Лекция 5

Уравнения баланса произвольной величины в интегральной и дифференциальной формах.
Уравнение неразрывности – частный случай уравнений баланса.
Плотность полного потока произвольной величины.
Многокомпонентный континуум.
Уравнения баланса компонентов в различных формах.
Источник в уравнениях баланса компонентов вследствие химических реакций.
Эквивалентность суммы уравнений баланса компонентов уравнению неразрывности.
Уравнение баланса компонента в субстанциональной форме, записанное через массовые доли.
Уравнение баланса импульса. Уравнение движения в форме Коши.
Поток импульса и производство импульса.
Уравнения движения в представлении Эйлера.
Уравнение движения для многокомпонентного континуума.
Уравнения баланса механического момента количества движения

Уравнения баланса произвольной величины в интегральной и дифференциальной формах

Пусть *B=B(M)* – произвольная полевая величина (масса, компонента вектора скорости, энергия …),
b – соответствующая удельная величина (относящаяся к единице массы)
B – распределена в объеме *V*.
Массе компонента *m* соответствует плотность массы (13Л2)

$$\rho(M,t)=\frac{dm}{dV}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Полное изменение произвольной полевой величины

$$B=\int_V \rho b\,dV \quad\Longrightarrow\quad \dot B=\frac{d}{dt}\int_V \rho b\,dV \qquad (1)$$

может быть вызвано двумя причинами: 1.потоком величины *B* внутрь объема и из него через поверхность Ω, ограничивающую этот объем; 2.уменьшением или увеличением этой величины внутри объема вследствие наличия источников и стоков

Эти два положения дают два вида уравнений баланса: в локальной и субстанциональной форме

Пусть объем покоится относительно внешней (Эйлеровой) системы координат (Система координат наблюдателя)

$$\dot B=\frac{d}{dt}\int_{V_0}\rho b\,dV_0=\int_{V_0}\frac{\partial \rho b}{\partial t}dV_0 \qquad (2)$$

Объем $dV_0=dx_1dx_2dx_3$ не меняет положения в этой системе координат

Интенсивность переноса полевой величины *B* в этой системе координат (или локальная плотность потока величины) $\mathbf{J}_b^0=\rho b\mathbf{v}_b$ (3)

Пусть σ_b - плотность внутренних источников и стоков величины *B*

Тогда на основе двух сформулированных положений запишем:

$$\int_{V_0}\frac{\partial \rho b}{\partial t}dV_0=-\oint_{\Omega_0}\mathbf{J}_b^0 d\mathbf{\Omega}_0+\int_{V_0}\sigma_b dV_0 \qquad (4)$$

$d\mathbf{\Omega}_0$ - векторный элемент поверхности, ограничивающей объем

Справедливость этого уравнения нельзя проверить непосредственно ни для одной величины; нельзя доказать или опровергнуть

С помощью **теоремы Гаусса-Остроградского** поверхностный интеграл в (3) можем преобразовать в объемный

$$\oint_{\Omega_0}\mathbf{J}_b^0 d\mathbf{\Omega}_0=\int_{V_0}\nabla\cdot\mathbf{J}_b^0 dV_0;\quad \nabla\cdot\ldots\equiv div\ldots$$

Собираем все слагаемые:

$$\int_{V_0}\left(\frac{\partial \rho b}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}_b^0-\sigma_b\right)dV_0=0 \quad\longrightarrow$$

(так как объем V_0 – произвольный)

Локальная форма дифференциального уравнения баланса

$$\boxed{\frac{\partial \rho b}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}_b^0=\sigma_b} \qquad (5) \qquad \mathbf{J}_b^0=\rho b\mathbf{v}_b$$

В декартовой системе координат:

$$\frac{\partial \rho b}{\partial t}+\frac{\partial J_{bx}^0}{\partial x}+\frac{\partial J_{by}^0}{\partial y}+\frac{\partial J_{bz}^0}{\partial z}=\sigma_b$$

