Моделирование движения сложных сред

(элементы реологии)

Реология – раздел физики, в котором рассматриваются вопросы деформации и текучести веществ.

Реология как научная дисциплина возникла в 20-30-х годах XX столетия

Она сформировалась во многом трудами и энтузиазмом **Е.Бингама** (E. Bingham), **Г.Скотт-Блэра** (G.Scott-Blair), **В Гершеля** (W.Herschel), **Е. Хатчека** (E.Hatschek), **Е.Кремера** (E.Kraemer), **М.Рейнера** (M.Reiner) и др.

Задачей реологии является установление взаимосвязи между силами, действующими на среду, и вызванными ими деформациями, а также их изменениями во времени.

Деформационное поведение и течение веществ имеют большое значение для определения способности веществ к переработке. Само название реология (от греческого слова ρεο – течь) возникло на учредительном собрании Американского общества реологии 29 апреля 1929 г.

Рейнером были введены в реологию **<u>три аксиомы:</u>**

1.Под действием всестороннего равномерного давления все материалы ведут себя одинаково – они ведут себя как идеально упругие тела.
2.Каждый материал обладает всеми реологическими свойствами, хотя и в различной степени
3.Существует иерархия идеальных тел в соответствии с различным реологическим поведением реальных материалов, причем реологическое уравнение более простого тела (низшего по иерархии) может быть получено из реологического уравнения менее простого тела (высшего по иерархии), если положить какие-либо константы последнего равными нулю.

<u>Феноменологическая реология</u> – исследование связи между входными (напряжениями) и выходными (деформациями) данными. Внутренняя организация среды остается неизвестной.

<u>Концептуальная</u> <u>реология</u> или <u>микрореология</u> выводит реологические соотношения, опираясь на достижения физики и химии. Наиболее развит структурно-кинетический подход

Различают упругую деформацию,
пластическую деформацию,
вязкую деформацию
и всестороннее сжатие

Явления ползучести, сверхпластичности…

При описании реальных сред весьма полезны <u>представления об идеальных телах</u>, проявляющих простейшие реологические свойства: *упругость, пластичность и вязкость* (пример – сталь, пластилин и вода) – тело Гука, тело Сен-Венана, тело Ньютона

По словам Рейнера , реология занимает область между идеально упругими телами и идеальными вязкими жидкостями

Каждый материал характеризуется двумя реологическими уравнениями: одним для объемных деформаций (под действием всестороннего равномерного сжатия) и другим – для деформаций формоизменения (под которыми чаще всего понимают сдвиговые деформации)

Упругость – это способность тела при деформации полностью восстанавливать свою первоначальную форму
Пластичность – это способность тела под действием внешних сил необратимо деформироваться без нарушения сплошности.
Вязкость или внутренне трение – это мера сопротивления течению (смещению слоев).
Прочность – это способность тела воспринимать нагрузку без разрушения и образования остаточной деформации.
Большое внимание в реологии также уделяется и другим физико-механическим свойствам материалов. **Например:**

Твердость – это комплексное свойство «негуковских» тел оказывать сопротивление проникновению другого тела вследствие необратимых (упругой и вязкой) деформаций. Твердость нельзя выразить как физическую величину с однозначной размерностью. Это – техническая характеристика.
Мягкость – свойство, противоположное твердости.
Хрупкость – свойство твердых тел достигать разрушения без пластической деформации. Чисто «гуковские» тела обнаруживают хрупкое разрушение при любой скорости деформации. У «негуковских» тел хрупкое разрушение наступает только при высоких скоростях деформации или низких температурах, когда теряют действие вязкие свойства.
Когезия – сопротивление тела разрушению, связанному с преодолением сил взаимодействия между атомами и молекулами на поверхности раздела. Между работой когезии и работой хрупкого разрушения существует прямая зависимость.
Адгезия – свойство, которое основывается на взаимодействии двух различных тел на границе раздела фаз и вызывает сцепление тел. При разделении тел необходимо преодолеть силы сцепления. Прочность соединения двух тел из различных материалов зависит от площади и состояния поверхности контакта между телами.
Липкость – свойство пограничного слоя вязких или пластичных материалов оказывать сопротивление разделению находящихся в контакте поверхностей. Оно основывается на адгезии материалов на поверхности раздела и когезии самого испытуемого материала.

