

ЛЕКЦИЯ 8

Идеальные среды

1. Идеальный газ
2. Идеальная вязкая жидкость
3. Идеальное упругое тело
4. Фильтрация идеального газа и вязкой жидкости
5. Идеально пластическое тело

Для разреженного газа справедливы **законы Бойля-Мариотта, Гей-Люссака и Джоуля**.

По **закону Бойля-Мариотта** при изотермическом сжатии или расширении газа давление изменяется обратно пропорционально объему

$$p_h V = \text{const}, \quad T = \text{const} \quad (1)$$

Этот закон был установлен независимо Бойлем в 1661 г. и Мариоттом в 1676 г.

По **закону Гей-Люссака**, установленном в 1802 году, нагревание газа на 1 градус при постоянном давлении влечет за собой его расширение на $1/273,15$ часть того объема, который он занимает при 0°C и при том же давлении. Или при постоянном давлении удельные объемы газа прямо пропорциональны его абсолютным температурам

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (2)$$

В совокупности эти два закона дают **уравнение Клапейрона-Менделеева**

$$p_h V = \nu RT \quad \left(p_h = \frac{p}{m} RT, \quad p_h \gamma m = RT \right) \quad (3)$$

где ν - число молей, содержащихся в объеме; R - универсальная газовая постоянная.

Идеальный газ Физические основы

В XVII-XIX веках англичанин Р.Бойль и французы Э.Мариотт, Ж.Гей-Люссак и Ж.Шарль экспериментально установили ряд важных газовых законов, названных их именами. Закономерности были получены при изучении поведения газов при небольших давлениях, близких к атмосферному. Считалось, что этим законам подчиняются все реально существующие газы. Однако, впоследствии, когда появились более точные приборы и усовершенствовались методы исследования, было установлено, что реальные газы даже при невысоких давлениях не совсем точно следуют газовым законам. Расхождение оказывалось тем меньшим, чем меньше была плотность газа, т.е. были меньше силы межмолекулярного взаимодействия.

Для выяснения предела действия газовых законов **в термодинамике введено понятие идеального газа**. Под ним понимают теоретическую модель газа, представляющую собой хаотически движущиеся, равномерно распределенные по объему и непрерывно соударяющиеся упругие молекулы. При этом не учитывается взаимодействие частиц газа друг с другом.

Идеальный газ можно представить как предельное состояние реального при

$$p_h \rightarrow 0$$

По **закону Джоуля** внутренняя энергия идеального газа пропорциональна абсолютной температуре

$$U = \nu C_V T \quad (4)$$

В соответствии с классической статистической теорией, теплоемкость одного моля всех одно-, двух- и трехатомных газов равна соответственно

$$C_V = \frac{2}{3} R, \quad \frac{5}{2} R, \quad 3R$$

Последнее соотношение обычно плохо выполняется.

Теплота, необходимая для нагревания одного моля газа при постоянном давлении C_p превышает теплоемкость газа при постоянном объеме C_V на величину работы $p_h(V_2 - V_1)$, которую газ производит вследствие расширения, когда при неизменном давлении его нагревают на 1 градус

С помощью уравнения Клапейрона-Менделеева находим:

$$p_h(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) = R \quad (5)$$

Следовательно

$$C_p - C_V = R \quad (6)$$

Это есть **уравнение Р.Майера**

В 1787 году Ж.Шарль, исследовавший расширение газов, установил закон изменения давления идеального газа с изменением температуры при постоянном объеме, в соответствии с которым

$$p_h/T = \text{const} \quad (7)$$

Это и есть **закон Шарля**

Работа расширения:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p_h dV \quad (8)$$

При изотермическом расширении газа его внутренняя энергия остается неизменной и газ производит работу, равную тому количеству тепла, которое требуется сообщить, чтобы при расширении температура газа осталась неизменной

В **случае идеального газа** вектор напряжений на любой площадке ортогонален этой площадке. Иными словами, тензор напряжений является шаровым

$$\sigma_{ij} = -p_h \delta_{ij} \quad (9)$$

$$(\sigma = -p_h \delta, p_h = p_h^e + p_h^i)$$

Чаще всего под идеальным газом понимают идеальный невязкий газ.

