

Лекция 9

Идеальное упругое тело. Закон Гука. Закон Пуассона. Связь технических величин с коэффициентами Ламе. Закон Гука для анизотропного тела.

Уравнения движения и равновесия в линейной теории упругости. Полная система уравнений линейной теории упругости.

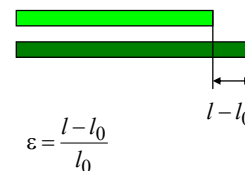
Уравнение теплопроводности для упругого тела. Термодинамические соотношения. Система УРС для термоупругого тела. Соотношения Дюамеля-Неймана. Полная система уравнений термоупругости.

Квазистатические и динамические задачи термоупругости. Автомодельное решение.

1

Закон Гука

В технических расчетах деформацию стержня при растяжении определяют через относительное удлинение



$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Идеальная упругость – однозначная зависимость между силами и вызванными этими силами перемещениями $\sigma = \psi(\varepsilon)$

Для огромного большинства материалов закон упругости с большой точностью можно считать линейным $\sigma = E\varepsilon$ ← **Закон Гука** (1)

E модуль упругости


Закон упругости справедлив, пока напряжения не достигнут некоторого предела, называемого пределом упругости

Для всех материалов, применяемых в технике (кроме резины и каучукообразных полимеров), модуль упругости весьма высок по сравнению с пределом упругости, поэтому величина упругой деформации невелика – не более 1-2 %

2

В общем случае, кроме деформации в направлении растяжения будет происходить и сжатие в поперечном направлении $\varepsilon' = \frac{b - b_0}{b_0}$

Для изотропного материала величина ε' одинакова для всех направлений в поперечном сечении (нет предпочтительного направления). Если деформация – упругая и подчиняется закону Гука, то оказывается, что отношение поперечной деформации к продольной – величина постоянная



$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon = -\nu \frac{\sigma}{E} \quad \text{«Закон» Пуассона (2)}$$

ν коэффициент Пуассона

В трехмерном случае закон Гука для изотропного тела можно представить следующим образом

μ модуль сдвига

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \left(K - \frac{2}{3}\mu \right) \varepsilon_{kk} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \left(K - \frac{2}{3}\mu \right) \varepsilon_{kk} \\ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \left(K - \frac{2}{3}\mu \right) \varepsilon_{kk} \\ \dots \end{cases}$$

3

Учитывая связь

$$\sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk},$$

из (3) найдем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \delta_{ij} \frac{K - \frac{2}{3}\mu}{2\mu} \frac{\sigma_{kk}}{3K} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \delta_{ij} \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk}$$

или

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \quad (7)$$

Обобщенный закон Гука для анизотропного тела:

$$\sigma_{ij} = C_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (8)$$

$C_{ij\alpha\beta}$ тензор четвертого ранга

4

Просуммируем (3) по $i = j$:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{kk} = -3p^e = 3K(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 3K\varepsilon_{kk} \approx 3K \frac{V - V_0}{V_0}$$

По определению $\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p^e} \right)$ K модуль всестороннего сжатия или объемный модуль

Для одноосного растяжения из общей формулы (3) имеем

A $\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\varepsilon_{kk} = 2\mu\varepsilon_{11} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)(1-2\nu)\varepsilon_{11} = E\varepsilon_{11}$ - по закону Гука

B $\begin{cases} 0 = 2\mu\varepsilon_{22} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\varepsilon_{kk} = -2\mu\nu\varepsilon_{11} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)(1-2\nu)\varepsilon_{11} \\ 0 = 2\mu\varepsilon_{33} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\varepsilon_{kk} = -2\mu\nu\varepsilon_{11} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)(1-2\nu)\varepsilon_{11} \end{cases}$ $\begin{matrix} \varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11} \end{matrix}$

Из B находим: $\left(K - \frac{2}{3}\mu\right) = \frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)} = \lambda$ (4) (ввели второй коэффициент Ламе)

\Rightarrow Из A: $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$ (5) (первый коэффициент Ламе)

Отсюда легко находим: $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$, $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ (6) 5

Полная система уравнений линейной теории упругости

Физические соотношения $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$ (11) $\begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta, \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{cases}$ $\begin{matrix} \theta = \varepsilon_{kk} \\ G = \mu \end{matrix}$

Соотношения Коши: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{ij}$ (12) $\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases}$

$\sigma_{ij,j} + \rho F_j = 0$ $\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = 0 \end{cases} \begin{cases} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases}$ (13)

В 15 уравнениях неизвестными являются шесть компонент тензора напряжений, шесть компонент тензора деформаций и три компоненты вектора перемещений, т.е. всего 15 неизвестных

7

Уравнение движения и равновесия:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho F, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e$$

$$v = \left(\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \frac{du_3}{dt} \right), \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = F_1 - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = F_2 - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \right) \\ \frac{dv_3}{dt} &= \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = F_3 - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

В линейной теории упругости малы: перемещения, скорости, деформации. Поэтому с точностью до слагаемых второго порядка малости получаем уравнения в виде:

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_j = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (9) \quad \text{Динамические задачи}$$

Если малы еще и ускорения: $\sigma_{ij,j} + \rho F_j = 0$ (10) Квазистатические задачи 6

При прямом решении задач используются все 15 уравнений.

