Лекция 4

Математические пояснения: криволинейные, поверхностные, двойные и тройные интегралы.

Элементы теории поля. Скаляры, векторы, тензоры.
Градиент. Дивергенция. Ротор.

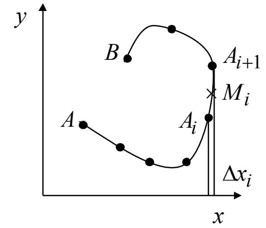
Основные операции с тензорами.

Представление некоторых формул в терминах поля.

Специальные векторы и тензоры.

Тензоры деформаций Коши-Грина и Эйлера-Альманзи.

Криволинейные, поверхностные, двойные и тройные интегралы



$m_i = \rho(M_i)\sigma_i$ -масса участка дуги длиной σ_i

$\rho(M_i)$ - линейная плотность

$$m = \lim_{\max \sigma_i \to 0} \sum_{(i)} \rho(M_i)\sigma_i \qquad (1)$$

$f(M) = f(x, y)$ - произвольная функция

Интегрирование вдоль дуги

$$(2) \quad I = \int_{(K)} f(x, y) ds$$ - криволинейный интеграл первого типа

Криволинейный интеграл второго типа: в (1) ρ нужно умножать не на длину дуги, а на проекцию дуги на ось 0X; интегрирование в (2) – по x.
Аналогично можно ввести интеграл вдоль оси 0У

Если вдоль кривой определены функции *P,Q,R(x,y,z)*, можем определить криволинейный интеграл общего вида:

$$I = \int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(AB)} Pdx + \int_{(AB)} Qdy + \int_{(AB)} Rdz \qquad (3)$$

Формула Грина:

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \qquad (4)$$

P, Q - функции, непрерывные в области D, ограниченной контуром L

Формула Стокса – обобщение формулы Грина:

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx \qquad (5)$$

Формула Остроградского:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_S Pdxdy + Qdzdx + Rdxdy \qquad (6)$$

Все формулы объединены одной идеей: они выражают интеграл, распространенный на некоторый геометрический образ, через интеграл, взятый по границе этого образа

Элементы теории поля

Скаляр – характеризуется численным значением;

Вектор – дополнительно требуется задать направление; проекции вектора на координатные оси вполне определяют вектор

Скалярное произведение векторов:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (7)$$

Векторное произведение векторов (правая система координат)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y ; A_z B_x - A_x B_z ; A_x B_y - A_y B_x \right) \qquad (8)$$

Градиент скалярной величины *T*– вектор, который по численному значению и направлению характеризует наибольшую скорость изменения *T*. *Направление градиента совпадает с направлением нормали к поверхности уровня.*

Итак, скалярное поле Т(М) порождает векторное поле

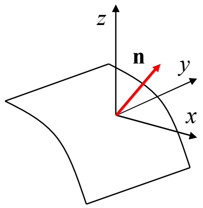
$gradT \equiv \nabla T$ (произведение вектора на скаляр)

вектор $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ скаляр T

Поток вектора через поверхность:

Пусть задан вектор $\mathbf{A}(M)$ $\Rightarrow$ заданы три функции:

$$A_x(x,y,z);\ A_y(x,y,z);\ A_z(x,y,z)$$



Интеграл $I = \iint\limits_{(S)} \left(A_x \cos\lambda + A_y \cos\mu + A_z \cos\nu\right) ds$

называется потоком вектора $\boldsymbol{A}$ через поверхность $\boldsymbol{S}$

(9) $\quad I = \iint\limits_{(S)} A_n ds$ - **это определение не зависит от системы координат**

Пусть $\quad P = A_x,\ Q = A_y,\ R = A_z$

Поток через поверхность можем выразить через тройной интеграл:

$$\iint\limits_{(s)} A_n ds = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dV$$

Стоящая под знаком тройного интеграла величина называется дивергенций вектора $\boldsymbol{A}$

$$div\mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$ (скалярное произведение векторов)

