

Лекция 2

Основные гипотезы МСС: гипотезы сплошности, метричности, непрерывности.

Общие определения перемещений; деформации; движения.

Подход Эйлера и Лагранжа.

Скорость.

Субстанциональная и локальная производная.

Многокомпонентный континуум. Аддитивность массы. Парциальные плотности и массовые концентрации.

Принцип локальной суперпозиции.

Принцип напряжений Коши и Эйлера.

Вектор напряжений. Тензор напряжений. Напряженное состояние в точке.

Разложение тензора напряжения на шаровую и девиаторную части.

Правило знаков.

1

Лекция 2

После введения понятия о локальном равновесии мы можем описывать поведение сред (материалов), неравновесные состояния и процессы с использованием **полевых переменных** – скаляров, векторов, тензоров. Чтобы описать их эволюцию с помощью дифференциальных уравнений в частных производных, будем основываться на совместном применении законов термодинамики и МСС

Основные гипотезы

В основе МСС лежит ряд экспериментальных фактов, которые можно сформулировать в виде основных теорем и гипотез

1. Гипотеза сплошности гласит: тело можно приближенно рассматривать как среду, заполняющую пространство сплошным образом. Это позволяет использовать аппарат теории непрерывных функций, в том числе, дифференциальное и интегральное исчисление.

$$\rho_{Fe} = 7,8 \quad \rho_{\text{ядра}} = 1,16 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3 \quad R_{\text{ядра}} = 10^{-13} \text{ см} \quad R_{\text{молекулы}} \sim 10^{-8}$$

2

$1 \text{ см}^3 \text{ воздуха} = 2,687 \cdot 10^{19} \text{ молекул}$

Частицы находятся в постоянном хаотическом движении

$$l_H \approx 11,2 \cdot 10^{-6} \text{ см} \quad \langle v \rangle = 1692 \text{ м/с}$$

$$l_O \approx 6,5 \cdot 10^{-6} \quad \langle v \rangle = 425$$

1 молекула за 1 с сталкивается $6,54 \cdot 10^9$ раз

Следовательно, тело можно рассматривать как среду, заполняющую пространство сплошным образом

$$Kn = \frac{l}{L} \ll 1$$

2. Вторая гипотеза заключается в том, что в рассматриваемом пространстве определены расстояния между точками, т.е. это **пространство является метрическим**. Пример такого пространства – обычное евклидово пространство, точки которого задаются с помощью декартовой системы координат

3

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ единичные ортогональные векторы

$$\mathbf{R} = X_1 \mathbf{i} + X_2 \mathbf{j} + X_3 \mathbf{k} \quad (1)$$

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} \quad (2)$$

$X_i, x_i, i = 1, 2, 3$ координаты точек

$$s = \sqrt{(x_1 - X_1)^2 + (x_2 - X_2)^2 + (x_3 - X_3)^2} \quad (3)$$

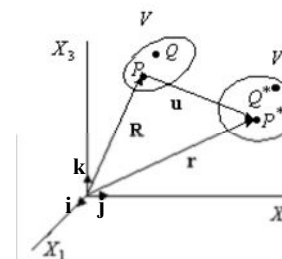
расстояние между двумя такими точками

Реальное пространство является евклидовым, т.е. всегда можно ввести декартову систему координат.

Определим деформацию среды как непрерывное преобразование, переводящее вещество области V в вещество области V^*

Такая деформация и обратная ей описываются преобразованиями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}), \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}) \quad (4)$$



4

3. Для того, чтобы такие преобразования были корректны, требуется применить **гипотезу непрерывности**, согласно которой любая деформация может быть описана однозначными непрерывными преобразованиями, имеющими непрерывные производные нужного порядка.

Движение непрерывной среды математически описывается непрерывным преобразованием трехмерного евклидова пространства в самое себя.

Если движение описывается в прямоугольной декартовой системе координат, то прямое

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t) \quad (5)$$

и обратное

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$$

преобразования являются движениями, если действительный параметр t соответствует реальному времени.

Таким образом,

движение есть однопараметрическое семейство деформаций.

