(s) \\ . & . & . \\ c_{r1}(s) & . & c_{rl} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{F}\,(\mathrm{s})=\begin{pmatrix} F_1(s) \\ . \\ F_l(s) \end{pmatrix}.$$

После умножения и сложения матриц в левой и правой частях (4.3) получаются матрицы-столбцы. Приравнивая их соответствующие элементы, получим систему уравнений (4.1). Аналогично, проделав операции над матрицами и приравняв соответствующие элементы матриц левой и правой частей матричного уравнения (4.4) получим систему (4.2).

Напомним, что две матрицы могут быть перемножены лишь тогда, когда число столбцов первой из них равняется числу строк второй. Матрицы, удовлетворяющие этому условию, называются соответственными матрицами. Две матрицы равны тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же порядок и все их соответствующие элементы равны. При сложении или вычитании матриц они должны быть одного порядка. Суммой (разностью) матриц (а) и (в) называется такая матрица (с), элементы которой определяются как сумма (разность) соответствующих элементов исходных матриц.

Рассмотрим пример. Пусть исходная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$(a_0p + a_1)\, y_1 + a_2\, y_2 = b_0\, pu_1 + b_1\, u_2$$
$$a_3\, y_1 + (a_4p + a_5)\, y_2 = b_2\, u_2$$

В матричной форме эта система запишется в виде

$$\mathbf{A}(p)\, \mathbf{y} = \mathbf{B}(p)\, \mathbf{u}$$

где $\mathbf{A}(p)=\begin{bmatrix} a_0p+a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4p+qa_5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}(p)=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$;

Передаточная матрица.

Как и в случае одномерных систем, для описания многомерных систем и объектов можно использовать передаточные функции. Передаточной функцией в изображениях Лапласа W_{ij}^{u}**(s)** по j-му параметру управления и i-му выходу называют отношение изображения Лапласа выходной величины y_i к изображению входной величины u_j при нулевых начальных условиях. Таким образом, по определению

$$W_{ij}^{u}(s) = Y_i(s) / U_j(s) \tag{4.5}$$

Для вычисления этой передаточной функции поступают следующим образом. В системе (4.2) приравнивают нулю изображения всех возмущающих воздействий и параметров управления, кроме $U_j(s)$. Из полученной системы алгебраических уравнений находят решение $Y_i(s)$, а затем, разделив его на $U_i(s)$, получают искомую передаточную функцию.

Аналогично определяют передаточную функцию $W_{ij}^{f}(s)$ по j-му возмущающему воздействию и i-му выходу.

$$W_{ij}^{f} = Y_i(s) / F_j(s) \tag{4.6}$$

Для полного описания многомерных систем необходимо иметь ρm передаточных функций по управлению и ρ.l передаточных функций по возмущению. Их записывают в виде матриц

$$W^{u}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}^{u}(s)\mathbf{L}\,W_{1m}^{u}(s) \\ \mathbf{L} \\ W_{pl}^{u}(s)\mathbf{L}\,W_{pm}^{u}(s) \end{bmatrix}; \quad W^{f}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}^{f}(s)\mathbf{L}\,W_{1l}^{f}(s) \\ \mathbf{L} \\ W_{pl}^{f}(s)\mathbf{L}\,W_{pl}^{f}(s) \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы называют *матрицами передаточных функций* или *передаточными матрицами*. Передаточные матрицы дают полное описание многомерных систем (объектов) при нулевых начальных условиях. С их помощью уравнения многомерной системы в изображениях Лапласа можно записать в следующем виде

$$Y(s) = W^{u}(s)U(s) + W^{f}(s)F(s) \tag{4.7}$$

Действительно, согласно определению, когда изображения всех возмущающих воздействий и параметров управления, кроме $U_j(s)$, равны нулю, имеем

$$Y_i(s) = W_{ij}^{u}(s)U_j(s), \quad i = 1,\mathbf{K},r;\; j = 1,\mathbf{K},m$$

Аналогично

$$Y_i(s) = W_{ij}^{f}(s)F_j(s), \quad i = 1,\mathbf{K},r;\; j = 1,\mathbf{K},l$$

В общем случае, когда все параметры управления и возмущающие воздействия отличны от нуля, используя принцип суперпозиции, можно записать

$$Y_i(s)=\sum_{j=1}^{m}W_{ij}^{u}(s)U_i(s)+\sum_{j=1}^{l}W_{ij}^{f}(s)F_j(s),\quad i=1,\mathbf{K},r \qquad (4.8)$$

Имеется два способа вычисления передаточных матриц. Первый из них основан на использовании определений (4.5) и (4.6). Его еще называют методом определителей.