В некоторых частных задачах, не только для проверки решения, но и для его нахождения, оказываются удобными уравнения совместности деформаций, которые вытекают из геометрических уравнений (т.е., являются их следствием). Иногда их называют уравнениями неразрывности.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \end{aligned} \quad (14)$$

Учебники: Н.И. Бузухов Основы теории упругости, пластичности и ползучести. О.И.Теребушко Основы теории упругости и пластичности. Кац. Теория упругости 8

Уравнения Ламэ и уравнения Бельтрами

Задачи теории упругости можно формулировать и решать в напряжениях и/или в перемещениях в зависимости от того, что в первую очередь требуется определить.

1. В первом случае за неизвестные величины принимаются напряжения. Тогда для нахождения 6 неизвестных функций координат

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$$

нужно иметь шесть уравнений. Из уравнений равновесия эти величины непосредственно не определяются: трех уравнений оказывается недостаточно. И тогда используют уравнения неразрывности, записанные с помощью (11) через напряжения:

$$\begin{aligned} (1+\nu)\Delta\sigma_x + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} &= 0, & (1+\nu)\Delta\sigma_y + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} &= 0, & (1+\nu)\Delta\sigma_z + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} &= 0, \\ (1+\nu)\Delta\tau_{xy} + \frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y} &= 0, & (1+\nu)\Delta\tau_{yz} + \frac{\partial^2 s}{\partial y\partial z} &= 0, & (1+\nu)\Delta\tau_{zx} + \frac{\partial^2 s}{\partial z\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

где $\Delta \dots \equiv \nabla^2 \dots \equiv \frac{\partial^2 \dots}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dots}{\partial z^2}$, $s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

Это и есть **уравнения Бельтрами**

Входящие в общее решение произвольные функции определяем из условий, заданных на поверхностях

Задачи теории упругости можно непосредственно решать в перемещениях. Для этого следует записать уравнения равновесия в перемещениях. Это можно сделать, выразив компоненты тензора напряжений из (11) и (12) через перемещения и подставив их в (13). Окончательные уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + \rho X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v + \rho Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w + \rho Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= 0 \\ &= 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad \theta = \varepsilon_{kk}$$

Это и есть **уравнения Ламе** в теории упругости.

В векторном виде имеем

$$0 = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{F}$$

Аналогичным образом в перемещениях можно представить и краевые условия

10

Плоские статические задачи теории упругости

Плоское напряженное состояние

Если тонкая пластинка нагружена усилиями, приложенными на ее границе параллельно плоскости пластинки и равномерно распределенными по толщине (рис. 1), то компоненты напряжений $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ на обеих поверхностях пластинки равны нулю, и можно предварительно предположить, что они равны нулю и внутри пластинки. Тогда напряженное состояние будет определяться только компонентами $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

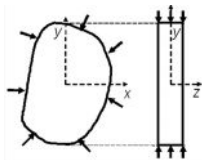


Рис.1

и называется плоским напряженным состоянием. Можно также предположить, что эти компоненты не зависят от z , т.е. не меняются по толщине пластинки, а являются функциями только x и y .

Тензор деформаций в этом случае можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

11

Вся система уравнений в этом случае может быть представлена в виде (без учета массовых сил и сил инерции)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (18)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \equiv \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (19)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

При решении задачи в перемещениях уравнений равновесия достаточно.

Подставляя (18), (19) в (17), приходим к уравнениям Ламе для плоского НС

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] = 0 \end{cases}$$

Это задача о плоском НС в перемещениях.

12

Из уравнений неразрывности деформаций остается одно
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (20)$$

Для задачи в напряжениях представим (20) через напряжения с помощью (19)

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Дифференцируя первое уравнение (17) по x , а второе – по y , а затем складывая их, найдем

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right)$$

В результате для плоской задачи в напряжениях имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) &= 0 \end{aligned}$$

Это и есть **задача о плоском напряженном состоянии в напряжениях** 13

Следовательно, в этом случае задача сводится к нахождению компонент тензора напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} как функций координат x и y , а компонента тензора напряжений σ_z находится из соотношений закона Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_x - \nu(1 + \nu) \sigma_y],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_y - \nu(1 + \nu) \sigma_x],$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy}$$