«основной» или производящий потенциал – энергия Гиббса

$$dg = -sdT + \gamma dp_h, \quad g = g(T, p_h) \quad (13)$$

$$(II) \quad \begin{cases} ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p_h} dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p_h} \right)_T dp_h & \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T} \\ d\gamma = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right)_{p_h} dT + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial p_h} \right)_T dp_h & \left(\frac{\partial \gamma}{\partial p} \right)_T = -\frac{\gamma}{K_T} = -\beta_T \gamma \end{cases}$$

Изотермические объемный модуль и к-т сжимаемости

Изобарный коэффициент теплового расширения:

$$(14) \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = -\frac{\partial}{\partial p} \left(\left(\frac{\partial g}{\partial T} \right)_{p_h} \right)_T = -\frac{\partial}{\partial T} \left(\left(\frac{\partial g}{\partial p_h} \right)_T \right)_{p_h} = -\left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right)_{p_h} = -\gamma \alpha_p$$

линейный α_T

$$(III) \quad \begin{cases} ds = \frac{c_p}{T} dT - \gamma \alpha_p dp_h \\ d\gamma = \gamma \alpha_p dT - \gamma \beta_T dp_h \end{cases}$$

$$g = u - Ts + p_h \gamma$$

Основные термодинамические соотношения

Идеальный невязкий газ (жидкость как синоним) $p_h^i = 0$

Индекс "e" опускаем;

В уравнение Гиббса входит только упругое давление

$$du = Tds - p_h d\gamma, \quad u = u(s, \gamma) \quad (10)$$

$$T = T(s, \gamma), \quad p_h = p_h(s, \gamma)$$

«основной» или производящий потенциал – внутренняя энергия

$$(I) \quad \begin{cases} dT = \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_\gamma ds + \left(\frac{\partial T}{\partial \gamma} \right)_s d\gamma & \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_\gamma = \frac{T}{c_\gamma} \\ dp_h = \left(\frac{\partial p_h}{\partial s} \right)_\gamma ds + \left(\frac{\partial p_h}{\partial \gamma} \right)_s d\gamma & \left(\frac{\partial p_h}{\partial \gamma} \right)_s = - \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p_h} \right)_s \right]^{-1} = - \frac{1}{\gamma \beta_s} = - \frac{K_s}{\gamma} \end{cases}$$

адиабатический объемный модуль

адиабатный коэффициент теплового расширения:

$$\left(\frac{\partial p_h}{\partial s} \right)_\gamma = - \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \gamma} = - \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma \partial s} = - \left(\frac{\partial T}{\partial \gamma} \right)_s = - \frac{1}{\alpha_s} \quad (11)$$

адиабатический коэффициент сжимаемости

(В лекции 7 + следующий слайд – изотермический модуль и изобарный КТР)

$$\begin{cases} dT = \frac{T}{c_\gamma} ds + \frac{1}{\alpha_s} d\gamma \\ dp_h = - \frac{1}{\alpha_s} ds - \frac{K_s \rho}{\gamma} d\gamma \end{cases} \quad (12)$$

Для идеального газа:

$$p_h \gamma m = RT$$

$$K_T = -\gamma \left(\frac{\partial p_h}{\partial \gamma} \right)_T = -\gamma \left[\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{RT}{\gamma m} \right) \right] = \gamma \frac{RT}{\gamma^2 m} = p_h \quad (15)$$

$$\beta_T = p_h^{-1} \quad (16)$$

$$\alpha_T = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{RT}{p_h m} \right] = \frac{R}{\gamma p_h m} = T^{-1} \quad (17)$$

$$\frac{c_p}{c_\gamma} = \frac{K_s}{K_T}$$

$$c_p = c_\gamma + T \gamma \xi \alpha_p$$

«основной»
или
производящий
потенциал –
энтальпия

$$dh = Tds + \gamma dp_h \quad (18) \quad T = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_{p_h}, \quad \gamma = \left(\frac{\partial h}{\partial p_h} \right)_s$$

$$(III) \begin{cases} dT = \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p ds + \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s dp \\ d\gamma = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right)_p ds + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial p} \right)_s dp \end{cases}$$