Пример - закон сохранения массы: $B=m \quad b=1 \quad \mathbf{J}^0=\rho\mathbf{v} \quad \sigma_b=0$

(локальное уравнение непрерывности или неразрывности)

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\mathbf{v}=0} \qquad (6)$$

В декартовой системе координат:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho v_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho v_y}{\partial y}+\frac{\partial \rho v_z}{\partial z}=0$$

Если элемент объема движется относительно выбранной системы координат, в элементе объема dV всегда находится один и тот же элемент массы (или частица) dM

Для произвольной величины B введем субстанциональную плотность потока

$$\mathbf{J}_b{}^c = \mathbf{J}_b^0 - \rho b\mathbf{v} = \rho b\mathbf{v}_b - \rho b\mathbf{v} = \rho b(\mathbf{v}_b - \mathbf{v}) \qquad (7)$$

Так как элемент dV все время заполнен одним и тем же веществом, то

$$\dot{B} = \frac{d}{dt}\int_V \rho b\, dV = \int_V \rho \frac{db}{dt} dV = \int_V \rho \dot{b}\, dV \qquad (8)$$

То есть, субстанциональное дифференцирование действует только на величину b .
Это аналогично тому, что в уравнениях Гиббса, записанных вдоль траектории движения центра масс, мы «смело» выносим ρ за знак полной производной.
Покажем справедливость этого равенства:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho b\, dV = \int_V \left(\frac{d\rho b}{dt} dV + \rho b \frac{d}{dt} dV \right) = \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} b\, dV + \rho \frac{db}{dt} + \rho b \nabla\cdot\mathbf{v}\, dV \right) =$$

$$= \int_V \left[\rho \frac{db}{dt} + b\left(\frac{d\rho}{dt} + b\nabla\cdot\mathbf{v} \right) \right] dV = \int_V \rho \frac{db}{dt} dV$$

С этим интегральным законом поступим также как с предыдущим

$$\int_V \rho \dot{b}\, dV = -\oint_\Omega \mathbf{J}_b{}^c d\mathbf{\Omega} + \int_V \sigma_b dV \qquad (9)$$

Субстанциональное уравнение баланса

$$\boxed{\rho \dot{b} + \nabla\cdot\mathbf{J}_b{}^c = \sigma_b} \qquad (10)$$

Так как $\dot{\rho} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\rho$, то $\frac{\partial\rho}{\partial t} = \dot{\rho} - \mathbf{v}\nabla\rho$ и из (6) имеем: $\dot{\rho} - \mathbf{v}\nabla\rho + \nabla\cdot\rho\mathbf{v} = 0$

или $\boxed{\dot{\rho} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0}$ (11) – $\dot{\rho} \equiv \frac{d\rho}{dt}$

субстанциональная форма уравнения неразрывности

Плотность локального (полного) потока произвольной величины не сводится к конвективному потоку и содержит еще одну часть – диффузионный кондуктивный) поток (, тепловой поток и т.д.

$$\mathbf{J}_b = \rho b\mathbf{v} + \mathbf{J}_b{}^c \qquad (12)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} = -\nabla\cdot\left(\rho b\mathbf{v} + \mathbf{J}_b{}^c\right) + \sigma_B \qquad \text{(5,а) - локальная форма}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\mathbf{v} = 0$$

$$\dot{\rho} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

Это – закон сохранения массы в двух различных формах

По аналогии можно утверждать, что величина B сохраняется, если выполняются соотношения:

$$\frac{\partial\rho b}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J}_b = 0 \qquad (13)$$

или

$$\rho\frac{db}{dt} + \nabla\cdot\mathbf{J}_b{}^c = 0 \qquad (14)$$

$\sigma_b \equiv 0$

Покажем справедливость соотношения $\rho \dot{b} = \frac{\partial\rho b}{\partial t} + \nabla\cdot\rho b\mathbf{v}$ (15)

Т.к. $\dot{b} = \frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla b$, то $\rho\dot{b} = \rho\left[\frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla b\right] + b\frac{\partial\rho}{\partial t} - b\frac{\partial\rho}{\partial t} =$

$$= \frac{\partial\rho b}{\partial t} + \rho\mathbf{v}\nabla b - b\frac{\partial\rho}{\partial t} + b\nabla\cdot\rho\mathbf{v} - b\nabla\cdot\rho\mathbf{v} =$$

$$= \frac{\partial\rho b}{\partial t} + \nabla\cdot\rho b\mathbf{v} - b\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\mathbf{v}\right)$$

Выражение в скобках =0 в силу уравнения неразрывности.