Сущность применения определителей заключается в следующем. Составляется определитель системы из коэффициентов при выходных величинах Y_j

$$\Delta(s)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2r} \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r1} & . & a_{rr} \end{bmatrix};$$

и определитель, у которого столбец, соответствующий величине, например, Y_2 заменен столбцом, составленным из коэффициентов при задающих воздействиях, например

$$\Delta_{u1}=\begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & . & a_{1r} \\ a_{21} & b_{21} & . & a_{2r} \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & b_{r1} & . & a_{rr} \end{bmatrix}$$

Тогда можно записать соответствующую передаточную функцию в виде

$$W_{2/1}=Y_2/U_1=\frac{\Delta_{u1}(s)}{\Delta(s)}. \qquad (4.9)$$

Очевидно, что при другой координате или другом регулирующем воздействии вид передаточной функции меняется только за счет числителя.

В случае большого числа уравнений получать выражения для передаточных функций удобнее матричным способом. Это второй способ и он основан на свойстве обратной матрицы $(a)(a)^{-1}=$ $=\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Используется матричное уравнение (4.4) в изображениях Лапласа. Если его умножить слева и справа на обратную матрицу $A^{-1}(s)$, то получим

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{A}^{-1}(s)\,\mathbf{B}(s)\,\mathbf{U}(s) + \mathbf{A}^{-1}(s)\,\mathbf{C}(s)\,\mathbf{F}(s).$$

Приравнивая правую часть полученного уравнения к правой части равносильного ему уравнения (4.8), получим

$$\mathbf{W}^{u}(s) = \mathbf{A}^{-1}(s)\,\mathbf{B}(s), \qquad \mathbf{W}^{\mathbf{f}}(s) = \mathbf{A}^{-1}(s)\,\mathbf{C}(s). \qquad (4.10).$$

Напомним, что обратная матрица

$$\mathbf{A}^{-1}(s) = \frac{1}{|A(s)|}\begin{vmatrix} A_{11} & . & A_{1r} \\ . & . & . \\ A_{r1} & . & A_{rr} \end{vmatrix}^{\mathrm{T}},$$

где $A_{ij}(s)$–алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}(s)$, т.е. определитель квадратной матрицы, получаемый из (а) вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Знак Т обозначает операцию транспонирования, когда строки матрицы заменяются столбцами, а столбцы – строками.

Для примера рассмотрим объект, который описывается уравнениями

$$\ddot{y}_1 + \dot{y}_1 + y_2 = u_1 + f_1 \qquad \dot{y}_1 + y_1 + \dot{y}_2 = u_2 + f_2$$

Перейдем к изображениям Лапласа при нулевых начальных условиях

$$(s^2 + s)Y_1(s) + Y_2(s) = U_1(s) + F_1(s)$$
$$(s+1)Y_1(s) + sY_2(s) = U_2(s) + F_2(s)$$

В матричной форме эта система записывается так :

$$\mathbf{A}(s)\,\mathbf{Y}(s) = \mathbf{B}(s)\,\mathbf{U}(s) + \mathbf{C}(s)\,\mathbf{F}(s)\ ,$$

где

$$\mathbf{A}(s)=\begin{bmatrix} s^2+s & 1 \\ s+1 & s \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B}(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C}(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}(s)$. Прежде всего запишем определитель

$$|A(s)| = (s+1)(s^2-1)$$

и найдем алгебраические дополнения элементов

$$A_{11}=s, \quad A_{12} = -(s+1), \quad A_{21} = -1, \quad A_{22} = s^2 + s.$$

Тогда

$$\mathbf{A}^{-1}(s)=\frac{1}{(s+1)(s^2-1)}\begin{bmatrix} s & -(s+1) \\ -1 & s^2+s \end{bmatrix}^T = \frac{1}{(s+1)(s^2-1)}\begin{bmatrix} s & -1 \\ -(s+1) & s^2+s \end{bmatrix}.$$

Так как **B**(s) и **C**(s) являются единичными матрицами, то

$$\mathbf{W}^u(s)= \mathbf{W}^f(s)=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{s}).$$

§ 4.2. Весовые или импульсные переходные матрицы.

