Лекция 10

Фильтрация совершенного газа и вязкой жидкости

Основные понятия теории фильтрации. Пористость. Просветность. Скорость фильтрации. Закон Дарси. Ограничения. Двучленный закон фильтрации. Основные соотношения теории однофазной изотермической фильтрации. Варианты уравнения движения. Модель фильтрации несжимаемой жидкости и совершенного газа. Простейшие задачи для плоского и цилиндрического слоя. Модель фильтрации неидеального газа. Простейшие примеры. Модель фильтрации вязкой жидкости. Простейшие задачи с объемной вязкостью.

Процессы в пористых средах

Теория фильтрации изучает движение газов, жидкостей и их смесей в пористых средах, т.е. в твердых телах, пронизанных системой сообщающихся между собой пустот (пор), что делает их проницаемыми для газов и жидкостей. Разумеется, что часть пор может быть изолированной.

Движение жидкостей и газов в пористой среде имеет ряд особенностей. Пористая среда состоит из огромного числа случайно расположенных зерен различной величины и формы. Поэтому, пространство, в котором движется жидкость (газ), представляет собой систему пор, непрерывно переходящих одна в другую. Для пористой среды характерно свойство сообщаемости пор. Ее нельзя представлять совокупностью капилляров, расположенных обособленно один от другого.

Нерегулярный характер структуры порового пространства не позволяет изучать движение жидкостей и газов в ней с привлечением традиционных методов гидродинамики, т.е. путем решения уравнения движения вязкой жидкости в области, представляющей совокупность пор.

Фильтрация
синтез на пористых катализаторах
пропитка, сушка, дегидратация…

Гидротехника, гидромелиорация, гидрогеология, нефтедобыча, химическая и пищевая промышленность, строительство, природные процессы…

Для целей теории фильтрации, однако, достаточно некоторого конечного числа осредненных характеристик

пористость $m = \dfrac{V_p}{V}$ $\qquad a = \dfrac{S_p}{S}$ **просветность**

Для изотропных сред: $m = a$

Основной характеристикой фильтрационного течения служит ***скорость фильтрации:***

$$\vec{\mathbf{w}} = \frac{Q}{S}\mathbf{n} \qquad (1)$$

расход — Q; **нормаль к сечению** — $\mathbf{n}$

истинная скорость газа

$$\vec{V} = \frac{Q}{S_p}\mathbf{n} \qquad (2)$$

$$\vec{\mathbf{w}} = \frac{S_p}{S}\vec{V} = a\vec{V} \qquad (3)$$

При введении скорости фильтрации рассматривается некоторый фиктивный фильтрационный поток, в котором расход через произвольное сечение равен реальному расходу. Поля давлений этих потоков идентичны.

Существует еще ряд характеристик, требующихся для описания свойств пористых сред: извилистость (или коэффициент извилистости), средний диаметр пор, распределение пор по размерам и т.д.

Были предприняты многочисленные попытки представить ***проницаемость как функцию разных величин*** для разных пористых сред. Все полученные соотношения носят частный характер. Наиболее распространенной является формула Козени-Кармана, полученная на основе аналогии между пористой средой и системой параллельных трубок (*такая аналогия справедливо оспаривается в разных книгах*)

Постоянная *K* – различна для пористых сред с различной структурой

$$k = \frac{Km^2}{\Sigma^2}$$

удельная поверхность — Σ

Другой пример зависимости коэффициента проницаемости от пористости

$$k = 8{,}4(1{,}275 - 1{,}5m)^2 \frac{d^2 m^3}{(1-m)^2}$$

эффективный диаметр частиц, составляющих грунт — d

Коэффициент вязкости в случае постоянной температуры зависит от давления линейно. Но в случае малых перепадов давления этой зависимостью можно пренебречь. На зависимости свойств от давления далее остановимся

Основное соотношение теории фильтрации – закон фильтрации – устанавливает связь между вектором скорости фильтрации и тем полем давления, которое вызывает фильтрационное движение.