Верхний индекс «с» далее опускаем

Многокомпонентный континуум

Пусть $B = M_k$, тогда $b = \frac{\rho_k}{\rho}$, $\mathbf{J}_b^0 = \mathbf{J}_k^0 = \rho_k\mathbf{v}_k$, $\sigma_b = \omega_k$

$$\frac{\partial\rho_k}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J}_k^0 = \omega_k, \quad k = 1,2,...,n \qquad (16)$$

локальное уравнение баланса

Локальный поток включает в себя диффузионный $\mathbf{J}_k$ и конвективный поток $\rho_k\mathbf{v}$:

$$\mathbf{J}_k^0 = \rho_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}) + \rho_k\mathbf{v} \equiv \rho_k\mathbf{w}_k + \rho_k\mathbf{v} = \mathbf{J}_k + \rho_k\mathbf{v} \qquad (17)$$

Субстанциональные уравнения баланса массы имеют вид

$$\dot{\rho}_k + \rho_k\nabla\cdot\mathbf{v} + \nabla\cdot\mathbf{J}_k = \omega_k \qquad (18)$$

и получаются из общего уравнения баланса (10) или из (16) с помощью уравнения (17).

Действительно, т.к. $\dot{\rho}_k = \frac{\partial\rho_k}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho_k$, то $\frac{\partial\rho_k}{\partial t} = \dot{\rho}_k - \mathbf{v}\cdot\nabla\rho_k$

Подставим это в (16): $\frac{\partial\rho_k}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J}_k^0 = \dot{\rho}_k - \mathbf{v}\cdot\nabla\rho_k + \nabla\cdot\rho_k\mathbf{v}_k =$

$$= \dot{\rho}_k - \mathbf{v}\cdot\nabla\rho_k + \nabla\cdot\rho_k\mathbf{v}_k - \rho_k\nabla\mathbf{v} + \rho_k\nabla\mathbf{v} =$$

$$= \dot{\rho}_k + \rho_k\nabla\cdot\mathbf{v} + \nabla\cdot(\rho_k\mathbf{v}_k - \rho_k\mathbf{v}) = \dot{\rho}_k + \rho_k\nabla\cdot\mathbf{v} + \nabla\cdot(\rho_k\mathbf{w}_k) =$$

$= \dot{\rho}_k + \rho_k\nabla\cdot\mathbf{v} + \nabla\cdot\mathbf{J}_k \quad \Rightarrow$ Имеем равенство (16)

Если в системе протекает r химических реакций, то

$$\omega_k = \sum_{i=1}^{r} \nu_{ki} m_k \varphi_i \qquad (19)$$

Для каждой реакции справедливо стехиометрическое соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} \nu_{ki} m_k = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,r \qquad (20)$$

По определению, стехиометрические коэффициенты положительны, если они относятся к продуктам.

В случае единственной реакции вместо (19), (20) имеем

$$\omega_k = \nu_k m_k \varphi, \quad \sum_{k=1}^{n} \nu_k m_k = 0 \qquad (21)$$

Пример:

$$2A + B = C, \; C = A_2 B;$$

$$\nu_A = -2, \nu_B = -1, \nu_C = 1$$

Просуммируем уравнения баланса (16) по всем компонентам:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_k^0 \right) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \nu_{ik} m_k \varphi_i = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i \sum_{k=1}^{n} \nu_{ik} m_k = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n} \rho_k + \nabla \cdot \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{J}_k + \rho_k \mathbf{v}) \equiv 0$$