В такой форме определение не зависит от системы координат

$$\iint\limits_{(s)} A_n ds = \iiint\limits_{(V)} div\mathbf{A}dV \qquad (10)$$

Разделим эту формулу на объем и перейдем к пределу:

$$div\mathbf{A} = \lim_{(V)\to M} \frac{\iint\limits_{(S)} A_n ds}{V}$$

Это равенство может служить определением дивергенции и не зависит от системы координат

На этот раз векторное поле порождает скалярное

Циркуляция вектора: имеется векторное поле $\boldsymbol{A}$

Интеграл $\int\limits_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int\limits_L A_L dL$ взятый по некоторой кривой, называется линейным интегралом от вектора $\boldsymbol{A}$ вдоль кривой L

В случае замкнутого контура этот интеграл называется циркуляцией вектора А вдоль кривой

Если $\boldsymbol{A}$ – силовое поле, то интеграл выражает работу поля при перемещении вдоль кривой.

Если S - поверхность, ограниченная контуром L, то в соответствии с формулой Стокса имеем:

$$\int\limits_{(L)} A_L dL = \iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\lambda + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\mu + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\nu\right] dS$$

Вектор $\boldsymbol{B}$ с компонентами

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z};\quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x};\quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

называется вихрем или ротором вектора $\boldsymbol{A}$

Для произвольной системы координат

$$\int\limits_{(L)} A_L dL = \iint\limits_{(S)} \mathbf{rot_n A} ds$$

Циркуляция вектора вдоль замкнутого контура равна потоку вихря вектор через поверхность, ограниченную этим контуром

Векторное поле $\boldsymbol{A}$ порождает векторное поле вихря $\boldsymbol{B}$:

$$rot\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Тензоры

Тот факт, что некоторая физическая величина является скаляром, вектором или тензором, не зависит от системы координат. Но чтобы работать с физическими величинами как с числами, с компонентами, нам требуется вводить базисы в некоторых системах координат.

С математической точки зрения тензор можно определить по-разному. Воспользуемся таким определением:

Тензором второго ранга называется линейное отображение векторного пространства в себя, т.е. линейное преобразование векторов векторного пространства в векторы того же пространства.

Например, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ - векторы одного и того же пространства, и $\boldsymbol{T}$ – тензор (преобразование), отображающий $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$, то имеет место соотношение

$$\boldsymbol{b} = T\,\boldsymbol{a} \qquad (1)$$

Линейность преобразования означает, что для любых $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ и любых чисел α,β выполняется

$$\boldsymbol{T}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{Ta} + \beta\boldsymbol{Tb} \qquad (2)$$

Определяя в векторном пространстве базис $\{\boldsymbol{e}_i\}$, мы ставим в соответствие векторам наборы чисел

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i, \; \boldsymbol{b} = b_i \boldsymbol{e}_i \qquad (3)$$

При этом свои наборы чисел получают и тензоры, преобразующие векторы. А именно,

$$\boldsymbol{Ta} = \boldsymbol{T} a_i \boldsymbol{e}_i = a_i (\boldsymbol{Te}_i) \qquad (4)$$

(т.к. преобразование линейное)

По определению тензора, $\boldsymbol{Te}_i = \boldsymbol{T}_i, \; i = 1,2,3$ – (5)
есть некий новый вектор для каждого i

Каждый новый вектор мы также можем разложить по базису:

$$\boldsymbol{T}_i = T_{ij} \boldsymbol{e}_j = T_{i1} \boldsymbol{e}_1 + T_{i2} \boldsymbol{e}_2 + T_{i3} \boldsymbol{e}_3 \qquad (6)$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{Ta} = a_i T_{ij} \boldsymbol{e}_j = b_j \boldsymbol{e}_j \qquad (7)$$

$b_j = a_i T_{ij}$ -новое обозначение для компонент вектора $\boldsymbol{b}$, на который осуществлено преобразование вектора $\boldsymbol{a}$.