5

4. Для описания кинематики сплошной среды используют **два метода**, восходящие к именам Лагранжа и Эйлера.

I. Координаты X_i вектора \mathbf{R} относятся к материальной точке («частице») в непрерывной среде. Это - *материальное, или субстанциональное описание*

II. Система отсчета наблюдателя (неподвижная). Координаты x_i вектора \mathbf{r} определяют точки евклидова пространства, непрерывно заполненного материей. Такое описание называют *пространственным*

Скорость «частицы» \mathbf{R}

$$\mathbf{v} \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)_{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{R}, t) \quad (6)$$

Ускорение:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{a}(\mathbf{R}, t)$$

При помощи обратного преобразования можем записать

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (7)$$

Допустим, что каждой точке пространства отвечают в качестве параметров определенные скалярные, векторные и тензорные величины, например, плотность вещества, плотность электрического заряда, вектор скорости, тензор напряжений и т.д. *Эти величины являются функциями координат и времени и называются полевыми величинами.*

6

A - произвольная полевая величина

В случае лагранжева описания имеем

$$A = A(\mathbf{R}, t) \quad (8)$$

При эйлеровом описании имеем

$$A = A(\mathbf{r}, t) \quad (9)$$

Дифференцируем по времени

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{R}} \equiv \frac{\mathbf{D}A}{\mathbf{D}t} \equiv \dot{A} \quad (10) \quad \text{Субстанциональная производная}$$

$(\partial \mathbf{R} / \partial t) = 0$

$$(11) \quad \frac{dA}{dt} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \cdot \nabla A$$

изменение в единицу времени любой полевой величины складывается из локального изменения этой величины в точке и конвективного изменения, связанного с перемещением элемента массы

$$(12) \quad \frac{d...}{dt} = \frac{\partial ...}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla ...$$

Т.е., при лагранжевом описании это просто частная производная по времени, а при эйлеровом – появляется конвективная составляющая

7

Многокомпонентный континуум

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{dM}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} \quad (13)$$

$$M(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (14)$$

Сохранение массы при деформации элемента массы:

$$dM = \rho_0(\mathbf{r}, t_0) dV = \rho(\mathbf{r}, t) dV^* = const \quad (15)$$

$$M = \int_V \rho_0 dV = \int_{V^*} \rho dV^* = const \quad (16)$$

В случае, когда полная масса есть сумма масс химически реагирующих компонентов

Принцип аддитивности

$$M = \sum_{k=1}^n M_k \quad (17)$$

$$\rho_k(\mathbf{r}, t) = \frac{dM_k}{dV}, \quad M_k(t) = \int_V \rho_k(\mathbf{r}, t) dV, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad (18)$$

8

**Закон
сохранения
массы**

$$\rho = \sum_{k=1}^n \rho_k \quad (18)$$

$$C_k = \frac{\rho_k}{\rho} = \frac{dM_k}{dM} \quad 1 = \sum_{k=1}^n C_k \quad (19)$$

Движения элементов массы многокомпонентного континуума описываются с помощью функции

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}_k, t) \quad (20)$$

**Индивидуальные
скорости**

$$\mathbf{v}_k = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)_{\mathbf{R}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k(\mathbf{R}_k, t)$$

с помощью обратного преобразования $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_k(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k(\mathbf{r}, t) \quad (21)$$

9

5. Поля скоростей континуумов, соответствующие отдельным компонентам, не являются независимыми друг от друга. Они определяют скорость центра масс континуума. Это есть так называемый **принцип локальной суперпозиции**, который означает, что сумма индивидуальных **локальных плотностей потока массы**, определяемых равенствами

$$\mathbf{J}_k^0(\mathbf{r}, t) = \rho_k(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_k(\mathbf{r}, t) \quad (22)$$

должна быть равна локальной плотности потока массы континуума, определяемой равенством

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (23)$$

$$\rho \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \rho_k \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{v}_k \quad (24)$$

