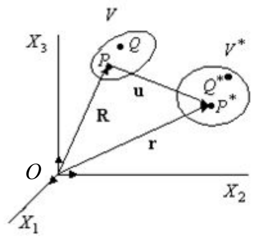
Лекция 3

Теория напряжений и деформаций в континуальной механике (продолжение)

Перемещения и деформации



От приложенной нагрузки тело деформируется. Точка P переходит в точку P*, а точка Q – в точку Q*

Полное перемещение точки P:

$$\overrightarrow{PP^*} = \overrightarrow{OP^*} - \overrightarrow{OP}$$

Вектор перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$ (1)

Компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}:\ u_1, u_2, u_3$

Компонента вектора перемещений положительна, если ее направление совпадает с направлением соответствующей координатной оси

Покомпонентная запись (1): $u_i = x_i - X_i, \quad i = 1,2,3$ (2)

Перемещение точки Q в общем случае не будет совпадать с перемещением точки P. Эти перемещения будут отличаться на некоторую малую величину d**u**

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) + d\mathbf{u} \qquad (3)$$

$$u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + du_i \qquad (4)$$

$d\mathbf{u}$ вектор относительного смещения

Ряд Тейлора: $$u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) \approx u_i(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \equiv u_i(\mathbf{r}) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \qquad (5)$$

$|\partial u_i / \partial x_k| << 1$ относительные смещения малы по сравнению с абсолютными значениями смещений!

<u>Сравниваем (4) и (5):</u>

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = A_{ik} dx_k \qquad (6)$$

A_{ik} ***Тензор относительной деформации*** точки Q относительно точки P ***или тензор дисторсии***
Компоненты этого тензора есть функции координат и времени!

Тензор дисторсии может быть представлен в виде суммы двух тензоров:

(7) $$A_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} + A_{ki}) + \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}) = \varepsilon_{ik} + \varphi_{ik}$$

Симметричная часть:

Т.е., этот тензор, по определению, - симметричен (8) $$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} + A_{ki}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$ Тензор малых деформаций Коши

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$$

А этот – антисим-метричен (9) $$\varphi_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$ Тензор малых поворотов

$$\varphi_{ik} = -\varphi_{ki}$$

Разложение тензора малых деформаций

Как и всякий тензор, тензор деформаций можно представить в виде суммы двух тензоров:

Шаровой тензор

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{3}\varepsilon_0 \delta_{ij} \qquad (10)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \qquad (11)$$

Девиатор тензора деформаций

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{Bmatrix} \qquad (12)$$

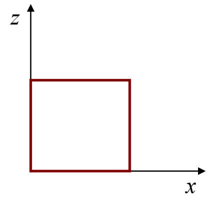
$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij} \qquad (13)$$

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{bmatrix} \qquad (14)$$

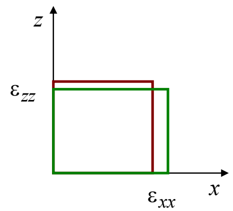
$$e_{11} = \varepsilon_{11} - \varepsilon_0$$
$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}$$
....

Тензор малых деформаций Коши

Компоненты тензора малых деформаций Коши допускают простую геометрическую интерпретацию:

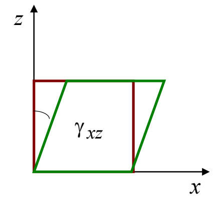


Тело до деформации



$$\varepsilon_{xx} \approx \frac{\Delta dx}{dx}$$

Растяжение-сжатие

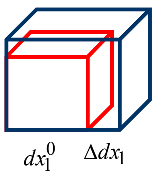


$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx}$$

сдвиг

Углы сдвига – малые изменения первоначально прямых углов

Изменение объема при деформации



Размеры тела до деформации: $dx_1^0, \; dx_2^0, \; dx_3^0$

Его объем: $V^0 = dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0$ (14)

Размеры тела после деформации:

$dx_1, \; dx_2, \; dx_3$ и $V = dx_1\, dx_2 dx_3$

или: $V = \left(dx_1^0 + \Delta dx_1\right) \cdot \left(dx_2^0 + \Delta dx_2\right) \cdot \left(dx_3^0 + \Delta dx_3\right)$ (15)