Компоненты a_i, b_j определяют векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$ однозначно, следовательно, числа T_{ij} также однозначно определяют такое преобразование, т.е тензор. Эти числа называются **компонентами** тензора второго ранга $\boldsymbol{T}$ относительно базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$. Их количество равно квадрату размерности векторного пространства. Такой тензор удобно представлять в виде квадратной матрицы.

$$\begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Vmatrix}$$

Если теперь представить векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в виде столбцов,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

то выражение (1) примет вид

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Умножая матрицу на вектор, для j-ой компоненты вектора $\boldsymbol{b}$ получим

$$b_j = T_{ji} a_i = T_{j1} a_1 + T_{j2} a_2 + T_{j3} a_3 \qquad (9)$$

Это произведение называется **сверткой вектора с тензором**

В бескоординатной форме

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ta} \qquad (10)$$

Известные нам объекты можно считать тензорами различных рангов:

скаляр – тензор 0-го ранга,

вектор – тензор 1-го ранга.

С некоторыми простейшими операциями с тензорами мы уже знакомы (лекция 2).

Основные операции с тензорами.

1.Умножение тензора на число $\alpha \mathbf{T} = \{\alpha T_{ij}\}$

2. Сложение тензоров одного ранга $\mathbf{T} = \{T_{ij}\}, \quad \mathbf{S} = \{S_{ij}\}$

$$\mathbf{T} + \mathbf{S} = \{T_{ij} + S_{ij}\}$$

3. Свертка по паре индексов. Ранг операндов – не ниже 1, ранг результата – на 2 единицы меньше суммы рангов сворачиваемых тензоров

$$\boldsymbol{A} = \{A_{ij}\}, \quad \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \boldsymbol{Aa} = (A_{ij} a_j) = \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \qquad (11)$$

$$b_i = A_{i1} a_1 + A_{i2} a_2 + A_{i3} b_3$$

$$\boldsymbol{A} = \{A_{ij}\}, \quad \boldsymbol{B} = \{B_{ij}\}, \quad \boldsymbol{AB} = (A_{ik} B_{kj}) = \left(\sum_{k=1}^{3} A_{ik} B_{kj} \right) = (T_{ij}) \qquad (12)$$

Индексы $\boldsymbol{j}$ в (11) и $\boldsymbol{k}$ в (12) – немые индексы; по ним идет суммирование

Т.е результат свертки двух векторов – скаляр. Скалярное произведение тензора и вектора – вектор, двух тензоров – снова тензор 2-го ранга.

4) Скалярное произведение. Определено для тензоров одинакового ранга. Результат – скаляр. Аналогично скалярному произведению векторов.

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_j b_j = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j \quad \text{и} \quad \boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{B} = A_{kj} B_{jk} = \sum_{(k,j)} A_{kj} B_{jk} \qquad (13)$$

5) Тензорное произведение

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{T} = \{T_{jk}\}; \quad T_{jk} = a_j b_k \qquad (14)$$

Ранг результата равен сумме рангов сомножителей. Уже знакомо – произведение вектора-столбца на вектор-строку. В результате получаем тензор.

6) Дифференциальные операции

Имеются **ковариантные** и **контравариантные** производные. Их определение связано с выбором системы координат. Если в произвольном пространстве у нас имеются 3 ортогональные кривые, то ортонормированный базис мы можем выбрать двумя способами – по касательным к ортогональным кривым или перпендикулярно к ним. В первом случае производные по направлению будут ковариантными, а во втором – контравариантными. Это различие в определении важно для криволинейных систем координат. В декартовой системе координат различия нет.