Это есть **задача о плоской деформации**

Плоская деформация

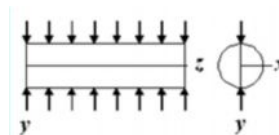
Подобные упрощения возможны и в другом предельном случае, когда размер тела в направлении очень велик. Примером может быть длинное цилиндрическое или призматическое тело, нагруженное силами, которые перпендикулярны продольной оси тела и не меняются по его длине (см. рисунок). Предположим, что концевые сечения ограничены фиксированными гладкими абсолютно жесткими плоскостями, которые препятствуют перемещениям в продольном направлении. В этом случае можно считать, что все поперечные сечения находятся в одних и тех же условиях. Поскольку в каждом поперечном сечении условия одинаковы, достаточно рассмотреть тонкий слой между двумя сечениями, расстояние между которыми – единица. Компоненты вектора перемещений u и v являются функциями только x и y , но не зависят от продольной координаты z . Перемещения $w=0$

Если такое тело, нагружено силами, не меняющимися по всей длине, то

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

и тензор напряжений имеет вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$



Термодинамическая теория

Уравнение Гиббса для простой деформируемой среды:

$$du = Tds + \rho^{-1} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1)$$

Локальным аналогом изменения удельного объема $d\gamma$ будет величина, связанная с изменением диагональных компонент тензора деформаций

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

Как перейти от (1) к термодинамической системе в целом?

Введем гидродинамическое давление по формуле

$$P = -\frac{1}{3} \sigma_{kk}$$

Известно:

$$\frac{V - V_0}{V_0} \approx \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{kk}, \quad |\varepsilon_{ij}| \ll 1$$

$$\sigma_{ij}^e = -p^e \delta_{ij} + S_{ij}^e, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} + e_{ij}$$

$$\rho^{-1} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \rho^{-1} (-p^e \delta_{ij} + S_{ij}^e) d \left(\frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} + e_{ij} \right) \quad (2)$$

Если $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – шаровые тензоры, то

$$\rho^{-1} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = -\rho^{-1} p^e d \frac{\varepsilon_{kk}}{3} = -\rho^{-1} p^e d \varepsilon_{kk} = -p^e d\gamma, \quad d\gamma = \rho^{-1} d\varepsilon_{kk} \quad (3) \quad 16$$

$$du = Tds - p^e d\varepsilon_{kk} \quad (4)$$

Домножив (4) на плотность и проинтегрировав по объему, получим

$$dU = TdS - p^e dV$$

Уравнения Гиббса (1) можно записать и для единицы объема (обозначения оставляем прежними)

$$\begin{aligned} du &= Tds + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \\ df &= -sdT + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

Как мы уже знаем, имеет место система УРС:

$$f = f(T, \varepsilon_{ij}): \quad \begin{cases} ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\varepsilon dT + \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T d\varepsilon_{ij} \\ d\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}\right)_\varepsilon dT + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\right)_T d\varepsilon_{\alpha\beta} \end{cases} \quad (6)$$

$$T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\varepsilon = -T\left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right)_\varepsilon = C_\varepsilon \quad (7)$$

17

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\right)_T = -\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{\alpha\beta}} = C_{ij\alpha\beta}^T \quad \text{изотермические упругие модули}$$

$$u = u(s, \varepsilon_{ij}): \quad \text{найдем} \quad d\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial s}\right)_\varepsilon ds + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\right)_s d\varepsilon_{\alpha\beta} \quad \text{вместо (7)}$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\right)_T = -\frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{\alpha\beta}} = C_{ij\alpha\beta}^s \quad \text{адиабатические упругие модули}$$

Подчеркнутые слагаемые описывают один из самых известных перекрестных эффектов

$$\beta_{ij} = \rho \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T = -\rho \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T}\right) = -\rho \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}}\right) = -\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}\right)_\varepsilon \quad \text{тензор коэффициентов термоупругости}$$

Имеем систему УРС для термоупругого тела

$$\begin{aligned} ds &= \frac{C_\varepsilon}{T} dT + \frac{\beta_{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij}, \\ d\sigma_{ij} &= -\beta_{ij} dT + C_{ij\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (8)$$

Если тело – изотропное, из последнего соотношения имеем:

$$d\sigma_{ij} = 2\mu d\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}[\lambda d\varepsilon_{kk} - Kdw], \quad w = 3\alpha_T(T - T_0) \quad (9)$$

18

Система УРС в общем виде

$$\begin{aligned} ds &= \frac{C_\varepsilon}{T} dT + \frac{\beta_{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij}, \\ d\sigma_{ij} &= -\beta_{ij} dT + C_{ij\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (8)$$

Теория термоупругости

$$d\sigma_{ij} = -\beta_{ij} dT + C_{ij\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}$$

Теория упругости

$$T = \text{const}: \quad d\sigma_{ij} = C_{ij\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad \text{малые деформации}$$

Изотропное тело

$$\begin{cases} d\sigma_{ij} = 2\mu d\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}[\lambda d\varepsilon_{kk} - Kdw], & T = \text{const}: \quad d\sigma_{ij} = 2\mu d\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda d\varepsilon_{kk} \\ w = 3\alpha_T(T - T_0) \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda \varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij}[\lambda \varepsilon_{kk} - 3K\alpha_T(T - T_0)], \quad (10)$$