Прошлые лекции:

Идеальный газ $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad p\gamma = m^{-1}RT$ (1)

Вязкая жидкость: (2) $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}, \quad p = p^e + p^V, \quad S_{ij} = S_{ij}^V = (e_{kl}, T, z_m)$

другие параметры

$$e_{kl} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V_k}{\partial x_l} + \frac{\partial V_l}{\partial x_k}\right] \equiv \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (3)$$

Из термодинамической теории:

$$p^V = -\kappa \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad S_{ij}^V = C_{ijkl} \nabla e_{kl} \quad (4)$$

изотропная среда $S_{ij}^V = 2\mu_1 e_{ij} + \lambda_1 e_{kk}\delta_{ij}$ (5)

$$e_{kk} = \dot{\varepsilon}_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (6)$$

$\zeta = \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1, \quad \zeta' = \lambda_1 + \kappa + \frac{2}{3}\mu_1$ второй коэффициент вязкости

Обобщенный закон Ньютона:

$$\sigma_{ij} = -p^e\delta_{ij} + 2\mu_1 e_{ij} + (\lambda_1 + \kappa) e_{kk}\delta_{ij} = -p^e\delta_{ij} + 2\mu_1 e_{ij} + \left(\zeta' - \frac{2}{3}\mu_1\right) e_{kk}\delta_{ij} \quad (7)$$

Прошлые лекции:

Идеальная (несжимаемая) вязкая жидкость $e_{kk} = \dot{\varepsilon}_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$

$$\sigma_{ij} = -p^e\delta_{ij} + 2\mu_1 e_{ij} \quad (8)$$

Количественно вязкость (или коэффициент μ_1) определяется величиной касательной силы, которая должна быть приложена к единице площади сдвигаемого слоя, чтобы поддержать в этом слое ламинарное течение с постоянной скоростью относительного сдвига, равной единице

Жидкости, которые удовлетворяют обобщенным законам Ньютона, называются ньютоновскими.

Одномерные уравнения движения идеальных газа и жидкости:

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_1}{\partial x} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^e}{\partial x} \quad (9,\text{а})$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_1}{\partial x} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^e}{\partial x} + \frac{\mu_1}{\rho}\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} \quad (9,\text{б})$$

В противном случае имеем неньютоновские жидкости

Зависимость между деформациями, напряжениями и их изменениями во времени называется **реологическим уравнением состояния**

Знание РУС необходимо для решения гидродинамических задач, а также для количественного описания поведения технических материалов при произвольных условиях нагружения. Основное внимание уделяется таким условиям нагружения, когда одновременно проявляются вязкие и пластические или вязкие и упругие свойства вещества.

Простейшие (предельные) РУС - линейные соотношения между деформацией (или скоростью деформации) и напряжением: упругое тело Гука; вязкая жидкость Ньютона-Стокса и пластическое тело Сен-Венана

Упругое тело

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}, \quad p = -\frac{1}{3}\sigma_{kk}, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk} \quad (10)$$

обобщенный закон Гука $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ (11)

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\gamma\varepsilon_{kk} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\left(K - \tfrac{2}{3}\mu\right)\varepsilon_{kk} \quad (12)$$

$\frac{\sigma}{E} = \varepsilon$

Упругая пружина

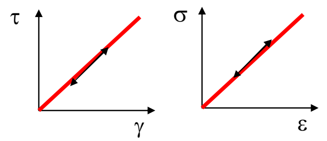
Система уравнений движения $\sigma_{ij,j} = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ (13)

Одномерное уравнение движения $\sigma_{xx,x} = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$ (14)

Пример - стержень: $u_x = u, u_y = u_z = 0; \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x};$

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

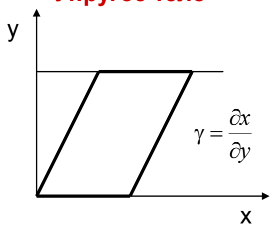


Реологические кривые

Упругое тело Гука обладает только упругими свойствами (упругостью)

Различие между упругим и неупругим поведением наиболее ярко проявляется при сдвиговых деформациях

Упругое тело



$\gamma = \dfrac{\partial x}{\partial y}$

Реологические уравнения

$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}$ (15)

или

$\tau = \mu\gamma$ (16)

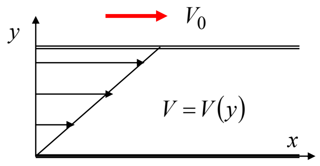
μ - модуль сдвига

$0{,}2 \cdot 10^{16}$ Па, свинец

$8 \cdot 10^{16}$ Па, сталь

$\mu = G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

Вязкая деформация (течение)