Первые экспериментальные наблюдения за движением воды в трубах, заполненных песком, провели французские инженеры А.Дарси (1856) и Ж.Дюпюи (1848-1963). Именем Дарси назван линейный закон фильтрации, который он установил, создавая первую совершенную систему водоснабжения в Европе

При течении воды через песчаные вертикальные фильтры он установил

$$Q = k_f \frac{H_1 - H_2}{L}\Omega = k_f \frac{\Delta H}{L}\Omega \qquad (4)$$

Q объемный расход жидкости через песчаный фильтр

L длина фильтра, Ω площадь его поперечного сечения

ΔH разность напоров воды над фильтром и у его основания

k_f коэффициент фильтрации, имеющий размерность скорости

В таком виде закон используется в гидротехнический расчетах

При исследовании фильтрации нефти, газа и их смесей закон обычно представляют в виде

проницаемость

динамическая вязкость

Приведенное давление

$$\mathbf{w} = \frac{k}{\mu}\frac{\Delta P^*}{L} \qquad (5)$$

$$p^* = \rho g H = p + \rho g z$$

$$k_f = \frac{k}{\mu}\rho g$$

Большинство фильтрационных течений, встречающихся на практике, имеет скорость 10^{-4}-10^{-5} м/с и менее; k~10^{-14} – 10^{-12} м^2

В теории фильтрации закон фильтрации Дарси заменяет собой уравнение движения ***для безинерционных течений***

В дальнейшем закон Дарси без особых обоснований и экспериментальной проверки был распространен на различные грунты, трещиноватые породы, бетоны и т.д.

Позднее были установлены границы применимости линейного закона:

$$5 \le \mathbf{Re} \le 30, \quad \mathbf{Re} = \frac{wd}{\nu} \qquad (6)$$

Верхняя граница определяется группой причин, связанных с проявлением инерционных сил при достаточно высоких скоростях фильтрации

Нижняя граница определяется проявлением неньютоновских реологических свойств жидкости, ее взаимодействием с твердым скелетом при достаточно малых скоростях фильтрации

В (6) средний диаметр пор – величина фиктивная, поэтому оценка - условная

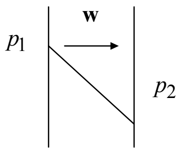
В литературе имеются многочисленные обобщения и попытки обоснования закона Дарси.

Всюду: в малой окрестности произвольной точки (в макроскопическом смысле) пористой среды поле скоростей фильтрации можно считать непрерывным, а все параметры пористой среды и насыщающей ее жидкости (газа) – постоянными. Нельзя пренебречь лишь изменением давления, как бы мало оно ни было, поскольку при постоянном по пространству давлении движение полностью отсутствует (по существу это утверждение является основной гипотезой). Поскольку изменение давления в окрестности данной точки определяется градиентом давления, основное предположение при установлении закона фильтрации состоит в том, что вектор скорости фильтрации в данной точке пористой среды определяется свойствами жидкости (газа) и пористой среды и градиентом давления.

Наиболее известные формулы:

Современное выражение для закона Дарси:

$$\mathbf{w} = -\frac{k}{\mu}\nabla p$$



Перепад давления на расстоянии Δl

$$\frac{\Delta p}{\Delta l} = \alpha \mathbf{w} + \beta_* \mathbf{w}^2 \qquad (7)$$

- Формула Дюпюи

$$\nabla p = -\frac{\mu}{k}\mathbf{w} - \beta\frac{\rho}{\sqrt{k}}|\mathbf{w}|\mathbf{w} \qquad (8)$$

закон Форхгеймера

$$\nabla p = -\frac{150\mu(1-m)^2}{Dm^2}\mathbf{w} - \frac{1{,}75\rho(1-m)}{Dm^2}|\mathbf{w}|\mathbf{w} \qquad (9)$$

формула Эргуна

Закон Форхгеймера (Форхгеймера-Рейнольдса) часто представляют в виде

$$-\frac{dp}{dz} = \alpha\mu\mathbf{w} + \beta\rho\mathbf{w}^2 \qquad (10)$$

α, β вязкостный и инерционный коэффициенты сопротивления пористого материала, определяются экспериментально; на их величину оказывают влияние многие факторы; это – индивидуальные характеристики пористой матрицы

Для порошковых материалов из частиц сферической формы:

(Белов С.В. (Поляев))

$$\alpha = 171(1-m)^2 m^{-3} d^{-2}$$
$$\beta = 0{,}635(1-m)m^{-4{,}72}d^{-1} \qquad (11)$$