Т.к. $\sum_{k=1}^{n} \rho_k = \rho_i, \; \mathbf{J}_k^0 = \mathbf{J}_k + \rho_k \mathbf{v}, \quad \sum_{k=1}^{n} \mathbf{J}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \nabla \cdot \rho_k \mathbf{v} \equiv \nabla \cdot \rho \mathbf{v}$

то сумма локальных уравнений баланса компонентов эквивалентна уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

Уравнение неразрывности есть следствие закона сохранения массы, но закона сохранения индивидуального компонента не существует: **компоненты в системе с химической реакцией не сохраняются**!

Уравнение баланса массы удобно записывать через массовые доли

$$\dot{\rho}_k = \frac{d\rho_k}{dt} = \frac{d(C_k \rho)}{dt} = C_k \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dC_k}{dt} = C_k \dot{\rho} + \rho \dot{C}_k$$

Подставим в (18):

$$C_k \dot{\rho} + \rho \dot{C}_k + C_k \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{J}_k = \rho \dot{C}_k + C_k (\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{J}_k =$$

$$= \rho \dot{C}_k + \nabla \cdot \mathbf{J}_k = \omega_k$$

либо

$$\rho \dot{C}_k + \nabla \cdot (\rho C_k \mathbf{w}_k) = \omega_k \qquad (22)$$

Сравним с (16): $\dot{\rho}_k + \rho_k \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{J}_k = \omega_k$

Уравнения баланса импульса

Пусть: V - некоторый индивидуальный (выделенный) объем, движущийся со скоростью ***v***

$\rho \mathbf{v}$ - импульс единицы объема

$\Pi = \int_V \rho \mathbf{v} dV$ - импульс выделенного объема

Покоординатно: $\Pi_i = \int_V \rho v_i dV$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^V + \mathbf{F}^s$$

Результирующая сила, действующая на индивидуальный объем

В соответствии со вторым законом Ньютона, ***изменение в единицу времени полного импульса должно быть равно результирующей всех сил***

$$\frac{d\Pi}{dt} = \mathbf{F}^V + \mathbf{F}^s \qquad (1)$$

1.В соответствии с правилом дифференцирования по подвижному объему (5-й слайд)

$$\int_V \frac{d\Pi_i}{dt}dV = \int_V \left(\frac{d\rho v_i}{dt} + \rho v_i \nabla\cdot\mathbf{v}\right)dV =$$

$$= \int_V \left(\rho\frac{dv_i}{dt} + v_i\underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v}\right)}_{0}\right)dV = \int_V \rho\frac{dv_i}{dt}dV \qquad (2)$$

2. Пусть $\mathbf{f}^V$ - «напряженность» массовых сил

$$F_i^V = \int_V \rho f_i^V dV \qquad (3)$$

3. Результирующая поверхностная сила состоит из сил, действующих со стороны исключенного объема

$$d\mathbf{p}^n = -\boldsymbol{\sigma}^n dA$$

Выделенная элементарная площадка

Вектор напряжений, действующий в поперечном сечении

Результирующая поверхностная сила (по всем площадкам):

$$\int_V \mathbf{F}^s dV = \int_A d\mathbf{p}^n = -\int_A \boldsymbol{\sigma}^n dA$$

или покоординатно

$$\int_V F_i^s dV = -\int_A \boldsymbol{\sigma}_i{}^n dA = -\int_A \boldsymbol{\sigma}_{ik}\underbrace{n_k dA}_{dA_k}$$

σ_{ik} Компонента тензора напряжений представляет собой силу, действующую в направлении *i* на единичную площадку, перпендикулярную оси *k*

По теореме Гаусса-Остроградского:

$$\int_V F_i^s dV = -\int_A \sigma_{ik} dA_k = \int_V \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}dV \qquad (4)$$

$$F_i^s = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} \equiv \sum_{(k)}\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \nabla\cdot\sigma_i$$

Собираем все слагаемые:

$$\int_V \left(\rho\frac{dv_i}{dt} - \rho f_i^V - \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\right)dV = 0$$