Это – соотношения Дюамеля Неймана

Это и есть определяющие соотношения линейной теории упругости

19

В общем случае требуется найти распределение температуры. Для этого нужно уравнение теплопроводности

Воспользуемся той же системой УРС (слайд 19)

$$\begin{aligned} ds &= \frac{C_\varepsilon}{T} dT + \frac{\beta_{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij}, \\ d\sigma_{ij} &= -\beta_{ij} dT + C_{ij\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad \text{А}$$

и уравнением энергии в форме $\rho T \dot{s} \equiv \rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T$ (Б) (прошлая лекция)

$$\text{Из (А) следует:} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{C_\varepsilon}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{\beta_{ij}}{\rho} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \rho C_\varepsilon \frac{dT}{dt} + \beta_{ij} T \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T$$

Для изотропного тела получим $\rho C_\varepsilon \frac{dT}{dt} + 3K\alpha_T \delta_{ij} T \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T$

$$\text{или} \quad \rho C_\varepsilon \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T - 3K\alpha_T T \frac{d\varepsilon_{kk}}{dt} \quad (11)$$

Уравнения динамической теории термоупругости

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + \rho F_j = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\ \rho C_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T - 3K\alpha_T T \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} \end{cases}$$

20

В случае малых деформаций плотность перестает быть искомой величиной:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} \varepsilon_{kk}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = -\rho \frac{d\varepsilon_{kk}}{dt} \implies \ln(\rho/\rho_0) = -\varepsilon_{kk}$$

$$\rho = \rho_0 \exp(-\varepsilon_{kk}) \approx \rho_0(1 - \varepsilon_{kk}) \approx \rho_0$$

Квазистатические задачи теории термоупругости:

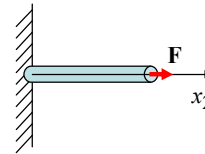
$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + \rho F_j = 0 \\ \rho C_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T - 3K\alpha_T T \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} \end{cases}$$

Выделяют связанные и несвязанные задачи теории термоупругости

21

Примеры задач теории упругости. Квазистатические и динамические задачи термоупругости. Автомодельное решение.

1. Однородная деформация



$p = F/S$ - нормальное к S напряжение
 S - площадь сечения

Однородная деформация – все компоненты тензора деформаций одинаковы по всему объему, т.е. не зависят от координат

В этом случае все компоненты тензора напряжений, кроме σ_{22} , отличны от нуля

На торце единственная компонента вектора нормали, отличная от нуля, это n_2

\implies можно записать граничное условие $\sigma_{22} = p$

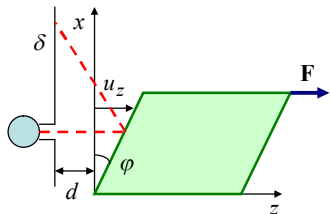
В результате все компоненты тензора деформаций, отличные от нуля, найдем из соотношения закона Гука

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) p$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{3K} \right) p$$

22

2. Определить модуль сдвига из опыта, принципиальная схема которого показана на рисунке



$\sigma_{xz} = \frac{F}{S}$ единственная компонента тензора напряжений, отличная от нуля

Смещение любой точки бруска происходит вдоль оси z ; смещением вдоль других осей можно пренебречь. \implies

$$\begin{aligned} u_x &= u_y = 0 \\ u_z &= x \tan \varphi \approx x\varphi \end{aligned}$$

Из соотношений Коши находим:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \tan \varphi \approx \frac{\varphi}{2}$$

С другой стороны, из закона Гука находим:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{xz} = \frac{1}{2\mu} \frac{F}{S} \implies \mu = 2 \frac{F d}{S \delta}$$

Из рисунка следует: $\tan(2\varphi) \approx 2\varphi = \frac{\delta}{d}$

23

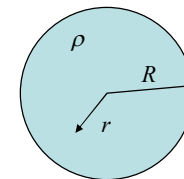
3. Определить деформацию шара под действием собственного веса

Сила тяготения направлена противоположно радиус-вектору $f = -gr/R$

Если шар – изотропное тело, то задача становится симметричной и одномерной.

Выбираем сферическую систему координат:

$$u_\theta = u_\varphi = 0, \quad u_r = u(r)$$



В этих условиях остается единственное уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} - \frac{gr}{R} = 0$$

$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda \varepsilon_{kk}$ Из общих соотношений для компонент тензора деформаций находим:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$$

Остальные компоненты тензора деформаций – равны нулю

$$\sigma_{rr} = 2\mu \varepsilon_{rr} + \lambda [\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}] = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda \frac{u}{r}$$

24

$$\sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda[\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}] = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda\frac{u}{r}$$

$$(1) \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = 2(\mu + \lambda)\frac{u}{r} + \lambda\frac{\partial u}{\partial r}$$

Подставляя напряжения, выраженные через перемещения, в уравнение равновесия и собирая подобные слагаемые, найдем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - 2\frac{u}{r^2} - \frac{gr}{R(\lambda + 2\mu)} = 0$$