Пусть управляющий параметр $u_j = d(t)$, а остальные управляющие и возмущающие воздействия равны нулю. При этом решение уравнений (4.1) многомерной системы при нулевых начальных условиях обозначим $w^u_{1j}(t)$, $w^u_{2j}(t), \ldots\ldots w^u_{rj}(t)$. Эти функции называют весовыми или импульсными переходными функциями. Функция $w^u_{ij}(t)$ описывает реакцию системы на i-том выходе при действии в точке приложения j-го параметра управления единичного импульса. Матрицу, составленную из весовых функций по управлению, называют импульсной переходной или весовой матрицей по управлению. Аналогично определяют импульсную переходную или весовую матрицу по возмущению

$$\mathbf{w}^u(t)=\begin{bmatrix} w^u_{11}(t) & . & w^u_{1m}(t) \\ . & . & . \\ w^u_{r1}(t) & . & w^u_{rm}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}^f(t)=\begin{bmatrix} w^f_{11}(t) & . & w^f_{1l}(t) \\ . & . & . \\ w^f_{r1}(t) & . & w^f_{rl}(t) \end{bmatrix}$$

В последнем случае элементы матрицы есть решение многомерной системы (4.1), когда $f_j = d(t)$, а все остальные возмущающие воздействия и параметры управления равны нулю.

Весовые матрицы, как и передаточные матрицы. дают полное описание многомерной системы. поскольку между ними существует тесная связь. Действительно, согласно определению (4.5) передаточной функции $W_{ij}^{u}(s)$

$$Y_i(s) = W_{ij}^{u}(s)U_j(s), \qquad i = 1,\ldots\ldots r. \tag{4.11}$$

Так как $U_j(s) = L\{d(t)\} = 1$ и $y_i(t) = w_{ij}^{u}(t)$ при $u_j = d(t)$ и остальных входных воздействиях, равных нулю, то из (4.11)

$$W_{ij}^{u}(s) = L\left\{w_{ij}^{u}(t)\right\} = \int_0^{\infty} w_{ij}^{u}(t)\mathbf{l}^{-st}dt\ , \quad i= 1\ldots r\ , \ j= 1\ldots m. \tag{4.12}$$

Аналогично можно показать, что

$$W_{ij}^{f}(s) = L\{w_{ij}^{f}(t)\} = \int_0^{\infty} w_{ij}^{f}(t)\mathbf{l}^{-st}dt, \qquad i=1\ldots.r, \quad j=1\ldots.. \ . \tag{4.13}$$

Таким образом, передаточные функции т.е. элементы передаточных матриц, равны изображению по Лапласу от весовых функций, т.е. элементов весовых матриц.

В матричной форме (4.12) и (4.13) принимают вид

$$\mathbf{W}^{\mathbf{u}}(s) = \mathbf{L}\left\{\mathbf{W}^{\mathbf{u}}(t)\right\} = \int_0^{\infty} \mathbf{W}^{\mathbf{u}}(t)\mathbf{l}^{-st}dt$$

$$\mathbf{W}^{\mathbf{f}}(s) = \mathbf{L}\left\{\mathbf{W}^{\mathbf{f}}(t)\right\} = \int_0^{\infty} \mathbf{W}^{\mathbf{f}}(t)\mathbf{l}^{-st}dt$$

Как известно, интеграл от матрицы равен матрице интегралов от ее элементов.

Запишем формулу для определения выходных величин по весовым матрицам при произвольных входных воздействиях. Учитывая, что оригиналами от передаточных функций являются весовые функции, и используя теорему о свертке, из (4.9) получим

$$\mathbf{Y_i}(s) = \sum_{u=1}^{m} \mathbf{W}_{\mathbf{iy}}^{uv}(s)\mathbf{U}_{\mathbf{y}}(s) + \sum_{y=1}^{l} \mathbf{W}_{\mathbf{iy}}^{f}(s)\mathbf{F_i}(s),$$

переходя к оригиналам, получим

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{m}\int_0^{\infty} w_{ij}^{u}(t-t)u_j(t)dt + .\sum_{y=1}^{l}\int_0^{\infty} w_{iy}^{f}(t-t)f_y(t)dt \qquad i=1\ldots\ldots r\,.$$

Эта система в матричной форме записывается как

$$\mathbf{y(t)} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{w^u}(t-t)\mathbf{u}(t)dt + \int\limits_{0}^{\infty} \mathbf{w^f}(t-t)\mathbf{f}(t)dt \quad .$$

Таким образом, связь между входными и выходными величинами с помощью весовых матриц записывается так же, как и в одномерном случае.

§ 4.3. Дифференциальные уравнения в нормальной форме Коши.