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = \rho f_i^V + \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} \qquad (5)$$

или

в векторной форме

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \rho\dot{\mathbf{v}} = \rho\mathbf{f}^V + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} \qquad (6)$$

Объемная сила

Поверхностная сила

Это и есть ***уравнение баланса импульса в субстанциональной форме,*** совпадающее по форме с уравнением движения, принадлежащим Коши; (6) есть закон Ньютона для единичного объема сплошной среды

Поток импульса $\quad J_{imp} = -\boldsymbol{\sigma}$

Производство импульса $\quad \sigma_{imp} = \rho\mathbf{f}^V$

Уравнение движения в локальной форме легко получается из (5) или (6), если учесть, что

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Характеризует изменение скорости среды в фиксированной точке пространства

Характеризует различие скоростей в разных точках в фиксированный момент времени

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = \rho f_i^V + \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

или

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} - v_i\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\sigma_{ik} + \rho v_i v_k\right) = \rho f_i^V \qquad (7)$$

В векторной форме можем записать: $\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v}\nabla\mathbf{v}\right) + \nabla\cdot\left(-\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{v}\mathbf{v}\right) = \rho\mathbf{f}^V$

Складываем последнее с уравнением неразрывности (6), умноженным на вектор скорости

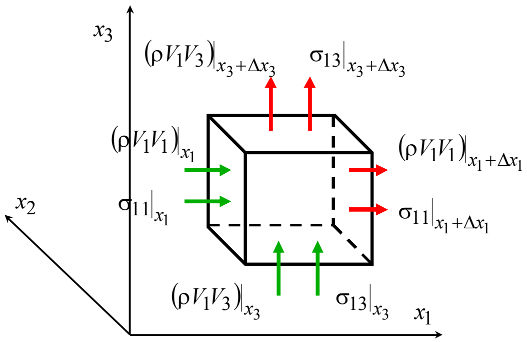
$$\boxed{\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla\cdot\left(-\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{v}\mathbf{v}\right) = \rho\mathbf{f}^V} \qquad (8)$$

Это есть ***уравнения движения сплошной среды в представлении Эйлера*** (но не = уравнениям Эйлера) или в локальной форме

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\mathbf{v} = 0 \qquad (6)$$

$\mathbf{J}_{imp}^0 = -\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{v}\mathbf{v}$ локальная плотность потока импульса

Физический смысл этого уравнения и каждого его слагаемого становится более очевидным, если рассмотреть не индивидуальный, а фиксированный объем среды



Скорость изменения количества движения	=	Скорость поступления количества движения	-	Скорость отвода количества движения	+	Сумма сил, действующих на элемент объема

Черняк В.Г., Суетин П.Е. Механика сплошных сред, М.: ФИЗМАТЛИТ, . – 2006. – 352 С.

Многокомпонентный континуум

Для каждого компонента среды (континуума) мы можем записать подобное уравнение:

$$\rho_k \frac{d^{(k)}\mathbf{v}_k}{dt} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}_k = \rho_k\mathbf{F}_k + \rho_k\mathbf{F}_k^{*} \qquad (9)$$

внешняя сила, действующая на единицу массы го континуума

внутренняя сила, появляющаяся из-за наличия других компонентов

есть субстанциональная производная по времени, относящаяся к k-му компоненту среды

есть тензор напряжения k-го континуума

Общее уравнение баланса импульса (6) будет справедливо и в этом случае, если принять:

$$\mathbf{F} = \rho^{-1}\sum_{k=1}^{n}\rho_k\mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^{n}C_k\mathbf{F}_k \qquad (10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{\sigma}_k + \rho_k\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k\right) \qquad (11)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\rho_k\mathbf{F}_k^{*} + \sigma'_k\mathbf{v}_k\right) = 0 \qquad (12)$$

σ'_k - источники компонентов

$\mathbf{w}_k$ - диффузионные скорости

Справедливость этого утверждения можно показать, пользуясь операторными соотношениями

$$\frac{d^{(k)}B}{dt} = \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_k\cdot\nabla B$$

$$\frac{dB}{dt} = \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v}\cdot\nabla B$$