Коэффициент изоэнтропного охлаждения или
изоэнтропный к-т дросселирования

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \frac{\partial}{\partial p} \left(\left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_p \right)_s = \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_s \right)_p = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right)_p = \mu_s \quad (19)$$

Отвечает за
механокалорический
эффект - нагревание
жидкости или газа под
действием градиента
давления (или разности
давлений)

$$(III) \begin{cases} dT = \frac{T}{c_p} ds + \mu_s dp \\ d\gamma = \mu_s ds - \gamma \beta_s dp \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Устанавливается с помощью} \\ \text{термодинамических равенств} \end{array} \quad \mu_s = \frac{\gamma T}{c_p} \alpha_T \quad (20)$$

$$\text{Идеальный газ} \quad \mu_s = \frac{\gamma T}{c_p} T^{-1} = \frac{\gamma}{c_p} \quad (21)$$

Модель идеального газа. Общие уравнения

После того, как все
термодинамические
свойства определены,
можем выписать нужные
уравнения баланса

$$\frac{dp}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \quad (3)$$

$$p_h = \frac{\rho}{m} RT \\ p_h = p_h^e; \quad p^V = 0$$

Так как $\sigma_{ij} = -p_h \delta_{ij}$, вместо (2) имеем

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{F} - \nabla \cdot p_h \quad \text{Уравнения Эйлера}$$

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt}, \quad a_2 = \frac{dv_2}{dt}, \quad a_3 = \frac{dv_3}{dt}$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_h}{\partial x}$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_h}{\partial y}$$

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_h}{\partial z}$$

Л.7:

$$df = -s dT - p_h d\gamma, \quad f = f(T, \gamma)$$

$$(III) \begin{cases} ds = \frac{c_\gamma}{T} dT + \xi d\gamma \\ dp_h = \xi dT - K_T \rho d\gamma \end{cases}$$

Изохорный коэффициент термического увеличения давления:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \gamma} \right)_T = - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_\gamma \right)_T = - \frac{\partial}{\partial T} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma} \right)_T \right)_\gamma = \left(\frac{\partial p_h}{\partial T} \right)_\gamma = \xi \quad (22)$$

Л.7 (38):

$$\xi = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\gamma = \rho K_T \gamma \alpha_p = K_T \alpha_p \quad (23)$$

Устанавливается аналогично:

$$K_S = \frac{c_p}{c_\gamma} K_T \quad (24)$$

Для идеального газа:

$$\xi = \frac{p_h}{T}, \quad K_S = \frac{c_p}{c_\gamma} p_h \quad (25)$$

К-т ξ отвечает за термомеханический эффект – появление в жидкости или газе разности давлений, обусловленной разностью температур, что приводит к ее движению

Дифференциальное уравнение изоэнтропы

1)

$$dh = Tds + \gamma dp$$

Если $s = const$,

$$(dh)_s = (\gamma dp)_s \implies \left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)_s = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial u} \right)_s \quad (6)$$

2)

$$du = Tds - p d\gamma$$

Если $s = const$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_s = -p \left(\frac{\partial \gamma}{\partial p} \right)_s \quad (7)$$

\implies д.у. изоэнтропы

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)_s = - \frac{\gamma}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial \gamma} \right)_s \quad (8)$$

Вводим обозначение:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)_s = k \quad \text{показатель} \\ \text{изоэнтропы} \quad (9)$$

\implies

$$k = - \frac{\gamma}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial \gamma} \right)_s \quad (10)$$