Иногда удобно, если уравнения одномерных и многомерных систем записаны в виде нормальной системы. Под нормальной системой в форме Коши понимают систему дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных.
В частности, нормальной системой будет, например, такая

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{l} c_{ij} f_j \ , \qquad i = 1,......n. \qquad (4.14)$$

В матричной форме она запишется так

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Cf} \,. \qquad (4.15)$$

где

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ . \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & . & a_{1n} \\ ..... & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ u_m \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & . & b_{1m} \\ .\ . & . & . \\ b_{n1} & . & b_{nm} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ . \\ f_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & .. & c_{1l} \\ . & .. & . \\ c_{n1} & .. & c_{nl} \end{bmatrix},$$

Матрицы-столбцы называются векторами. Вектор **x** называется *фазовым вектором* или *вектором состояния,* а его координаты $x_1...x_n$ – *фазовыми координатами,*. вектор **u** называется *вектором управления,* а его координаты $\mathbf{u_1...u_m}$ параметрами управления.

Вектор **f** называют *вектором возмущения*, а его j-ая координата- j-тым возмущением.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \qquad (4.16)$$

Пусть

$x^{(1)} = (x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)})^T; \; x^{(2)} = (x_1^{(2)}, \ldots x_n^{(2)})^T; \; x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots x_n^{(n)})^T$

образуют **n** линейно независимых решений этого уравнения. (Значок Т означает операцию транспонирования матрицы). Любую такую систему называют *фундаментальной системой решений* уравнения (4.16).

Составим матрицу, записывая в i-том столбце i-е решение из фундаментальной системы:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & . & x_1^{(n)}(t) \\ . & .. & . \\ x_n^{(1)} & .. & x_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Эту матрицу называют *фундаментальной матрицей* уравнений (4.14) – (4.16).

Если при некотором $t=t_0$ фундаментальная матрица обращается в единичную матрицу. $\mathbf{\Phi}(t_0)= \mathbf{E}$. то она и соответствующая фундаментальная система решений называются *нормированными*.

Если $\mathbf{\Phi}(t)$–нормированная фундаментальная матрица, то решение неоднородного уравнения (4.15) с начальным условием $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0$ записывают в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\left\{\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\left[\mathbf{Bu}(t) + \mathbf{Cf}(t)\right]dt \right\}. \qquad (4.17)$$

Обозначим $\mathbf{X}(t, t_0)$ фундаментальную матрицу, обладающую тем свойством, что она обращается в единичную матрицу при всех $t_0 = t$

$$\mathbf{X}(t,t) = \mathbf{X}(t_0, t_0) = \mathbf{E}.$$

Другими словами, матрица $\mathbf{X}(t, t_0)$ является нормированной, при любом t_0, фундаментальной матрицей. Поэтому назовем ее *всюду нормированной фундаментальной матрицей*.

Если известна какая-либо фундаментальная матрица $\mathbf{\Phi}$(t), то всюду нормированная фундаментальная матрица определяется равенством

$$\mathbf{X}(t, t_0) = \mathbf{\Phi}(t)\, \mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\,. \tag{4.18}$$

Для стационарных систем матрица $\mathbf{X}(t, t_0)$ зависит только от разности $t - t_0$.т.е. $\mathbf{X}(t, t_0)=\mathbf{X}(t- t_0)$, и имеет вид

$$\mathbf{X}(t - t_0) = \mathbf{l}^{\mathbf{K}(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})}\,.$$

Матричная функция $\mathbf{l}^{\mathbf{A}(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})}$ называется *экспоненциальной матричной* или *матричным экспоненциалом* и определяется суммой ряда

$$\mathbf{l}^{\mathbf{A}(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})} = \mathbf{E} + \mathbf{A}(t-t_0) + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^2(t-t_0)^2 + \ldots + \tfrac{1}{n!}\mathbf{A}^n(t-t_0)^n + \ldots \tag{4.19}$$

С помощью всюду нормированной фундаментальной матрицы решение неоднородного уравнения (4.15) при всех **t** и с начальным условием $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0$ записывают в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t - t_0)\, x^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}(t-t)\left[\mathbf{Bu}(t) + \mathbf{Cf}(t)\right]dt\,. \tag{4.20}$$

Эту формулу называют формулой Коши. В справедливости этой формулы можно убедиться непосредственной подстановкой в уравнение (4.15), воспользовавшись при этом матричным уравнением

$$\dot{\mathbf{X}}(t,t_0) = \mathbf{AX}(t,t_0); \quad \mathbf{X}(t_0,t_0) = \mathbf{E},$$

которое справедливо во всех **t**. Это уравнение следует из того, что каждый столбец фундаментальной матрицы является решением (4.16).

Глава 5. Нестационарные линейные системы.

Нестационарными линейными системами или *линейными системами с переменными параметрами* называют системы, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Для их описания, как и в случае стационарных систем, помимо дифференциальных уравнений могут быть использованы передаточные функции, переходные и весовые функции, частотные функции и их характеристики. Для графического представления нестационарных систем могут также быть использованы структурные схемы и графы. Однако методы, основанные на графических представлениях, в данном случае не так эффективны. Правила преобразования структурных схем и графов, установленные для стационарных систем, в случае нестационарных систем зачастую несправедливы.