$\mathbf{v}_k\cdot\nabla B$ есть мера изменения полевой величины ***B*** вследствие конвекции k-го компонента со скоростью $\mathbf{v}_k$

Вычтем из первого операторного уравнения второе:

$$\frac{dB}{dt} - \frac{d^{(k)}B}{dt} = \mathbf{w}_k\cdot\nabla B \qquad (13)$$

Если под величиной B понимать компоненту вектора скорости к-го континуума

$$B = \mathbf{v}_{k,\alpha} \quad \alpha = 1,2,3$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^{(k)}\mathbf{v}_k}{dt} = \dot{\mathbf{v}}_k + (\mathbf{w}_k\cdot\nabla)\mathbf{v}_k, \quad k = 1,2,\dots,n$$

подставим в (9):

$$\rho_k \frac{d^{(k)}\mathbf{v}_k}{dt} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}_k = \rho_k\mathbf{F}_k + \rho_k\mathbf{F}_k^{*} \quad (9) \Longrightarrow \rho_k\dot{\mathbf{v}}_k + \underline{(\rho\mathbf{w}_k\cdot\nabla)\mathbf{v}_k} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}_k = \rho_k\mathbf{F}_k + \rho_k\mathbf{F}_k^{*}$$

Так как $\rho\mathbf{w}_k = \mathbf{J}_k$ и $\nabla\cdot(\mathbf{J}_k\mathbf{v}_k) = \mathbf{v}_k(\nabla\cdot\mathbf{J}_k) + (\mathbf{J}_k\cdot\nabla)\mathbf{v}_k \Longrightarrow$

Из у-й движения ***k***-х компонентов

$$\rho_k\dot{\mathbf{v}}_k + \nabla\cdot\left(-\boldsymbol{\sigma}_k + \underline{\mathbf{v}_k\mathbf{J}_k}\right) = \rho_k\mathbf{F}_k + \rho_k\mathbf{F}_k^{*} + \underline{\mathbf{v}_k(\nabla\cdot\mathbf{J}_k)} \qquad (14)$$

Суммируем и используем принцип суперпозиции :

Дифференцируем по времени

$$\rho\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n}\rho_k\mathbf{v}_k \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\rho_k\dot{\mathbf{v}}_k = \rho\dot{\mathbf{v}} + \dot{\rho}\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{n}\dot{\rho}_k\mathbf{v}_k \Longrightarrow$$

подставим в Σ(14)

$$\rho\dot{\mathbf{v}} + \underline{\dot{\rho}\mathbf{v}} - \sum_{k=1}^{n}\underline{\dot{\rho}_k\mathbf{v}_k} + \nabla\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(-\boldsymbol{\sigma}_k + \mathbf{v}_k\mathbf{J}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\rho_k\mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^{n}\rho_k\mathbf{F}_k^{*} + \sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}_k(\nabla\cdot\mathbf{J}_k)$$

Теперь воспользуемся субстанциональными уравнениями баланса масс

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{v} \quad \text{и} \quad \frac{d\rho_k}{dt} = \omega_k - \rho_k\nabla\cdot\mathbf{v} - \nabla\cdot\mathbf{J}_k$$

(подставляем в подчеркнутые слагаемые) и соотношениями (определениями)

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}, \quad \mathbf{J}_k = \rho_k\mathbf{w}_k = \rho_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}), \quad \sum_{k=1}^{n}\mathbf{J}_k = \sum_{k=1}^{n}\rho_k\mathbf{w}_k = \sum_{k=1}^{n}\rho_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}) = 0$$