Индивидуальные скорости различных компонентов среды макроскопически проявляются в явлениях диффузии

$$\mathbf{w}_k \equiv \mathbf{v}_k - \mathbf{v} \quad (25)$$

$$\mathbf{J}_k \equiv \rho_k \mathbf{w}_k = \rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}) = \mathbf{J}_k^0 - \rho_k \mathbf{v} \quad (26)$$

$$\mathbf{J}_k^0 = \mathbf{J}_k + \rho_k \mathbf{v} \quad (27)$$

10

Суммируем $\mathbf{J}_k = \rho_k \mathbf{w}_k$ по всем k

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k = \sum_{k=1}^n \rho_k \mathbf{w}_k = \sum_{k=1}^n \rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}) \equiv 0 \quad (28)$$

Полное изменение во времени произвольной полевой величины вследствие индивидуального движения k-го компонента

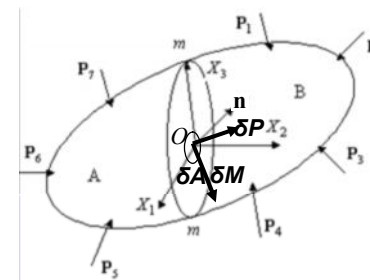
$$\frac{d^{(k)} A}{dt} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_k \cdot \nabla A \quad (29)$$

11

Теория напряжений и деформаций в континуальной механике

6. Принцип напряжений Коши – Эйлера:

В каждом поперечном сечении, мысленно проведенном внутри тела, имеет место взаимодействие сил такого же характера, как и распределенных по поверхности нагрузок

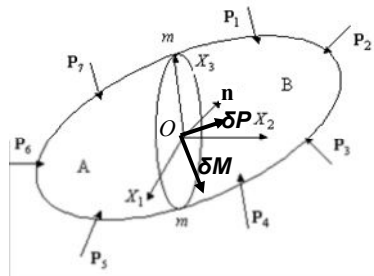


Действие части A в точке O на часть B можно представить вектором силы $\delta \mathbf{P}$ и в общем случае вектором момента $\delta \mathbf{M}$.

Вектор напряжений $\mathbf{p}^n = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta A} \quad (1)$

δA – элементарная площадка, содержащая точку O

12



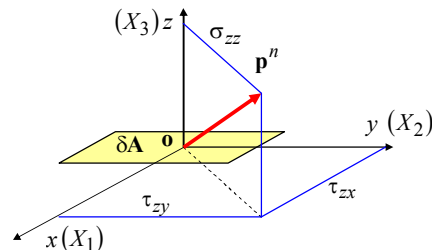
Закон Ньютона:

$$\mathbf{p}^{-n} = -\mathbf{p}^n \quad (2)$$

Из бесконечного множества векторов напряжений, проходящих через выделенную точку, **независимы только 3**

Все остальные могут быть вычислены, если в точке **O** известны векторы напряжений для трех взаимно ортогональных площадок, проходящих через эту точку - .

$$\mathbf{p}_1^n, \mathbf{p}_2^n, \mathbf{p}_3^n$$



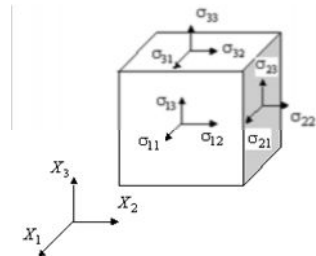
В свою очередь, каждый из векторов напряжений может быть разложен на три составляющих: одну нормальную и две касательных

13

Часто используют иные обозначения

Девять компонент тензора напряжений могут быть представлены матрицей

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Bmatrix} \quad (3)$$



Первый индекс у компонент тензора соответствует номеру координатной поверхности, второй – направлению действия.

$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ — нормальные напряжения

$\sigma_{12}, \sigma_{32}, \sigma_{13}, \dots$ — касательные напряжения $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$

Для произвольного вектора напряжений \mathbf{p}^n , действующего на элементарную площадку, справедливо:

$$\mathbf{p}^n = \mathbf{e}_1 p_1^n + \mathbf{e}_2 p_2^n + \mathbf{e}_3 p_3^n \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{i}; \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{j}; \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 n_1 + \mathbf{e}_2 n_2 + \mathbf{e}_3 n_3 \quad (5) \quad 14$$

Напряженным состоянием в точке называется совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через эту точку.