Перейдем к рассмотрению некоторых способов описания одномерных нестационарных систем. Сразу же заметим, что они могут быть обобщены и на случай многомерных систем.

Так как для линейных систем как стационарных, так и для нестационарных, справедлив принцип суперпозиции, то для простоты изложения можно ограничиться рассмотрением систем с одним входом. Тогда уравнение одномерной нестационарной системы (объекта) с одним входом в общем случае можно записать в виде

$$a_0(t)\overset{(n)}{y}+a_1(t)\overset{(n-1)}{y}+\ldots a_n(t)y=b_0(t)\overset{(m)}{u}+b_1(t)\overset{(m-1)}{u}+\ldots+b_m(t)u \qquad (5.1)$$

или, в символической (олераторной) форме

$$Q(p,t)\,y = R(p,t)\,u, \qquad (5.2)$$

где нестационарные линейные дифференциальные операторы

$$Q(p,t) = a_0(t)p^n + a_1(t)p^{n-1} + \ldots + a_n(t),$$

$$R(p,t) = b_0(t)p^{(m)} + a_1(t)p^{m-1} + \ldots + b_m(t).$$

§ 5.1. Весовые функции.

Как известно, весовой функцией называют решение уравнения (5.1) при u(t)=$d(t-t)$ и нулевых начальных условиях, т.е. функцию, которая описывает реакцию системы на единичный импульс в момент его приложения, когда система находится в исходном состоянии. Здесь t обозначает момент приложения импульса, и в определении под начальными условиями понимают значения выходной величины и ее производных в момент t

При изучении стационарных систем в качестве начала отсчета времени принимают момент приложения входного сигнала и поэтому полагают $t = 0$. В данном случае этого делать нельзя. Действительно, реакция нестационарной системы зависит не только от времени $t - t$, отсчитываемого от момента приложения импульса, но и от самого значения t . Поэтому весовая функция нестационарной системы является функцией от двух переменных w(t–t , t) – от текущего времени t и момента t приложения импульса. Реакция – процесс на выходе системы – не может возникнуть до приложения входного сигнала: следствие не может предшествовать причине. Поэтому

$$w(t - t, t) \equiv 0 \qquad \text{при} \qquad t < t\ . \tag{5.3}$$

Это условие называется *условием физической осуществимости* или *условием физической реализуемости*. В случае стационарной системы это условие имеет вид $w(t) \equiv 0$ при t < 0,что совпадает с одним из условий, которым должны удовлетворять функции-оригиналы.

Получим зависимости, определяющие связь между выходной и входной величинами через весовую функцию. По определению $w(t - t, t)$ есть решение уравнения (5.1) при $u(t) = d(t - t)$. Поэтому можно записать

$$Q(p, t)w(t - t,\ t) = R(p, t)\, d(t - t)\ . \tag{5.4}$$

Умножим обе части этого равенства на $u(t)dt$ и проинтегрируем по t от –∞ до ∞.

Вынося коэффициенты уравнения за знак интеграла, поскольку они не зависят от t , получим

$$Q(p,t)\int_{-\infty}^{\infty} w(t - t, t)u(t)dt = R(p,t)\int_{-\infty}^{\infty} u(t)d(t - t)dt\ . \tag{5.5}$$

Из определения дельта-функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)d(t - t)dt = u(t),$$

поэтому (5.5) можно представить в виде

$$Q(p,t)\int_{-\infty}^{\infty} w(t - t, t)u(t)dt = R(p,t)u(t)\,.$$

Отсюда следует, что функция

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - t, t)u(t)dt\ . \tag{5.6}$$

является решением уравнения (5.1) при произвольном заданном воздействии u(t), если известна весовая функция. Нижний предел интегрирования $t = -\infty$ есть момент подачи входного воздействия. Поэтому формула (5.6) определяет связь между выходной и входной величинами нестационарной линейной системы в “установившемся“ режиме. Учитывая условие физической осуществимости (5.3), формулу (5.6) можно записать также в виде

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t - t, t)u(t)dt \quad . \tag{5.7}$$

Если принять, что входной сигнал прикладывается в момент t=0 (u(t)≡0 при t < 0), то с учетом физической осуществимости эту формулу можно записать в виде

$$y(t) = \int_{0}^{t} w(t - t, t)u(t)dt \quad .$$

Если зафиксировать переменную τ, то весовая функция w(t$-t, t$) будет функцией одной переменной t, зависящей от параметра τ, и называться *нормальной весовой функцией*. Нормальная весовая функция определяет изменение выходной величины системы с течением времени при подаче на ее вход единичного импульса в заданный момент τ .