$\nabla\Phi, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}$ - знакомые операции

Градиент вектора $\quad (\nabla \boldsymbol{a})_{kj} = \nabla_j a_k = \dfrac{\partial a_k}{\partial x_j}$ - это тензор (15)

Определим ***дивергенцию тензора*** второго ранга

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{T})_j = \nabla_k T_{jk} = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} \quad \text{- это вектор} \qquad (16)$$

Операции с ∇ можно рассматривать как свертку вектора ∇ с вектором или тензором

$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = (\nabla, \boldsymbol{a})$ **- скалярное произведение**

Но ∇ -это дифференциальный оператор, а не настоящий вектор, поэтому

$$(\nabla, \boldsymbol{a}) \neq (\boldsymbol{a}, \nabla)$$

$$(\nabla, \boldsymbol{a}) = \nabla_i a_i = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \quad \text{- число}$$

$(\boldsymbol{a}, \nabla)$ **-дифференциальный оператор, например,** $(\boldsymbol{a}, \nabla)\boldsymbol{b} = (\nabla \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$

$(\nabla, \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ есть произведение вектора $\boldsymbol{b}$ на число, равное $(\nabla, \boldsymbol{a})$

Специальные тензоры

Единичный тензор $\quad I_{ik} = \delta_{ik}$

$\boldsymbol{Ia} = \boldsymbol{a}$ (тензорное произведение) (17)

Обратный тензор $\boldsymbol{A}^{-1}$ **:** $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ (18)

Нулевой тензор – необратим. Если $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ – обратимые тензоры, то их свертка также обратима:

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}; \quad (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A} \qquad (19)$$

$\alpha \neq 0$ - число: $\quad (\alpha \boldsymbol{A})^{-1} = \alpha^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ (20)

Транспонированный тензор

Пусть $\{\boldsymbol{e}\}$ - ортонормированный базис и $\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i, \; \boldsymbol{b} = b_i \boldsymbol{e}_i$

$$\boldsymbol{Aa} = (A_{ji} a_i)\boldsymbol{e}_j$$

$$(\boldsymbol{Aa}, \boldsymbol{b}) = (A_{ji} a_i) b_j = a_i (A_{ji} b_j) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b}) \qquad (21)$$

Действие тензора на вектор в покомпонентной записи сводится к умножению матрицы на вектор-столбец. По существующей договоренности первый индекс матричного элемента нумерует строку, второй – столбец.

По правилам же умножения матриц, элемент результата есть сумма произведений элементов строки матрицы на соответствующие элементы столбца второго сомножителя. Чтобы поменять местами порядок суммирования и записать все в матричных обозначениях, нам требуется ввести новый тензор – новую матрицу $\boldsymbol{A}^T$ с теми же компонентами, что и у матрицы $\boldsymbol{A}$, но стоящими в другом порядке: строки и столбцы необходимо поменять местами. Новая матрица является **транспонированной** по отношению к $\boldsymbol{A}$. Соответственно, тензор называется **транспонированным** тензором.

Свойства и операции

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T \qquad (22)$$

$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T \qquad (23)$$

$$(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A} \qquad (24)$$

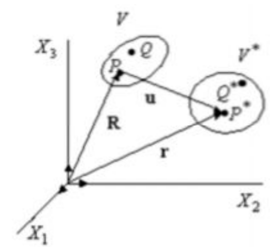
Тензор $\boldsymbol{A}$ называется **симметричным**, если $\quad \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$ (25)

Если $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}^T$, то тензор $\boldsymbol{B}$ называется **антисимметричным**

$$\nabla \boldsymbol{A} \equiv grad\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} & \frac{\partial A_2}{\partial x_2} & \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_3}{\partial x_1} & \frac{\partial A_3}{\partial x_2} & \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$ -тензор

$$\nabla \times \boldsymbol{A} \equiv rot\ \boldsymbol{A} \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$ -вектор

Тензоры деформаций Коши-Грина и Эйлера-Альманзи



Деформация – непрерывное преобразование или отображение недеформированного тела на деформированное.

В общем случае с различными способами описания движения (подход Лагранжа и Эйлера) связаны различные типы деформаций.