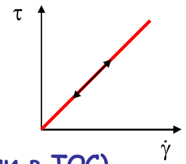
Жидкость Ньютона:
существует сила сопротивления, вызванная трением слоев жидкости друг относительно друга

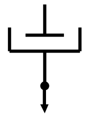
Мерой деформации является не γ, а $\dot{\gamma}$

$$\dot{\gamma} = \frac{dV}{dy} = \frac{d\gamma}{dt}, \quad \tau = \mu_1\dot{\gamma} \qquad (17)$$

$\mu_1 = 10^{-3}$ Па·с (вода) $\mu_1 = 1{,}5$ Па·с (глицерин)

Для вязкой жидкости можно также изобразить реологическую кривую





$\sigma = \mu_1\dot{\varepsilon}$

Вязкая жидкость (вязкий демпфер)

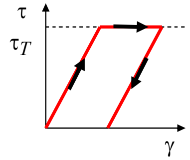
(два этих элемента вводили в ТОС)

Пластическое тело (общий случай):

$$\tau = \begin{cases} \mu\gamma, \gamma \le \dfrac{\tau_T}{\mu} \\ \tau_T, \gamma \le \dfrac{\tau_T}{\mu} \end{cases} \qquad (18)$$

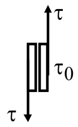
τ_T предел текучести при сдвиге

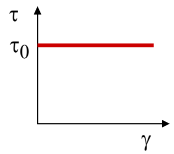
$\tau_T = 3 \cdot 10^7$ Па (*Al*) $\tau_T = 7{,}5 \cdot 10^7$ Па (*Ni*)



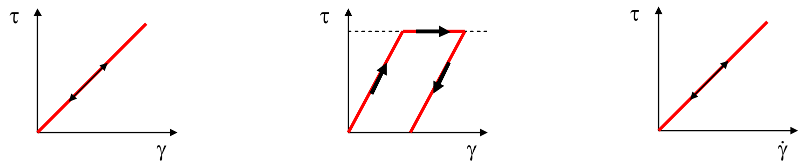
Тело Сен-Венана (Обладает только пластичностью): в зависимости от напряженного состояния возможны разные ситуации:

1. $\tau < \tau_0$ Во всех точках тело не деформируется (не течет)
2. $\tau \ge \tau_0$ Во всех точках тело деформируется (течет)
3. Существуют недеформированные области и области течения





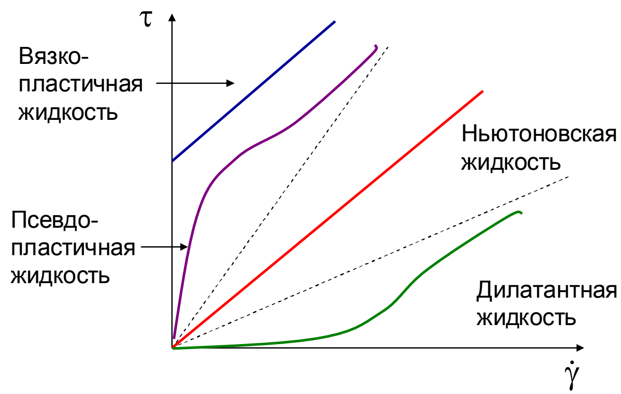
Представленные идеальные тела (их математические модели – реологические уравнения) соответствуют классам веществ, обладающих подобными свойствами и, и являются объектами исследования разных дисциплин: тело Гука – теория упругости; ньютоновская жидкость – гидродинамика; пластическое тело – теория пластичности



Реальные материалы могут сочетать механические свойства, характерные для различных моделей. При достаточно малых напряжениях, деформациях или скорости деформирования все РУС линейны, но при возрастании деформаций или напряжений механическое поведение тела становится более сложным и описывается нелинейными РУС. Соответственно различают линейные и нелинейные тела (среды, материалы).