Если зафиксировать переменную t и рассматривать ее как параметр, то весовая функция w(t-τ, τ) будет функцией одной переменной τ и называться *сопряженной весовой функцией*. Сопряженная весовая функция определяет зависимость реакции системы в фиксированный момент t от момента τ приложения единичного импульса.

§ 5.2. Передаточные функции.

Передаточная функция $\tilde{W}(p,t)$ нестационарной системы в операторной форме определяется так же, как и передаточная функция стационарной системы (в операторной форме) и равна отношению оператора R(p,t) воздействия к собственному оператору Q(p,t):

$$\tilde{W}(p,t) = R(p,t) / \; Q(p,t) \, .$$

Понятие передаточной функции $W(s,t)$ в изображениях Лапласа нуждается в уточнении. Для этого воспользуемся физическим свойством частотных передаточных функций. Для стационарной системы модуль частотной передаточной функции W(j.ω), как известно, равен отношению амплитуд гармонических колебаний на выходе и входе системы, а ее аргумент – сдвигу фазы. При этом частотная передаточная функция W(j.ω) стационарной системы связана с ее передаточной функцией W(s) соотношением

$$W(j\omega) = W(s), \quad \text{при } s = j\omega.$$

Аналогичная связь должна существовать между частотной передаточной функцией W(jω, t) нестационарной системы и ее передаточной функцией W(s, t). Поэтому, определив частотную передаточную функцию W(jω, t), автоматически получим определение передаточной функции W(s, t).

Следует ожидать, что при подаче на вход нестационарной линейной системы гармонического сигнала на ее выходе установится “гармонический” сигнал той же частоты, но с переменной амплитудой. Частотную передаточную функцию W(jω,t) определим как такую, зависящую от параметра t комплексную функцию от частоты, у которой модуль равен отношению амплитуд колебаний на выходе и входе нестационарной системы, а аргумент – сдвигу фазы.

Для системы с весовой функцией w(t–τ, τ) таким свойством обладает функция

$$W(jw,t) = \int_0^\infty w(q,t-q)e^{-jwq}\,dq \quad . \tag{5.8}$$

Это соотношение примем за определение частотной передаточной функции нестационарной линейной системы с весовой функцией w(t–τ, τ). Для ее передаточной функции W(s, t) из (5.8) получаем

$$W(s,t) = \int_0^\infty w(q,t-q)\,\mathbf{l}^{-sq}\,dq. \tag{5.9}$$

Передаточные функции W(jω,t) и W(s,t) называют *параметрическими*. Первая из них есть параметрическая частотная передаточная функция нестационарной линейной системы с весовой функцией w(t–τ), вторая – параметрическая передаточная функция нестационарной линейной системы с весовой функцией $w(t-\tau,\ \tau)$.

Можно доказать, что функция $W(j\omega,\ t)$, определяемая соотношением (5.8), действительно обладает свойствами частотной передаточной функции.

Пусть на вход нестационарной линейной системы с весовой функцией $w(t-\tau,\ \tau)$ подается гармонический сигнал $u=u_m \cos \omega t$. Как и раньше, при рассмотрении стационарных систем, представим его в виде суммы

$$u = u_1 + u_2 = \frac{u_m}{2}\, e^{j\omega t} + \frac{u_m}{2}\, e^{-j\omega t}.$$

Используя (5.7) при $u=u_1=\frac{u_m}{2}\, e^{j\omega t}$, получим

$$y_1(t) = \frac{u_m}{2}\int_{-\infty}^{t} w\,(t-t,\ t)\, e^{j w t}\, dt\ .$$

Сделаем замену переменной $t-\tau=\theta$. Тогда

$$y_1(t)= \frac{u_m}{2}\int_0^{\infty} w(q, t-q)\, e^{jv(t-q)} dq = \frac{u_m}{2}\, e^{jvt}\int_0^{\infty} w(q, t-q)\, e^{-jvq} dq.$$

Введем обозначение $W(j\omega,t)=\int_0^{\infty} w(q, t-q)\, e^{-jwq} dq.$

При этом последнее выражение для $y_1(t)$ принимает вид

$$y_1(t) = W(j\omega,\ t)\,\frac{u_m}{2}\, e^{j\omega t}. \qquad (5.10)$$

Аналогично, при $u_2 = \frac{u_m}{2}\, e^{-j\omega t}$ получим

$$y_2(t) = W(-j\omega,\ t)\,\frac{u_m}{2}\, e^{-j\omega t}, \qquad (5.11)$$

где

$$W(-j\omega,\ t) = \int_0^{\infty} w(\theta,\ t-\theta)\, e^{j\omega\theta}\, d\theta\ .$$