или

$$(2) \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2u)\right) = A\frac{r}{R}, \quad A = \rho g \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Г.у.: $u(0) < \infty; \quad (3) \quad \sigma_{rr}(R) = 0 \quad (4)$

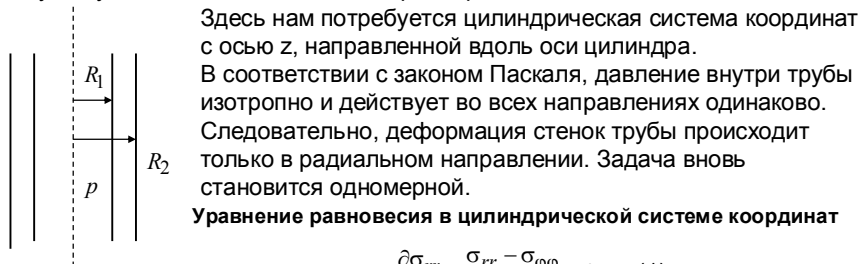
Общее решение уравнения (2): $u(r) = A\frac{r^3}{10R} + C_1\frac{r}{3} + \frac{C_2}{r^2} \quad (5)$

Постоянные интегрирования находим из г.у. $C_2 = 0$

Для того, чтобы воспользоваться вторым условием, этого нам нужно выразить напряжения через деформации из (1)

25

4. Определить деформацию длинной полый цилиндрической трубы, заполненной газом или жидкостью с давлением p . Давление снаружи отсутствует, силой тяжести можно пренебречь.



$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \quad (1)$$

Компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{z\varphi} = \varepsilon_{r\varphi} = 0 \quad (2)$$

Из соотношений Дюамеля-Неймана

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda[\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}] = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\frac{u}{r} \\ \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda[\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}] = (\lambda + 2\mu)\frac{u}{r} + \lambda\frac{\partial u}{\partial r} \\ \sigma_{zz} = \lambda[\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}] = \lambda\left[\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\right] \end{cases} \quad (3)$$

27

Находим:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{3}{10}\frac{Ar^2}{R} + \frac{C_1}{3} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = A\frac{r^2}{10R} + \frac{C_1}{3} \end{cases}$$

подставляем в (1) $\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{3}{10}\frac{Ar^2}{R} + \frac{C_1}{3}\right) + 2\lambda\left(A\frac{r^2}{10R} + \frac{C_1}{3}\right)$

Используя условие (4), находим: $C_1 = -\frac{3}{10}AR\frac{3-\nu}{1+\nu}$

В результате находим:

$$u(r) = -\frac{AR}{10}r\left[\frac{3-\nu}{1+\nu} - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right],$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{AR}{10}\left[3\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{3-\nu}{1+\nu}\right] \quad (6)$$

Следовательно, внутри шара существует недеформированная в радиальном направлении поверхность, где

$$\varepsilon_{rr} = 0$$

Распределения компонент тензора напряжений находим с помощью закона Гука

Используя первые два соотношения (3), из (1), находим

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru)\right) = 0, \quad (4)$$

Г.у.: $\sigma_{rr}(R_1) = -p, \quad \sigma_{rr}(R_2) = 0,$

Общее решение: $u(r) = \frac{1}{2}C_1r + C_2\frac{1}{r} \quad (5)$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{2}C_1 - C_2\frac{1}{r^2},$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = \frac{1}{2}C_1 + C_2\frac{1}{r^2} \quad (6)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{C_1}{2} - (1-2\nu)\frac{C_2}{r^2}\right] \quad (7)$$

28

Подставляя (7) в г.у., приходим к системе уравнений:

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{C_1}{2} - (1-2\nu) \frac{C_2}{R_1^2} \right] = -p, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 2 \frac{p}{E} (1+\nu)(1-2\nu) \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \\ C_2 = \frac{p}{E} (1+\nu) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \end{cases}$$

$$\frac{C_1}{2} - (1-2\nu) \frac{C_2}{R_2^2} = 0$$

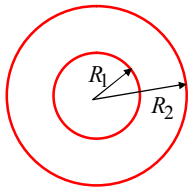
Далее последовательно находим:

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{p}{E} (1+\nu) \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[(1-2\nu)r + \frac{R_2^2}{r} \right], \\ \varepsilon_{rr}(r) &= \frac{p}{E} (1+\nu) \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[(1-2\nu) - \frac{R_2^2}{r^2} \right], \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}(r) &= \frac{p}{E} (1+\nu) \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[(1-2\nu) + \frac{R_2^2}{r^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= \frac{p R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right], \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{rr} \right] \equiv \frac{p R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right], \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \nu (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \equiv \frac{2\nu p R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \end{aligned}$$

6. Найти напряжения в полой цилиндры, вызванные неравномерностью его нагрева. Силой тяжести и внешним давлением пренебрегаем.