Примеры неньютоновских (сред) жидкостей:
суспензии, глинистые растворы, масляные краски…

Нелинейно-вязкие жидкости: Вязкопластичные жидкости, псевдопластичные жидкости, дилатантные жидкости



$\tau = f(\dot{\gamma})$ (19)

$\mu_e = \dfrac{\tau}{\dot{\gamma}} = \dfrac{f(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}}$ Эффективная или кажущаяся вязкость

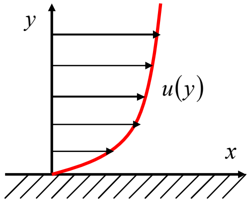
Вязкопластические среды

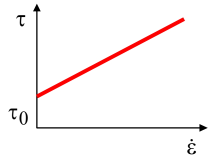
Жидкости, проявляющие наряду с вязкими еще и пластические свойства, – вязкопластические. Существует некоторое напряжение сдвига, после которого начинается течение вещества.
Примеры: зубная паста; глинистые суспензии

Реологические законы вязко-пластических жидкостей связывают с именами Бингама и Шведова

Простейший случай плоского сдвигового прямолинейного движения вдоль оси OX со скоростью сдвига

$$e = \dot{\varepsilon} = \frac{du}{dy}$$





Жидкость ведет себя как твердое тело, если $\tau \le \tau_0$

(20) $\tau = \tau_0 + \mu'\dot{\varepsilon} = \tau_0 + \mu' e, \quad \tau > \tau_0$

предельное напряжение сдвига

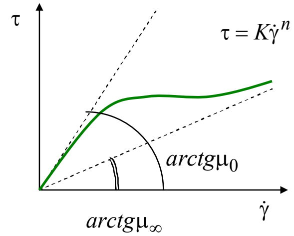
динамический коэффициент структурной вязкости

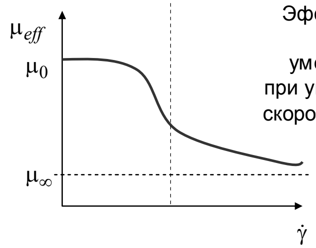
Эффективная вязкость: $\mu_{eff} = \mu + \dfrac{\tau_0}{\dot{\varepsilon}}$ (21)

Псевдопластичные жидкости

Являются истинными жидкостями, так как начинают течь при сколь угодно малых значениях напряжения

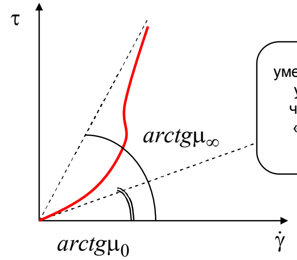
$\tau = K\dot{\gamma}^n$ (22)





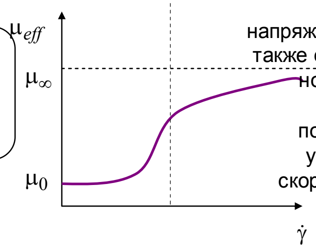
Эффективная вязкость уменьшается при увеличении скорости сдвига

Дилатантные жидкости
(суспензии с большим содержанием твердой фазы)



Дилатансия-уменьшение плотности упаковки твердых частиц при сдвиге, «разбухание» при сдвиговых деформациях

$n < 1$



Предельное напряжение сдвига также отсутствует, но кажущаяся вязкость повышается с увеличением скорости сдвига

Разными авторами предложен целый ряд реологических моделей для более точного описания течений разных сред; 3-12 – истинные жидкости; 13-16 предполагают наличие предельного напряжения сдвига, это – нелинейные вязкопластиные среды.

1. Ньютона $\tau = \mu\dot{\gamma}$
2. Шведова-Бингама $\tau = \tau_0 + \mu\dot{\gamma}$
3. Оствальда-де Ваале $\tau = K\dot{\gamma}^n$
4. Прандтля $\tau = \mathbf{arcsin}(\dot{\gamma}/B)$
5. Пауля-Эйринга $\tau = A\dot{\gamma} + \mathbf{arcsin}(\dot{\gamma}/B)$
6. Рабиновича $\tau = \dfrac{\mu_0}{1 + C\tau^2}\dot{\gamma}$
7. Эллиса $\dot{\gamma} = \varphi_0\tau + \varphi_1\tau^\alpha$
8. Сиско $\tau = a\dot{\gamma} + b\dot{\gamma}^c$
9. Де Хавена $\tau = \dfrac{\mu_0}{1 + C\tau^n}\dot{\gamma}$
10. Рейнера-Филиппова $\tau = \left(\mu_\infty + \dfrac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau/A)^2}\right)\dot{\gamma}$
11. Кросса $\tau = \left(\mu_\infty + \dfrac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \alpha\dot{\gamma}^{2/3}}\right)\dot{\gamma}$
12. Мейера $\tau = \left(\mu_\infty + \dfrac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \left(\dfrac{\tau}{\tau_m}\right)^{\alpha-1}}\right)\dot{\gamma}$
13. Кэссона $\tau = \left(k_0 + k_2\dot{\gamma}^{1/2}\right)^2$
14. Гершеля-Бакли $\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}^{1/2}$
15. Шульмана $\tau = \left[\tau_0^{1/n} + (\mu\dot{\gamma})^{1/m}\right]^n$
16. Реймера $\dot{\gamma} = \sum_{n=0} a_{2n}\tau^{2n+1}$