По определению

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial p} \right)_s = - \frac{\gamma}{K_s}$$

Выписывали выше: $K_S = \frac{c_p}{c_\gamma} K_T$ т.е. $\left(\frac{\partial p}{\partial \gamma}\right)_s = \frac{c_p}{c_\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial \gamma}\right)_T$

$$\Rightarrow k = -\frac{c_p}{c_\gamma} \frac{\gamma}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial \gamma}\right)_T \quad (11)$$

Если газ – идеальный, то найдем с учетом предыдущего

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \gamma}\right)_T = -\frac{RT}{m\gamma^2} = -\frac{p}{\gamma} \quad k = \frac{c_p}{c_\gamma} \quad (12)$$

Уравнение (10) $k = -\frac{\gamma}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial \gamma}\right)_s$ можем записать следующим образом:

$$k = -\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \gamma}\right)_s \quad (13)$$

Интегрируем при $s=const$

$$\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} k d \ln \gamma \quad (14)$$

Если в некотором интервале состояний $k = const$, из последнего уравнения следует ряд равенств

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -k \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad \text{или} \quad \ln \frac{p_2}{p_1} = \ln \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^k \quad \text{или} \quad p_1^k = const, \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^k \quad (15)$$

Это соотношение, справедливое для $k=const$ называется уравнением **адиабаты Пуассона**

Если газ – идеальный, из последнего соотношения следует:

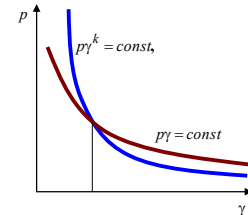
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{k-1} \quad \text{и} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} \quad (16)$$

Для изотермического процесса в идеальном газе имеем:

$$p\gamma = RTm^{-1} = const$$

А для адиабатического -

$$p\gamma^k = const,$$



$k = \frac{c_p}{c_\gamma} > 1 \Rightarrow$ Следовательно, на $p\gamma$ -диаграмме адиабата ($k < 1$) расположена круче изотермы

Баротропное равновесие

Пусть газ находится в равновесии в потенциальном силовом поле, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \rho \mathbf{F} - \nabla \cdot p_h &= 0 \\ F &= -\nabla \Pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\rho \nabla \Pi = \nabla p_h$$

Введем функцию давления такую, что $P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp_h}{\rho(p_h)} \quad (17)$

Ее градиент: $\nabla P = \frac{dP}{dp_h} \nabla p_h = \frac{1}{\rho} \nabla p_h$

Величина $-\frac{1}{\rho} \nabla p_h$ может рассматриваться как отнесенный к единице массы главный вектор сил давления в данной точке или вектор объемного действия этих сил

P - потенциал объемного действия сил давления

Следовательно, уравнение баротропного равновесия можно записать в виде:

$$\Pi + P = const$$

Частные варианты баротропного газа

Баротропный газ: $\rho = \rho(p_h) \quad (4)$ плотность может рассматриваться только как функция давления

В этом случае говорим о баротропном движении и равновесии

В противном случае имеем бароклинное движение и равновесие

$$\rho = \rho(p_h, T) \quad (5)$$

Частные случаи баротропного равновесия (движения)

1) газ несжимаемый: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 0$

Плотность перестает быть искомой величиной

2) процесс изотермический, но $T = T_0 = const$: $\rho = \frac{pm}{RT_0} = const \cdot p = \frac{p_0}{p_0} p$
газ - сжимаемый

3) процесс адиабатный; нет притока тепла. Уравнение изотермы: $p_h \gamma = const$

Идеальная несжимаемая жидкость

Для упрощения теоретических исследований и выводов Л. Эйлер ввел понятие **идеальной жидкости**, т.е. такой воображаемой жидкости, которая абсолютно подвижна, несжимаема и не обладает вязкостью, т.е. при движении в ней не возникают силы внутреннего трения. Следовательно, при перемещении идеальной жидкости по трубам отсутствуют потери энергии на трение. Так как силы трения в покоящейся реальной жидкости равны нулю, то ее свойства близки к идеальной.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \nabla p_h \quad (2)$$