Находим:

$$\rho\dot{\mathbf v}-\underline{(\rho\nabla\cdot\mathbf v)\mathbf v}-\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\omega_k-\underline{\rho_k\nabla\cdot\mathbf v}-\nabla\cdot\mathbf J_k\right)\mathbf v_k\right)+\nabla\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(-\boldsymbol\sigma_k+\underline{\mathbf v_k\mathbf J_k}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\rho_k\mathbf F_k+\sum_{k=1}^{n}\rho_k\mathbf F_k^{*}+\underline{\sum_{k=1}^{n}\mathbf v_k\left(\nabla\cdot\mathbf J_k\right)}$$

(подчеркнутые слагаемые взаимно уничтожаются)

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf J_k\mathbf v_k=\sum_{k=1}^{n}\rho_k(\mathbf v_k-\mathbf v)\mathbf v_k=\sum_{k=1}^{n}\rho_k\mathbf w_k\mathbf v_k\equiv$$

$$\equiv\sum_{k=1}^{n}\rho_k\mathbf w_k(\mathbf v_k-\mathbf v)+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\rho_k\mathbf w_k\mathbf v}_{=0}\equiv\sum_{k=1}^{n}\rho_k\mathbf w_k\mathbf w_k.$$

окончательно

$$\rho\dot{\mathbf v}+\nabla\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}\left(-\boldsymbol\sigma_k+\rho\mathbf w_k\mathbf w_k\right)\right]=\sum_{k=1}^{n}\rho_k\mathbf F_k+\sum_{k=1}^{n}\left(\rho_k\mathbf F_k^{*}+\omega_k\mathbf v_k\right)$$

Что при условиях (10) – (12) совпадает с (6) $\rho\frac{d\mathbf v}{dt}\equiv\rho\dot{\mathbf v}=\rho\mathbf f^V+\nabla\cdot\boldsymbol\sigma$

Уравнение баланса момента количества движения

Определим момент количества движения относительно Эйлеровой системы координат:

$$\mathbf M^e=\mathbf r\times\mathbf v$$

$$\mathbf r:\ (x_1,x_2,x_3)$$

Частный случай F=0 $\quad \rho\frac{d\mathbf v}{dt}\equiv\rho\dot{\mathbf v}=\nabla\cdot\boldsymbol\sigma \quad$ (13)

Умножим уравнение движения на **r** слева (векторно):

$$\rho\frac{d\mathbf M}{dt}\equiv\rho\dot{\mathbf M}=\mathbf r\times\nabla\cdot\boldsymbol\sigma$$

Так как $\boxed{\mathbf r\times\nabla\cdot\boldsymbol\sigma=\nabla\cdot(\mathbf r\times\boldsymbol\sigma)+\boldsymbol\sigma^T-\boldsymbol\sigma}$ (14)

Попробуйте показать справедливость равенства (14) самостоятельно

или $x_i\frac{\partial\sigma_{jk}}{\partial x_j}-x_k\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_i\sigma_{jk}-x_k\sigma_{ji}\right)+\sigma_{ki}-\sigma_{ik}$

(т.е. (14) – это три равенства, **i**=1,2,3; суммирование идет по *j,k*)

$\boldsymbol\sigma^T-\boldsymbol\sigma=0$, если тензор напряжений - несимметричный

$\boldsymbol\sigma^T-\boldsymbol\sigma=2\mathbf S^a\neq0,$ если тензор напряжений – несимметричный!

Уравнение баланса момента количества движения

Лекция 3:

$$\boldsymbol\sigma=-p\boldsymbol\delta+\mathbf S\equiv\boldsymbol\sigma^0+\mathbf S,\qquad p=-\sigma_0=-\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}),\qquad s_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma_0\delta_{ij}$$

$$\boldsymbol\delta=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix},$$

В свою очередь: $\quad \mathbf S=\mathbf S^s+\mathbf S^a$

$$S^s{}_{ij}=\frac{1}{2}\left(S_{ij}+S_{ji}\right),\quad S^s_{ij}=S^s_{ji},\quad i,j=1,2,3$$

$$S^a{}_{ij}=-\frac{1}{2}\left(S_{ij}-S_{ji}\right),\quad S^a_{ij}=-S^a_{ji},\quad i,j=1,2,3$$