Среды с нестационарными реологическими свойствами

Многие особенности поведения неньютоновских сред объясняются процессами разрушения и восстановления структурных связей под действие сдвиговых деформаций. Если временем, необходимым для осуществления структурных изменений, можно пренебречь, то можно считать, что эффективная вязкость зависит только от мгновенных значений скорости сдвига, т.е. среда является нелинейно вязкой. В ряде случаев характерные времена структурных перестроек оказываются сравнимыми с характерными временами изменения напряжений. Это приводит к тому, что связь между напряжениями и деформациями становится нестационарной.

Тиксотропные среды: Структура среды при постоянной скорости сдвига постепенно разрушается, что приводит к снижению эффективной вязкости со временем. Процесс обратим.

Стационарный аналог - нелинейные псевдопластичные жидкости

Маргарин, кефир, толстослойные краски…

Реопектические среды Наблюдается постепенное структурообразование при сдвиговых деформациях
пример - гипс

Стационарный аналог - нелинейные дилатантные жидкости

Описание нестационарных процессов в неньютоновских средах

Структурно-кинетическая теория

Прямая и обратная «химическая реакция»

N_0 - число структурных связей в единице объема до разрушения

N_1, N_2 - числа разрушенных и неразрушенных связей

$s_1(t)=\dfrac{N_1(t)}{N_0}=s,\ s_2(t)=\dfrac{N_2(t)}{N_0}=1-s$ - доли связей $\qquad \dfrac{ds}{dt}=f(s,\dot\gamma)$ (23)

Простейший вариант

(24) $\dfrac{ds}{dt}=k_1(\dot\gamma)(1-s)-k_2(\dot\gamma)s$

Примем: $\mu=\mu_0-(\mu_0-\mu_\infty)s$

для $s=0$ $\qquad$ для $s=1$

$\Longrightarrow$

$$\lambda\frac{d\mu}{dt}+\mu=\mu_s \qquad (25)$$

$$\mu_s=\mu_0-(\mu_0-\mu_\infty)\frac{k_1}{k_1+k_2},\ \lambda=\frac{1}{k_1+k_2}$$

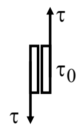
Определяет равновесное (стационарное) значение вязкости, соответствующее данной скорости сдвига

(26) $\Longrightarrow$ $\mu=\mu_s+(\mu_0-\mu_s)\mathbf{exp}(-t/\lambda)$

«обобщение» $\qquad \dfrac{ds}{dt}=k_1(\dot\gamma)(1-s)^n-k_2(\dot\gamma)s^m$ (27)

Механические модели неньютоновских сред

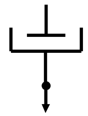
$\tau=\tau_0+\mu'\dot\varepsilon,\quad \tau>\tau_0$



Пластический элемент

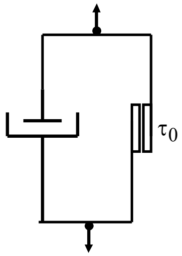
$\dfrac{\sigma}{\mu}=\varepsilon$

Упругая пружина

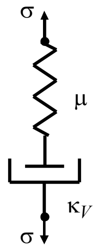


$\sigma=\kappa_V\dot\varepsilon$

Вязкая жидкость (вязкий демпфер)



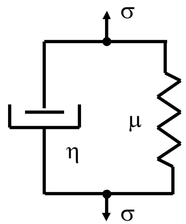
Тело Бингама-Шведова



Модель вязкоупругого тела Максвелла

$$\frac{\dot\sigma}{\mu}+\frac{\sigma}{\kappa_V}=\dot\varepsilon \qquad (28)$$

Последовательное соединение элементов, складываются скорости деформации



Модель упруговязкого тела Фойгта

$$\sigma=\mu\varepsilon+\kappa_V\dot\varepsilon \qquad (29)$$

Параллельное соединение элементов, складываются напряжения

Модель вязкоупругого тела Максвелла $\qquad \dfrac{\dot\tau}{\mu}+\dfrac{\tau}{\kappa_V}=\dot\varepsilon$ (28)