Часто вводят второй коэффициент вязкости: $\zeta = \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1$ (5)

$$\sigma_{ij} = -p_h \delta_{ij} + 2\mu_1 e_{ij} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu_1 \right) e_{kk} \delta_{ij} \quad (6)$$

Второй коэффициент вязкости связан с объемной деформацией жидкости и при расчетах течений несжимаемых жидкостей не учитывается. Необходимость учета объемной вязкости может возникнуть в случаях, когда сжимаемость среды существенна, например, для процессов с большими временами релаксации (в движущемся газе с низкоскоростной реакцией); в ударных волнах...

Из термодинамики мы получали еще одно соотношение для вязкого давления: $p_h = p_h^e + p_h^V, p_h^V = -\eta_V \nabla \cdot \mathbf{v}$ (7)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -(\eta_V \nabla \cdot \mathbf{v} + p_h) \delta_{ij} + 2\mu_1 e_{ij} + \delta_{ij} \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu_1 \right) \nabla \cdot \mathbf{v} = \\ &= -p_h \delta_{ij} + 2\mu_1 e_{ij} + \underbrace{\delta_{ij} \left(\zeta - \eta_V - \frac{2}{3}\mu_1 \right)}_{\zeta'} \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (8)$$

Несжимаемая жидкость: $\sigma_{ij} = -p_h \delta_{ij} + 2\mu_1 e_{ij}$ (9)

Жидкости, которые удовлетворяют законам (6)-(9), называют **Ньютоновскими**

Линейная вязкая жидкость

Вязкая жидкость

$$\sigma_{ij} = -p_h \delta_{ij} + S_{ij} \quad (1)$$

$$p_h = p_h(\rho, T), \quad S_{ij} = S_{ij}^V(e_{\alpha\beta}, T) \quad (2)$$

$e_{\alpha\beta}$ компоненты тензора скоростей деформации

Для линейной вязкой жидкости имеет место закон Навье-Стокса

$$S_{ij}^V = C_{ij\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \quad (3) \quad \text{Л6, Л7 - ТО}$$

$$\mathbf{S}^S = \mathbf{L}_S \mathbf{X}_t, \quad \mathbf{X}_t = \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{e}$$

В случае простой изотропной среды имеем: $S_{ij} = 2\mu_1 e_{ij} + \lambda_1 e_{kk} \delta_{ij}$ (4)
(индекс "V" у девиатора далее опускаем)

$$e_{kk} = \dot{\epsilon}_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

μ_1 динамический коэффициент вязкости, $\nu_1 = \frac{\mu_1}{\rho}$ кинематический

Это – линейное соотношение

Количественно вязкость μ_1 определяется величиной касательной силы, которая должна быть приложена к единице площади сдвигаемого слоя, чтобы поддержать в этом слое течение с постоянной скоростью относительно сдвига, равной единице.

При малых скоростях вязкость не зависит от давления.

Имеется ряд экспериментальных законов.

Для вязких газов справедлива формула Сэзерланда: $\mu_1 = \frac{A\sqrt{T}}{1+CT}$ (10)

При низких температурах справедлива формула Чепмена:

$$\mu_1 = \frac{B\sqrt{T}}{1+CT-C'T^2}, \quad C, C' \text{ зависят от плотности} \quad (11)$$

Для очень разреженных газов понятие вязкости теряет смысл.