$T = T(r)$ - заданная функция



Пренебрегая влиянием торцов, можно считать, что сечения трубы, перпендикулярные к ее оси, остаются плоскими и работают в одинаковых условиях, так что радиальные перемещения зависят только от радиуса, перемещения в направлении угла отсутствуют.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\varphi z} = 0 \quad (1)$$

Относительное удлинение в направлении z пока неизвестно, но гипотеза плоских сечений позволяет считать, что

$$\varepsilon_{zz} = \text{const}$$

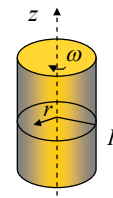
Эта величина будет явно присутствовать во всех формулах и потребует определения на основе дополнительного условия.

Уравнение равновесия – уже знакомо

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \quad (2)$$

Г.у.: $\sigma_{rr}(R_1) = 0, \quad \sigma_{rr}(R_2) = 0, \quad (3) \quad 31$

5. Определить деформацию сплошного цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Силой тяжести пренебречь. Система координат - цилиндрическая



На единицу массы цилиндра в точке с радиус-вектором \mathbf{r} действует центробежная сила

$$\mathbf{f} = \omega^2 \mathbf{r}$$

В соответствии с условиями, деформация цилиндра происходит только в направлении r и только под действием этой силы

Уравнение равновесия: $\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right) = -\rho \omega^2 r \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \quad (1)$

$$u(0) < \infty; \quad \sigma_{rr}(R) = 0$$

$$u(r) = -\rho \omega^2 \frac{r^3}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} + \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r} \quad (2)$$

$C_2 = 0$. Чтобы найти C_1 , поступаем аналогично предыдущему: определяем деформации, подставляем их в соотношение для напряжений, используем внешнее граничное условие, находим C_2 , затем перемещения и т.д.

30

Из соотношений Дюамеля-Неймана найдем

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) - K\omega$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}) - K\omega$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{rr}) - K\omega$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = 0$$

или

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{du}{dr} + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left(\frac{u}{r} + \varepsilon_{zz} \right) - \frac{E}{3(1-2\nu)} \omega \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{u}{r} + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left(\frac{du}{dr} + \varepsilon_{zz} \right) - \frac{E}{3(1-2\nu)} \omega \\ \sigma_{zz} = \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \varepsilon_{zz} + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right) - \frac{E}{3(1-2\nu)} \omega \end{cases} \quad (4)$$

Подставляя первые два соотношения (4) в уравнение равновесия (2), найдем

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\nu}{3} \frac{d\omega}{dr} \quad (5)$$

32

Первый интеграл уравнения (5) есть

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru) = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \omega + C_1 \quad (6)$$

Последующее интегрирование дает

$$u = \frac{1}{3r} \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_{R_1}^r \omega(r) r dr + \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r} \quad (7)$$

или

$$u(r) = \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r} + \frac{\alpha^*}{r} \int_{R_1}^r \theta(r) r dr; \quad \alpha^* = \alpha \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}; \quad \theta = T - T_0 \quad \Rightarrow$$

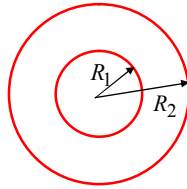
$$\varepsilon_{rr} = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[\omega(r) - \frac{1}{r^2} \int_{R_1}^r \omega(r) r dr \right] + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \int_{R_1}^r \omega(r) r dr + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \quad (8)$$

С помощью (7) из соотношений Дюамеля-Неймана находим:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{1}{(1-2\nu)} \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon - \frac{\alpha^*}{r^2} \int_{R_1}^r r \theta dr \right], \quad \varepsilon = \varepsilon_{zz} \quad (9)$$

Пока у нас три неизвестные постоянные, а условий 2.

33



Еще одним условием будет интегральное условие равновесия:

$$\int_{R_1}^{R_2} \sigma_{zz}(r) r dr = 0 \quad (10)$$

Это условие имеет место для цилиндра со свободными от нагрузки торцевыми поверхностями. Это условие означает, что труба не несет осевой нагрузки. Трех условий достаточно, чтобы найти неизвестные величины

Из (9) и соотношений Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{rr} = -\frac{E}{3(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \int_{R_1}^r \omega(r) r dr + A - \frac{B}{r^2}; \quad (11)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{3(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \int_{R_1}^r \omega(r) r dr - \frac{E}{1-\nu} \frac{\omega}{3} + A + \frac{B}{r^2}$$

$$A = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[\frac{C_1}{2} + \nu \varepsilon \right]; \quad B = \frac{C_2 E}{1+\nu}$$

34

Для осевых напряжений получаем формулу

$$\sigma_{zz} = -\frac{E}{3(1-\nu)} \omega + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} C_1 + \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \varepsilon_{zz} =$$

$$= -\frac{E}{3(1-\nu)} \omega + 2A\nu - E\varepsilon.$$

Воспользовавшись граничными условиями, найдем систему уравнений для определения постоянных A и B

$$A - \frac{B}{R_1^2} = 0$$

$$-\frac{E}{3(1-\nu)} \frac{1}{R_2^2} \int_{R_1}^{R_2} \omega(r) r dr + A - \frac{B}{R_2^2} = 0$$