Аналогично антисимметричной части тензора деформаций

$$\mathbf S^a=\begin{Vmatrix}0&-S_3^a&S_2^a\\S_3^a&0&-S_1^a\\-S_2^a&S_1^a&0\end{Vmatrix}$$

$$S_1^a=\frac{S_{23}^a-S_{32}^a}{2},\qquad S_2^a=\frac{S_{31}^a-S_{13}^a}{2},\qquad S_3^a=\frac{S_{12}^a-S_{21}^a}{2}$$

антисимметричный тензор эквивалентен так называемому аксиальному вектору с компонентами

$$S_1^a,\ S_2^a,\ S_3^a$$

Здесь использованы соотношения (Л2, слайд 18 + Л3 и Л4)

$$\boldsymbol\sigma-\boldsymbol\sigma^T=\begin{Vmatrix}0&\sigma_{12}-\sigma_{21}&\sigma_{13}-\sigma_{31}\\-\sigma_{12}+\sigma_{21}&0&\sigma_{23}-\sigma_{32}\\-\sigma_{13}+\sigma_{31}&-\sigma_{23}+\sigma_{32}&0\end{Vmatrix}=-2\begin{Vmatrix}0&-S_3^a&S_2^a\\S_3^a&0&-S_1^a\\-S_2^a&S_1^a&0\end{Vmatrix}=-2\mathbf S^a$$

$\nabla\cdot\boldsymbol\sigma=\mathbf d$ - вектор с компонентами:

$$d_1=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3},$$

$$d_2=\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3},$$

$$d_3=\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}$$

$\mathbf r\times\mathbf d=\mathbf r\times\nabla\cdot\boldsymbol\sigma$ это тоже «вектор»:

$$\mathbf r\times\mathbf d=\begin{vmatrix}\mathbf i&\mathbf j&\mathbf k\\x_1&x_2&x_3\\d_1&d_2&d_3\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf i(x_2d_3-x_3d_2)+\mathbf j(x_3d_1-x_1d_3)+\mathbf k(x_1d_2-x_2d_1)$$

В результате получим уравнение баланса момента количества движения в субстанциональной форме

$$\rho\frac{d\mathbf{M}^e}{dt} \equiv \rho\dot{\mathbf{M}}^e = -\nabla\cdot\left(-\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma}\right) + 2\mathbf{S}^a \qquad (15)$$

$\mathbf{J}_M = -\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma}$ - субстанциональная плотность механического момента количества движения

${\sigma_M}^i = 2\mathbf{S}^a$ внутренний источник момента импульса

Определим ***локальную плотность момента количества движения:***

$$\mathbf{J}_M^0 = -\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{M}^e\mathbf{v} \qquad (16)$$

$\rho\mathbf{M}^e V_j$ плотность конвективного потока механического момента количества движения или вектор с компонентами $M_1 \mathrm{v}_j,\ M_2 \mathrm{v}_j,\ M_3 \mathrm{v}_j,$

$$\frac{\partial\left(\rho\mathbf{M}^e\right)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(-\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{M}^e\mathbf{v}\right) = 2\mathbf{S}^a \qquad (17)$$

Очевидно, что плотность источника момента количества движения равна нулю тогда и только тогда, когда тензор напряжений является симметричным, т.е. имеет место закон сохранения внутреннего момента количества движения, если $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$

$$\rho\frac{d\mathbf{M}^e}{dt} \equiv \rho\dot{\mathbf{M}}^e = \rho\left(\frac{\partial\mathbf{M}^e}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\mathbf{M}^e\right) = -\nabla\cdot\left(-\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma}\right) + 2\mathbf{S}^a$$

$$\rho\frac{\partial\mathbf{M}^e}{\partial t} = \frac{\partial\rho\mathbf{M}^e}{\partial t} - \mathbf{M}^e\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\rho\mathbf{M}^e}{\partial t} - \mathbf{M}^e\left(-\nabla\cdot\rho\mathbf{v}\right)$$

Из уравнения неразрывности

В результате получим (17)