Модель упруговязкого тела Фойгта $\qquad \tau=\mu\varepsilon+\kappa_V\dot\varepsilon$ (29)

Полагая в (28) $\tau=\tau_0=const$, найдем $\qquad \varepsilon=\dfrac{\tau_0}{\mu}\left[1-\mathbf{exp}\left(-\dfrac{\mu t}{\kappa_V}\right)\right]$ (30)

Т.е. имеется запаздывание при росте t установления упругой деформации, равной τ_0/μ

Полагая в (29) $\dot\varepsilon=0$, найдем $\qquad \tau=\tau_0\,\mathbf{exp}\left[-\dfrac{\mu t}{\kappa_V}\right]$ (31)

Это уравнение описывает возвращение с ростом t напряжения к равновесному нулевому значению при отсутствии скорости деформации

$\tau_r=\dfrac{\kappa_V}{\mu}$ время запаздывания в модели Фойгта и время релаксации в модели Максвелла

$\Longrightarrow$ Уравнение (28) $\dfrac{\dot\tau}{\mu}+\dfrac{\tau}{\kappa_V}=\dot\varepsilon$ можно записать следующим образом $\left(\tau_r=\dfrac{\kappa_V}{\mu}\right)$

(Тело Максвелла)

$$\tau_r\dot\tau+\tau=\kappa_V\dot\varepsilon=\kappa_V\frac{dV}{dy} \qquad (32)$$

Если $\tau_r=0$, из (32) имеем обычный закон Ньютона $\qquad \tau=\kappa_V\dfrac{dV}{dy}$ (33)

Уравнение движения в этом случае имеет вид $\qquad \rho\dfrac{\partial V}{\partial t}=\dfrac{\partial\tau}{\partial y},\ V=\dfrac{\partial u}{\partial t}$ (34)

Следовательно, придем к уравнению $\qquad \tau_r\dfrac{\partial^2\tau}{\partial t^2}+\dfrac{\partial\tau}{\partial t}=\kappa_V\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\partial t}$

или $\qquad \dfrac{\partial^2\tau}{\partial t^2}+\dfrac{1}{\tau_r}\dfrac{\partial\tau}{\partial t}=\dfrac{\kappa_V}{\rho\tau_r}\dfrac{\partial^2\tau}{\partial y^2}$ (35)

(Сначала дифференцируем по t (32), а затем по y (34))

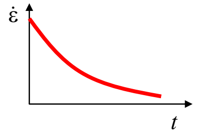
Уравнение гиперболического типа (35) описывает волновое распространение напряжений со скоростью $\qquad w=\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$

Между моделями Фойгта и Максвелла – принципиальная разница.

В модели Фойгта: при действии постоянного напряжения скорость сдвига, следующая из (30), $\rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$

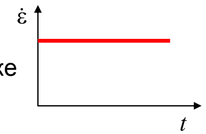
$$\varepsilon = \frac{\tau_0}{\mu}\left[1 - \mathbf{exp}\left(-\frac{\mu t}{\kappa_V}\right)\right] \quad (30) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\tau_0}{\kappa_V}\mathbf{exp}\left(-\frac{\mu t}{\kappa_V}\right)$$

Т.е. тело при действии постоянной нагрузки не обладает свойством постоянной текучести



Тело Максвелла, для которого при $\tau = \tau_0, \dot{\tau} = 0$, удовлетворяет соотношению

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\tau_0}{\kappa_V}$$



Т.е. тело Максвелла будет течь при постоянной нагрузке с постоянной скоростью сдвига

По этой причине тело Фойгта называют наследственным твердым телом, а тело Максвелла – наследственной жидкостью

1.Бибик Е.Е. Реология дисперсных систем / Л.: ЛГУ, 1981. – 172 С.
2.Кузнецов О.А., Волошин Е.В., Сагитов Р.Ф. Реология пищевых масс // Оренбург, 2005. – 106 С
3.Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: Технико-теоретич. лит-ры. – 1962. - 323с.
4.Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. Пер. с англ. Под ред. Ю.М. Бузевича. М.:Мир. - 1978.
5.Реология суспензий, пер. с англ., М., 1975;
6.Виноградов Г. В., Малкин А. Я., Реология полимеров, М., 1980;
7.Урьев Н.Б., Высококонцентрированные дисперсные системы, М., 1980