Следовательно:

$$C_1 = \frac{(1-2\nu)}{2} \alpha^* \theta_m - \nu \varepsilon,$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \alpha^* R_1^2 \theta_m$$

35

$$\theta_m = \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} r \theta dr$$

-среднее значение приращения температуры в пределах поперечного сечения трубы

Для того, чтобы найти осевую деформацию, постоянную для всех сечений трубы, имеем равенство

$$\int_{R_1}^{R_2} \left[-\frac{E}{3(1-\nu)} \omega + 2A\nu - E\varepsilon \right] r dr = 0; \quad \varepsilon = -\omega_{cp}$$

В результате найдем:

$$\sigma_{rr} = \frac{E\alpha}{(1-\nu)} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \right) \theta_m - \frac{1}{r^2} \int_{R_1}^r r \theta dr \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E\alpha}{(1-\nu)} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \right) \theta_m + \frac{1}{r^2} \int_{R_1}^r r \theta dr - \theta \right],$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E\alpha}{(1-\nu)} [\theta_m - \theta]$$

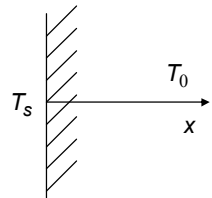
36

Решение задачи термоупругости в форме бегущей волны

Простейшая классическая нестационарная задача теории температурных напряжений формулируется как задача о тепловом ударе

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 3K\alpha_T T \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} \quad (1,a)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} \quad (2)$$



$$x=0: T=T_s \quad u=0 \quad \text{или} \quad \sigma_{11}=0$$

$$x \rightarrow \infty: \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$t=0: T=T_0, u=0 \quad \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} = \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} [\lambda \varepsilon_{kk} - 3K\alpha_T (T - T_0)] \quad (3)$$

$$\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{22} = \sigma_{33} \neq 0, \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$$

Термоупругие волны; температурные напряжения, вызываемые стационарными и нестационарными температурными полями

37

Уравнение движения в деформациях

$$\rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - 3K\alpha_T T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2,a) \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Основные уравнения в перемещениях

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 3K\alpha_T T \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \quad (1,6)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3K\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2,6)$$

$$\omega_0 = \frac{(3K\alpha_T)^2 T_0}{\lambda + 2\mu c_\varepsilon \rho} \quad (3)$$

Линейные задачи термоупругости

$$\omega_0 \ll 1 \quad T = T_0 \left(1 + \frac{T - T_0}{T_0} \right) \approx T_0$$

$$(1,c) \quad \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 3K\alpha_T T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$$

Этим слагаемым во многих случаях можно пренебречь

Решения задач линейной теории хорошо исследованы. Эти решения представляют собой волны, быстро затухающие при удалении от нагреваемой поверхности

38

Пример (задача о тепловом ударе, 1 я краевая задача)

Используя те же уравнения, можем переписать уравнения в напряжениях:

$$\rho c_\sigma \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha_T T \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial t}, \quad c_\sigma = c_\varepsilon + \frac{9\alpha_T^2 T}{\rho}$$

$$\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + \frac{3K}{\lambda + 2\mu} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, \quad \sigma = \sigma_{11}, \quad \theta = T - T_0$$

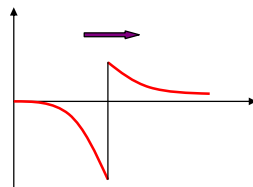
$$\frac{1}{V_l^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2},$$

$$t=0: \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0; T = T_0$$

$$x=0: \sigma = 0; T = T_s$$

Решение удобно представить в виде:

$$s = e^{\tau - \xi} \left[\eta(\tau - \xi) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) \right] - \frac{1}{2} e^{\tau + \xi} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right)$$



39

В связанной нелинейной теории появляются решения типа бегущей волны

$$T_s > T_0$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}, \quad \xi = \frac{x}{x_*}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} \quad (4)$$

$$x_* = \sqrt{\kappa_T t_*}, \quad \varepsilon_* = \frac{3K\alpha_T}{\lambda + 2\mu} (T_s - T_0), \quad \kappa_T = \frac{\lambda_T}{\rho c_\varepsilon}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 3K\alpha_T T \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - 3K\alpha_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \omega(\theta + \sigma) \frac{\partial e}{\partial \tau} \\ \frac{\partial^2 e}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\text{Коэффициент связности отличается от (3).} \quad \omega = \frac{(3K\alpha_T)^2 T_s - T_0}{\lambda + 2\mu c_\varepsilon \rho}, \quad \sigma = \frac{T_0}{T_s - T_0}, \quad \alpha^2 = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\kappa_T}{t_*} = \left(\frac{V_T}{V_l} \right)^2 \quad (6)$$

$$V_T = \sqrt{\frac{\kappa_T}{t_*}}, \quad V_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{E}{1-2\nu}}$$