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{X} \qquad (1Л3)$$

При лагранжевом описании: $\mathbf{u}(\mathbf{R}) = \mathbf{r}(\mathbf{R}) - \mathbf{R}$ (1)

$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t)$ $\quad X_i$ независимые переменные

При Эйлеровом описании $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - \mathbf{R}(\mathbf{r})$ (2)

$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t)$ $\quad x_i$ независимые переменные

Расстояние между двумя бесконечно близкими точками пространства определяет метрику пространства

При Лагранжевом описании

$$(dS)^2 = dX_i dX_i = \delta_{mn} dX_m dX_n \qquad (3)$$

квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками P и Q

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

При эйлеровом описании

$$(ds)^2 = dx_i dx_i = \delta_{mn} dx_m dx_n \qquad (4)$$

квадрат расстояния между двумя соответствующими точками P* и Q*

качестве меры деформации вводим разность квадратов:

$$(ds)^2 - (dS)^2 \qquad (5)$$

Эйлеровы переменные можем выразить через Лагранжевы:

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3), \qquad dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j$$

а Лагранжевы – через Эйлеровы

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3), \qquad dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$(dS)^2 = dX_i dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_i}{\partial x_n} dx_m dx_n \qquad (6)$$

$$(ds)^2 = dx_i dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \frac{\partial x_i}{\partial X_n} dX_m dX_n \qquad (7)$$

при Лагранжевом описании:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_m} \frac{\partial x_i}{\partial X_n} - \delta_{mn} \right) dX_m dX_n = 2E_{mn} dX_m dX_n \qquad (8)$$

(Из (7) и (3))

$$(dS)^2 = dX_i dX_i \equiv \delta_{mn} dX_m dX_n$$

$$2E_{mn} = \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \frac{\partial x_i}{\partial X_n} - \delta_{mn} = C_{mn} - \delta_{mn} \qquad (9)$$

тензор деформаций Лагранжа-Грина

C_{mn} - мера деформаций Грина

При Эйлеровом описании:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = \left(\delta_{mn} - \frac{\partial X_i}{\partial x_m}\frac{\partial X_i}{\partial x_n}\right) dx_m dx_n = 2e_{mn} dx_m dx_n \qquad (10)$$

Из (4) и (6)

$$(ds)^2 = dx_i dx_i \equiv \delta_{mn} dx_m dx_n \qquad 2e_{mn} = \delta_{mn} - \frac{\partial X_i}{\partial x_m}\frac{\partial X_i}{\partial x_n} = \delta_{mn} - c_{mn} \quad \text{—} \qquad (11)$$

тензор деформаций Эйлера-Альманзи

c_{mn} - мера деформаций Коши

Компоненты этих тензоров можно выразить через перемещения:

Из (1Л3) имеем: $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{X} \Rightarrow x_i = X_i + u_i \Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$

Из (10): $2E_{mn} = \frac{\partial x_i}{\partial X_m}\frac{\partial x_i}{\partial X_n} - \delta_{mn} = \left(\delta_{im} + \frac{\partial u_i}{\partial X_m}\right)\left(\delta_{in} + \frac{\partial u_i}{\partial X_n}\right) - \delta_{mn}$

или

$$E_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial X_n} + \frac{\partial u_n}{\partial X_m} + \frac{\partial u_i}{\partial X_m}\frac{\partial u_i}{\partial X_n}\right)$$

$X_i = x_i - u_i$ $\qquad e_{mn} = \delta_{mn} - \frac{\partial X_i}{\partial x_m}\frac{\partial X_i}{\partial x_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} - \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_n}\right)$

Если ограничиться малыми деформациями и считать производные от перемещений малыми по сравнению с единицей, то тензоры конечных деформаций могут быть линеаризованы:

тензор деформаций Лагранжа-Грина

$$E_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial X_n} + \frac{\partial u_n}{\partial X_m} + \frac{\partial u_i}{\partial X_m}\frac{\partial u_i}{\partial X_n}\right) \qquad E_{mn} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial X_n} + \frac{\partial u_n}{\partial X_m}\right)$$

тензор деформаций Эйлера-Альманзи

$$e_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} - \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_n}\right) \qquad e_{mn} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right)$$

В предположении малости перемещений $\quad X_i \approx x_i \quad$ и $\quad E_{ij} = e_{ij} = \varepsilon_{ij}$