Полученные решения можно переписать в виде

$$y_1 = A(\omega,t)\,\frac{u_m}{2}\;e^{j[\,\omega t + \varphi(\omega,t)]}\;,$$

$$y_2 = A(\omega,t)\,\frac{u_m}{2}\;e^{-j[\,\omega t + \varphi(\omega,t)]}\;,$$

где

$$A(\omega,t) = \left|W(j\omega,t)\right|,\;\; \varphi(\omega,t) = \arg W(j\omega,t)\;.$$

Пользуясь принципом суперпозиции, для выходной величины получим

$$y = y_1 + y_2 = A(\omega,t)\,u_m \cos[\,\omega t + \varphi(\omega,t)]$$

Таким образом, модуль функции $W(j\omega, t)$, определяемой выражением (5.8), равен отношению выходного и входного гармонических сигналов, а ее аргумент – сдвигу фаз.

Установим зависимость между изображениями по Лапласу выходной и входной величинами. Возьмем выражение (5.7)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t-\tau,\,\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

и используя замену переменной $t-\tau=\theta$, перепишем его в следующем виде;

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} w(\theta,\,t-\theta)\,u(t-\theta)\,d\theta\,. \qquad (5.12)$$

Представим входную величину с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{s_0-j\omega}^{s_0+j\omega} U(s)\,e^{ts}\,ds\,,$$

где $U(s) = L\{u(t)\}$, и подставим ее в (5.12).

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} w(\theta,\,t-\theta)\left\{\frac{1}{2\pi j}\int_{s_0-j\infty}^{s_0+j\infty} U(s)\,e^{(t-\theta)s}\,ds\right\}d\theta\,.$$

Поменяв порядок интегрирования, получим

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{s_0-j\omega}^{s_0+j\omega} U(s)\,e^{ts}\left\{\int_{0}^{\infty} w(\theta,\,t-\theta)\,e^{-\theta s}\,d\theta\right\}ds\,.$$

Легко видеть, что внутренний интеграл равен параметрической передаточной функции W(s,t). Поэтому можно записать

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} U(s)W(s,\, t)\, e^{ts} ds \ ,$$

что совпадает с обратным преобразованием Лапласа. Следовательно, если Y(s,t)–изображение выходной величины y(t), получим

$$Y(s, t) = W(s,\ t)\ U(s). \tag{5.13}$$

Мы пришли к выводу, что параметрическая передаточная функция равна отношению изображений выходной и входной величин. Полученная формула позволяет определить изображение выходной величины, если известна параметрическая передаточная функция и изображение входной величины, а, следовательно, найти и саму выходную величину.

Параметрическую передаточную функцию можно отыскать, пользуясь ее определением (5.9), если известна весовая функция. Однако, проще ее можно определить по дифференциальному уравнению.

Пусть нестационарная линейная система описывается дифференциальным уравнением

$$Q(p,t)\ y(t) = R(p,t)\ u(t),$$

где

$$Q(p, t) = a_0(t)\ p^n + a_1(t)\ p^{n-1} + \ldots\ldots + a_n(t)$$

$$R(p, t) = b_0(t)\ p^m + b_1(t)\ p^{m-1} + \ldots\ldots + b_m(t)\ .$$

Решение предлагается находить с помощью рядов. В этом случае параметрическая передаточная функция подчиняется дифференциальному уравнению

$$Q(s,t)W(s,t) + \frac{dQ}{ds}\frac{dW}{dt} + \frac{1}{2!}\frac{d^2Q}{ds^2}\frac{d^2W}{dt^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^nQ}{ds^n}\frac{d^nW}{dt^n} = R(s,t) \tag{5.14}$$

где

$$Q = Q(s,t) = a_0(t)\ s^n + a_1(t)\ s^{n-1} + \ldots + a_n(t)\ . \tag{5.15}$$

$$R(s,t) = b_0(t)\, s^m + b_1(t)\, s^{v-1} + \ldots + b_m(t).$$

Один из приближенных методов решения уравнения (5.14) заключается в следующем:
перепишем это уравнение в следующем виде

$$Q(s,t)\, W(s,t) = R(s,t) + N\{\, W(s,t) \,\}\ , \qquad (5.16)$$

где

$$N\{W(s,t)\} = -\left[\frac{dQ}{ds}\frac{dW}{ds} + \frac{1}{2!}\frac{d^2Q}{ds^2}\frac{d^2W}{dt^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^nQ}{ds^n}\frac{d^nW}{dt^n}\right] \qquad (5.17)$$