9 компонент тензора напряжений в 3-х взаимноортогональных площадках, проходящих через выделенную точку, полностью определяют напряженное состояние в этой точке. Располагая значениями компонент тензора напряжений σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, можно вычислить напряжения на любой площадке, проходящей через заданную точку.

Пусть $\mathbf{p}_1^n, \mathbf{p}_2^n, \mathbf{p}_3^n$ — проекции полного напряжения \mathbf{p}^n на оси координат \Rightarrow

$$\begin{aligned} p_1^n &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ p_2^n &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ p_3^n &= \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{aligned} \quad (6)$$

n_1, n_2, n_3 — направляющие косинусы нормали

$$P_j^n = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij}n_i, \quad j = 1, 2, 3 \quad (7) \quad \text{или} \quad P_j^n = \sigma_{ij}n_i \quad (8)$$

Повторяющийся индекс (i) называется **нечетным** (подставным); по нему идет суммирование. Неповторяющийся индекс (j) называется **свободным**

15

Самые простые операции с векторами и тензорами:

A — вектор с компонентами A_1, A_2, A_3

Разложение по базису: $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$

Умножение на число: $\alpha = \text{const}, \quad \alpha\mathbf{A} = \alpha A_1\mathbf{e}_1 + \alpha A_2\mathbf{e}_2 + \alpha A_3\mathbf{e}_3$

Сложение векторов: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1)\mathbf{e}_1 + (A_2 + B_2)\mathbf{e}_2 + (A_3 + B_3)\mathbf{e}_3$

Умножение тензора на число $\alpha\mathbf{T} = \{\alpha T_{ij}\}$

Сложение тензоров $\mathbf{T} = \{T_{ij}\}, \quad \mathbf{S} = \{S_{ij}\}$

$$\mathbf{T} + \mathbf{S} = \{T_{ij} + S_{ij}\}$$

16

Разложение тензора напряжений

Общий случай напряженного состояния можно представить в виде суммы двух напряженных состояний:

Шаровой тензор
$$\sigma_0 = \begin{Bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -p \quad (10)$$

Деватор тензора напряжений
$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} \quad (12)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (13)$$

$$s_{11} = \sigma_{11} - \sigma_0$$

$$s_{12} = \sigma_{12}$$

.....

17

Тензорная запись: $\sigma = -p\delta + \mathbf{S} \equiv \sigma^0 + \mathbf{S}$

Единичный тензор $\delta = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^s + \mathbf{S}^a$

Любой тензор можно представить в виде суммы симметричного и несимметричного тензоров

Симметричный и антисимметричный тензоры:

$$S^s_{ij} = \frac{1}{2}(S_{ij} + S_{ji}), \quad S^s_{ij} = S^s_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$S^a_{ij} = -\frac{1}{2}(S_{ij} - S_{ji}), \quad S^a_{ij} = -S^a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{S}^a = \begin{Bmatrix} 0 & -S^a_3 & S^a_2 \\ S^a_3 & 0 & -S^a_1 \\ -S^a_2 & S^a_1 & 0 \end{Bmatrix}$$

Этот тензор можно характеризовать всего тремя величинами:

$$S^a_1 = \frac{S^a_{23} - S^a_{32}}{2}, \quad S^a_2 = \frac{S^a_{31} - S^a_{13}}{2}, \quad S^a_3 = \frac{S^a_{12} - S^a_{21}}{2}$$

антисимметричный тензор эквивалентен так называемому аксиальному вектору с компонентами

$$S^a_1, S^a_2, S^a_3$$

18

Правило знаков:

Растягивающие нормальные напряжения будем считать положительными, **сжимающие** – отрицательными.

Знак касательных напряжений связан с направлениями осей координат: если внешняя нормаль к данной площадке совпадает с направлением соответствующей координатной оси, то на этой площадке касательные напряжения – положительные.

19