Находим изменение объема:

$$\Delta V = V - V^0 = dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0 \left(1 + \frac{\Delta dx_1}{dx_1^0}\right)\left(1 + \frac{\Delta dx_2}{dx_2^0}\right)\left(1 + \frac{\Delta dx_3}{dx_3^0}\right) - dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0 =$$
$$= V_0\left[(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}) - 1\right] = \qquad (16)$$
$$= V_0\big(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + \underbrace{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}}_{\text{Малые слагаемые}}\big)$$

Инварианты!!!

(17) $$\frac{V - V_0}{V_0} \approx \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{kk}, \qquad \left|\varepsilon_{ij}\right| << 1$$

Эта величина относительного изменения объема не зависит от выбора системы координат!

Иначе:

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{kk}{}^0 = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} =$$
$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{u} \qquad (18)$$

Если деформация происходит без изменения объема:

(19) $$\varepsilon_{kk}{}^0 = 0; \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Условие несжимаемости для деформируемой среды

Условие несжимаемости в МЖГ: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ (20)

Уравнение (16) в общем случае: $\Delta V = V_0(I_1 + I_2 + I_3)$ (21)

Инварианты тензора деформаций:

$$I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{kk}$$
$$I_2 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11}$$
$$I_3 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}$$

Инварианты тензора напряжений определяем аналогично

Вектор поворота

Пусть $\varepsilon_{ij} = 0$

Тогда деформация элемента определяется тензором вида:

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \qquad \text{или}$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & 0 & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 0 \end{Vmatrix}$$

Это –антисимметричный тензор, включающий только три независимые компоненты:

$$\begin{aligned} \varphi_{32} &= -\varphi_{23} = \varphi_1 \\ \varphi_{13} &= -\varphi_{31} = \varphi_2 \\ \varphi_{21} &= -\varphi_{12} = \varphi_3 \end{aligned} \qquad (22)$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (23)$$

Найдем компоненты вектора смещений: $du_i = \varphi_{ik} dx_k$

$$\begin{aligned} du_1 &= -\varphi_3 dx_2 + \varphi_2 dx_3 \\ du_2 &= \varphi_3 dx_1 - \varphi_1 dx_3 \\ du_3 &= -\varphi_2 dx_1 + \varphi_1 dx_2 \end{aligned} \qquad (24)$$

или:

$$d\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} \times d\mathbf{r}$$

φ вектор поворота

$$\varphi_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = -\varphi_3 = -\frac{1}{2}\mathbf{rot}_3\,\mathbf{u}$$

$$\varphi_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = -\varphi_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{rot}_1\,\mathbf{u}$$

$$\varphi_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = -\varphi_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{rot}_2\,\mathbf{u}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\mathbf{rot}\,\mathbf{u} \qquad (25)$$

<u>Всякий симметричный тензор</u> можно привести к главным осям

(Тензор напряжений, тензор деформаций Коши)

Т.е. существует такая система координат $x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0$

в которой этот тензор принимает диагональный вид

Например:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^0 \end{Bmatrix}$$

$x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0$ главные оси

$\varepsilon_{11}^0,\ \varepsilon_{22}^0,\ \varepsilon_{33}^0$ главные значения тензора деформаций

Относительные деформации в главных осях:

$$du_1^0 = \varepsilon_{11}^0\, dx_1^0,\ du_2^0 = \varepsilon_{22}^0\, dx_2^0,\ du_3^0 = \varepsilon_{33}^0\, dx_3^0$$

Т.е. главные деформации описывают локальное растяжение или сжатие всего элемента объема в направлении главных осей.

Геометрические свойства малых деформаций

1. Точки элемента объема тела, находящиеся до деформации в одной плоскости, после линейной деформации также расположатся в одной плоскости.