Решение ищется последовательным приближением

$$W(s,t) = W_0(s,t) + W_1(s,t) + \ldots\ .$$

В качестве нулевого приближения принимается $W_0(s,t)=R(s,t)/Q(s,t)$, что является передаточной функцией системы с “замороженными” коэффициентами. Для вычисления первой поправки $W_1(s,t)$ подставим в правую часть уравнения (5.16) полученное нулевое приближение, а в левую – сумму нулевого приближения и первой поправки. Тогда для $W_1(s,t)$ получим

$$W_1(s,t)=N\{W_0(s,t)\} / Q(s,t)\ . \qquad (5.18)$$

Аналогично для i-й поправки получим

$$W_i(s,t)=N\{W_{i-1}(s,t)\} / Q(s,t)\ . \qquad (5.19)$$

В качестве примера найдем параметрическую передаточную функцию нестационарной системы. которая описывается уравнением

$$a_0\dot{y} + (a_1 + at)y = b_0 u\,.$$

В данном случае

$Q(s,t)= a_0\, s + a_1 + a\ t$, $R(s,t)= b_0$, $dQ / ds= a_0$, $d^2 Q / ds^2 = 0$.

Уравнение (5.16) принимает вид

$$(\hat{o}_0 s + a_1 + a\ t)W(s,t) = b_0 + N\{W(s,t)\},$$

где N{W(s,t)} = $-a_0\, dW/d\,\mathrm{t}$.

Для нулевого приближения можно записать

$$W_0\,(s,t) = b_0 / \left(a_0 s + a_1 + a\ \mathrm{t}\right).$$

Для первой поправки согласно формуле (5.18) будем иметь

$$W_1(s,t) = \frac{N\{W_0(s,t)\}}{Q(s,t)} = -\frac{dQ}{ds}\frac{dW_0}{dt} / Q(s,t) = -\frac{a_0}{a_0 s + a_1 + a\,\mathrm{t}}\frac{\mathrm{dW_0}}{\mathrm{dt}}.$$

В свою очередь

$$\frac{\hat{a}W_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{R(s,t)}{Q(s,t}\right)_0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{b_0}{a_0 s + a_1 + a\ \mathrm{t}}\right) = -\frac{b_0 a}{\left(a_0 s + a_1 + a\ \mathrm{t}\right)^2}.$$

Таким образом

$$W_1(s,t) = a_0 b_0 a \,/ \left(a_0 s + a_1 + a\ \mathrm{t}\right)^3.$$

По формуле (5.19) можно вычислить последующие поправки. Но если α мало, то можно ограничиться только первой поправкой. Тогда

$$W(s,t) \approx W_0(s,t) + W_1(s,t) = \frac{b_0\left(a_0 s + a_1 + a\ \mathrm{t}\right)^2 + a\ a_0 b_0}{\left(a_0 s + a_1 + a\ \mathrm{t}\right)^3}.$$

§ 5.3 Квазистационарные системы.

Если коэффициенты уравнения (5.1) нестационарной системы изменяются медленно, то такую систему называют *квазистационарной*. Считается, что коэффициенты уравнения нестационарной системы изменяются медленно, если за время переходного процесса они изменяются незначительно. Под временем переходного процесса понимается минимальное время, по истечении которого (момента приложения единичного импульса) абсолютные значения весовой функции системы с “замороженными“ коэффициентами не превышают некоторой заданной малой положительной величины. Метод “замороженных“ коэффициентов является приближенным. В уравнении нестационарной системы переменные коэффициенты $a_i(t)$ и $b_i(t)$ заменяются постоянными коэффициентами $a_i(t')$ и $в_i(t')$, равными значениям исходных коэффициентов в какой-либо фиксированный момент времени t'. Очевидно, что передаточная функция с “замороженными” коэффициентами равна нулевому приближению нестационарной системы при фиксированном времени $t=t'$.

Если промежуток времени оказывается достаточно большим, то изменения коэффициентов уравнения могут быть значительными. Тогда весь промежуток времени разбивают на несколько интервалов и на каждом интервале систему описывают уравнениями с постоянными коэффициентами, равными их значениям в какой-либо момент времени из рассматриваемого интервала.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Теория автоматического управления./ Под редакцией акад. А.А. Воронова / ч.I. Теория линейных систем автоматического управления. М. 1986.
2. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М. 1980.
3. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. часть I. Линейные системы регулирования одной величины. “Энергия”, М. 1965.
4. Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. “Наука”, 1972.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы.“Наука”, 1968.
6. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления. “Высшая школа”. 1973.
7. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М. 1974.