40

Рассмотрим решения нелинейной системы уравнений, представляющие собой волны с постоянным профилем, движущиеся со скоростью V . Перейдем к координате $X = \xi - V\tau$, полагая, что **волна движется вправо**. Тогда решение типа бегущей волны должно будет удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - V \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - \omega(\theta + \sigma) \left[\frac{\partial e}{\partial \tau} - V \frac{\partial e}{\partial X} \right], \quad \frac{\partial^2 e}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \alpha^2 \left[\frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2} - 2V \frac{\partial^2 e}{\partial \tau \partial X} + V^2 \frac{\partial^2 e}{\partial X^2} \right] \quad (7)$$

«отбрасываем» производные по времени

$$-V \frac{d\theta}{dX} = \frac{d^2 \theta}{dX^2} + \omega(\theta + \sigma) V \frac{de}{dX}; \quad \frac{d^2 e}{dX^2} - \frac{d^2 \theta}{dX^2} = \alpha^2 \frac{d^2 e}{dX^2} \quad (8)$$

$X \rightarrow -\infty: \theta = \theta_1 = 1 \quad X \rightarrow +\infty: \theta = \theta_2 = 0$

Система легко интегрируется:

$$\frac{de}{dX} = \frac{1}{1 - (\alpha V)^2} \frac{d\theta}{dX}, \quad e = \frac{1}{1 - (\alpha V)^2} \theta \quad (9) \quad \text{Подставим первое уравнение (7)}$$

$$-V \left(1 + \frac{\omega}{1 - (\alpha V)^2} (\theta + \sigma) \right) \frac{d\theta}{dX} = \frac{d^2 \theta}{dX^2} \quad (10)$$

При условии $(\alpha V)^2 > 1 \quad (V^2 > \frac{1}{\alpha^2}) \quad (11)$ уравнение (10) совпадает с уравнением Бюргера, записанным в автомодельных переменных

$$U = \omega^{-1} ((\alpha V)^2 - 1 - \omega \sigma), \quad v = \frac{(\alpha V)^2 - 1}{V \omega} \quad (12)$$

После введения этих обозначений придём к уравнению (13)

(13) есть автомодельная форма уравнения (14)

$$-U \frac{d\theta}{dX} + \theta \frac{d\theta}{dX} = v \frac{d^2 \theta}{dX^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \theta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = v \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \quad (14) \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - U \frac{\partial \theta}{\partial X} + \theta \frac{\partial \theta}{\partial X} = v \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}$$

Решения (13) вида $\theta = 1 - \frac{1}{1 + \exp(-X/(2v))}, \quad U = \frac{1}{2} \quad (15)$ существуют при условии $V^2 > (1 + \omega \sigma) / \alpha^2$
 $V_w^2 > V_l^2 (1 + \omega_0)$

Это решение представляет собой слабую ударную волну

Деформации, и напряжения во фронте волны также удовлетворяют уравнениям вида (13)

$$V_l = [(\lambda + 2\mu) / \rho_0]^{1/2}$$

$$V_w = V \sqrt{\kappa_T / t_*}$$

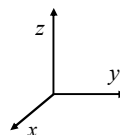
$$\omega_0 = \omega \sigma = \frac{(3K\alpha_T)^2}{\lambda + 2\mu} \frac{T_0}{c_\epsilon \rho}$$

решения уравнения (14) сходятся к ударно-волновым разрывным решениям уравнения $\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \theta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0; \quad (16)$

$U = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2)$
 $\theta_1 > U > \theta_2$
₄₂

Выражения для деформаций через перемещения:

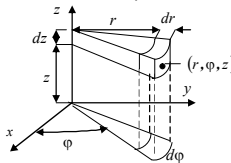
Декартова система координат $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$



$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \epsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right),$$

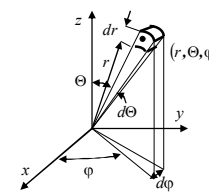
Цилиндрическая система координат $\mathbf{u} = (u_r, u_\phi, u_z)$



$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)$$

$$\epsilon_{r\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\phi}{r} \right) \right), \quad \epsilon_{\phi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} \right),$$

Сферическая система координат $\mathbf{u} = (u_r, u_\phi, u_\theta)$



$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r},$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right),$$

$$\epsilon_{\phi r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \right), \quad \epsilon_{\phi\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_\phi \cot \theta}{r} \right)$$

Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} + K_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{\phi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\phi}}{r} + K_\phi = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + K_z = 0 \end{cases}$$

Уравнения равновесия в сферической системе координат

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{r\phi} \cot \phi}{r} + R_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{3\sigma_{\theta r} + 2\sigma_{\theta\phi} \cot \phi}{r} + R_\theta = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \sigma_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{(\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta}) \cot \phi + 3\sigma_{r\phi}}{r} + R_\phi = 0 \end{cases}$$