Для газов: $\nu_1 \sim D \sim \kappa_T$ – статистическая теория

Для жидкостей и твердых тел законы существенно отличаются. В них коэффициент вязкости обратно пропорционален коэффициенту самодиффузии

$$\mu_1 = A(T) \exp\left(\frac{W}{kT}\right) \quad (12)$$

W – энергия активации вязкого течения или энергия «разрыхления» жидкости

Подставив $\sigma_{ij} = -p_h \delta_{ij} + 2\mu_1 e_{ij} + \lambda_1 e_{kk} \delta_{ij}$ в уравнение движения, найдем:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p_h + \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\rho} \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\mu_1}{\rho} \Delta \mathbf{v} \quad (13)$$

Или для несжимаемой жидкости:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p_h + \frac{\mu_1}{\rho} \Delta \mathbf{v} \quad (14)$$

Это – уравнения Навье-Стокса

В скалярной форме (14) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_h}{\partial x} + v_1 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_h}{\partial y} + v_1 \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_h}{\partial z} + v_1 \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнение энергии для идеальных сред

$$du = Tds - p_h d\gamma \quad \text{эквивалентно} \quad \dot{u} = T\dot{s} - p_h \dot{\gamma} \quad \text{или} \quad \frac{du}{dt} = T \frac{ds}{dt} - p_h \frac{d\gamma}{dt}$$

Невязкий газ

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= -\nabla \cdot \mathbf{J}_T + \sigma \cdot \nabla \mathbf{v} \\ \sigma \cdot \nabla \mathbf{v} &= -p_h \delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p_h \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad \rho [T\dot{s} - p_h \dot{\gamma}] = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T - p_h \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (18)$$

Теперь воспользуемся уравнением неразрывности:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \implies \dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \frac{d\gamma}{dt} &= \gamma \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \rho = \frac{1}{\gamma} \implies \dot{\gamma} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2} \dot{\rho} & \rho \left[T\dot{s} + \frac{1}{\rho^2} \dot{\rho} \right] &= -\nabla \cdot \mathbf{J}_T - p_h \frac{\dot{\rho}}{\rho} \end{aligned}$$

или

$$\rho T\dot{s} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T \quad (19)$$

Это уравнение имеет место для газов, невязких жидкостей и твердых тел

В адиабатических условиях:

$$\rho T\dot{s} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{ds}{dt} = 0 \quad (20)$$

Эти уравнения тоже можно рассматривать как уравнения энергии

В частном случае одномерного движения

$$v_1 \neq 0, v_2 = v_3 = 0, v_1 = v_1(x, t)$$

$$\text{Уравнение Навье-Стокса:} \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_h}{\partial x} + v_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \quad (16)$$

$$\sigma_s = \frac{1}{T} (S^s \cdot \mathbf{e} - p^V \nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{Уравнение Эйлера:} \quad \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_h}{\partial x} \\ \sigma_s &= 0 \end{aligned}$$

В частном случае несжимаемой невязкой среды (газа, твердого тела):

$$(du)_\gamma = Tds \implies$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_\gamma ds \equiv \frac{T}{c_\gamma} ds \quad (21) \quad \text{и} \quad \boxed{\rho c_\gamma \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T} \quad (22)$$

Если среда (газ) – сжимаемая:

$$(\text{из (III)}) \quad ds = \frac{c_\gamma}{T} dT + \xi d\gamma = \frac{c_\gamma}{T} dT + K_T \alpha_p d\gamma \implies$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c_\gamma}{T} \frac{dT}{dt} + K_T \alpha_p \frac{d\gamma}{dt} \implies \rho T \left(\frac{c_\gamma}{T} \frac{dT}{dt} + K_T \alpha_p \frac{d\gamma}{dt} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{или} \quad \boxed{\rho c_\gamma \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T - K_T \alpha_p T \rho \frac{d\gamma}{dt}} \quad (23)$$

В случае вязкой жидкости Навье-Стокса (находим аналогично):

$$\text{Несжимаемая жидкость} \quad \rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T + \mathbf{S}^V \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (24)$$

$$\text{Сжимаемая жидкость} \quad \rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T - p_h^V \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S}^V \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (25)$$

или

$$\rho c_\gamma \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T - p_h^V \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S}^V \cdot \nabla \mathbf{v} - K_T \alpha_p T \nabla \cdot \mathbf{v}$$