Действительно, уравнение плоскости в главных осях:

$$ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d = 0 \qquad (1)$$

Т.к. деформации - линейные, то новые координаты будут связаны со старыми соотношениями вида

$$x_1^{0'} = x_1^0 + \varepsilon_{11}^0 x_1^0,\ x_2^{0'} = x_2^0 + \varepsilon_{22}^0 x_2^0,\ x_3^{0'} = x_3^0 + \varepsilon_{33}^0 x_3^0 \qquad (2)$$

Поэтому после деформации новые компоненты точек тоже будут удовлетворять уравнению плоскости (в общем случае, другой):

$$\frac{a}{1+\varepsilon_{11}^0} x_1^{0'} + \frac{b}{1+\varepsilon_{22}^0} x_2^{0'} + \frac{c}{1+\varepsilon_{33}^0} x_3^{0'} + d = 0, \qquad (3)$$

причем результат справедлив для любой системы координат

2. (Следствие первого свойства) Точки, лежавшие на одной прямой до деформации, после деформации также располагаются на некоторой прямой

3. Две параллельные до деформации плоскости в элементе объема останутся параллельными и после деформации.

Имеем две плоскости
$$ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d = 0$$
$$Ax_1^0 + Bx_2^0 + Cx_3^0 + D = 0 \qquad (4)$$

Они параллельны, если
$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} \qquad (5)$$

После деформации координаты точек примут вид (2). $\Rightarrow$
Дополнительно к (3) найдем:
$$\frac{A}{1+\varepsilon_{11}^0} x_1^{0'} + \frac{B}{1+\varepsilon_{22}^0} x_2^{0'} + \frac{C}{1+\varepsilon_{33}^0} x_3^{0'} + D = 0$$

Очевидно, что условия (5) выполняются

4. (Следствие 3-го.)

Две параллельные прямые, проведенные в элементе объема до деформации, останутся параллельными и после деформации.

5. Рассмотрим в элементе объема сферу единичного радиуса, центр которой находится в начале координат. Уравнение сферы в главных осях:
$$(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 + (x_3^0)^2 = 1 \qquad (6)$$

После деформации точки будут иметь координаты (2), следовательно, они окажутся на поверхности, описываемой уравнением
$$\frac{(x_1^{0'})^2}{(1+\varepsilon_{11}^0)^2} + \frac{(x_2^{0'})^2}{(1+\varepsilon_{22}^0)^2} + \frac{(x_3^{0'})^2}{(1+\varepsilon_{33}^0)^2} = 1 \qquad (7)$$

Т.е. уравнение сферы переходит в уравнение эллипсоида, если все главные значения тензора деформаций различны.

Результаты справедливы не только в главных осях, но и в любой системе координат

Теорема Коши-Гельмгольца

При рассмотрении деформаций мы предполагали, что тело в целом покоится относительно выбранной системы координат. Если под действием внешних сил тело перемещается в пространстве, то будет перемещаться и выбранная точка М. Для общего случая сформулируем теорему:

Наиболее общее перемещение точки Q элемента объема деформируемого тела, содержащего точку М, может быть представлено в виде:

1) поступательного перемещения точки М как полюса,

2) вращения вместе с элементом объема как абсолютно твердого тела вокруг М на малый угол φ,

3) собственно деформационного перемещения вследствие растяжения или сжатия по трем взаимно перпендикулярным осям (главным осям деформации), т.е.

$$u_i(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + \varphi_{ik}dx_k + \varepsilon_{ik}dx_k \qquad (8)$$

Тензор скоростей деформации

Итак, относительное смещение точки Q относительно М дается формулой (8). Если это перемещение происходит за физически малый промежуток времени , то в пределе $\Delta t \to 0$ найдем

$$\mathrm{v}_i = \mathrm{v}_{0i} + \dot{\varphi}_{ik}dx_k + \dot{\varepsilon}_{ik}dx_k \qquad (9)$$

Здесь v_i- компонента скорости смещения точки, находящейся в дифференцируемой окрестности первого порядка относительно точки Р,

v_{0i} - компонента скорости точки Р как полюса,

$$\omega_{ik} = \dot{\varphi}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{v}_k}{\partial x_i}\right)$$ - компоненты тензора скоростей поворота

$$e_{ik} = \dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathrm{v}_k}{\partial x_i}\right)$$ - компоненты тензора скоростей деформации