При высоких скоростях для стационарных режимов фильтрации учитывается конвективная составляющая

$$-\frac{dp}{dz} = \alpha\mu\mathbf{w} + \beta\rho\mathbf{w}^2 + m^{-2}\rho\mathbf{w}\frac{d\mathbf{w}}{dz} \qquad (12)$$

$x_* = \beta/\alpha$ естественный масштаб длины

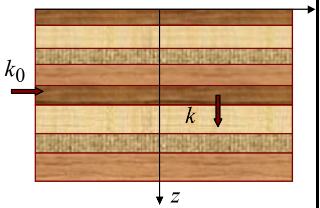
Для области малых скоростей используется модель типа Бингама-Шведова

$$w_i = \begin{cases} -\frac{k}{\mu}\left(1-\frac{\gamma}{|\nabla p|}\right)\frac{\partial p}{\partial x_i}, & |\nabla p| \ge \gamma; \\ 0, & |\nabla p| < \gamma \end{cases} \qquad (13)$$

Закон Дарси может быть обобщен для анизотропных сред

$$w_i = -\frac{1}{\mu}\sum_{(j)}\left(k_{ij}\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right) \qquad (14)$$

В приложениях особую роль играет анизотропия естественных пористых сред, например, связанная с осадконакоплением. В этом случае проницаемости вдоль слоев имеют одно значение, а в перпендикулярном направлении – другое, обычно значительно меньшее. Выберем одну из главных осей тензора напряжения перпендикулярной плоскости пластования – вдоль оси z. Тогда в этой системе координат сможем записать



$$w_1 = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad w_2 = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad w_3 = -\frac{k_0}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad k_0 >> k_1 \qquad (15)$$

....

Уравнения МСС. Однофазная изотермическая фильтрация

Закон сохранения массы и уравнение неразрывности

Масса жидкости в некотором малом объеме: $dM = \rho dV_\Pi = \rho m dV$

объем пор

Для всего выделенного контрольного объема: $M = \int_V m\rho dV$

Изменение массы в контрольном объеме во времени $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V m\rho dV$

складывается из двух частей – притока извне через поверхность контрольного объема и вследствие наличия источников и стоков

Поток массы через элементарную площадку: $\rho \mathbf{w}\mathbf{n} dS = \sum_i \rho w_i n_i dS$

Через всю поверхность $\oint_{S_\Pi} \rho v_i n_i dS_\Pi = \oint_S \rho w_i n_i dS$

Плотность внутренних источников и стоков σ

Источник – следствие обмена с твердым каркасом

Объем неподвижный $\Longrightarrow$ $\int_V \frac{\partial}{\partial t} m\rho dV = -\oint_S \rho \mathbf{w}\mathbf{n} dS + \int_V \sigma dV$

или $\int_V \left(\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\mathbf{w} - \sigma\right) dV = 0$ или $\frac{\partial m\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\rho\mathbf{w} + \sigma$ (16)

Сжимаемая среда

$$\frac{\partial}{\partial t} m\rho = -\nabla\cdot\rho\mathbf{w} + \sigma \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} m\rho = -\rho\nabla\cdot\mathbf{w} + \sigma \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial t} m\rho = -\nabla\cdot\rho a\mathbf{v} + \sigma \qquad (17)$$

Если источники массы отсутствуют, то имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} m\rho + \nabla\cdot\rho\mathbf{w} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial t} m\rho = -\nabla\cdot\rho a\mathbf{v} \qquad (18)$$

Различные системы координат: (19)

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho w_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho w_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r\rho w_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \rho w_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho w_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2\rho w_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w_\theta \rho \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \rho w_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

Несжимаемая среда: $\frac{d\rho}{dt} = 0$ или $\nabla\cdot\mathbf{w} = 0$ (20)

m=const: (21)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r\frac{\partial \rho}{\partial r} + v_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial r w_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r\frac{\partial \rho}{\partial r} + v_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + v_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 w_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

Общий вид **уравнения движения** (или уравнения баланса импульса):

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{F} \qquad (22)$$

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho\mathbf{v}\nabla\mathbf{v} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \qquad (23)$$

Массовые силы – сила тяжести и сила трения: $\mathbf{F}_1 = -\frac{1}{\rho}\nabla(gz)$, $\mathbf{F}_2 \sim \mathbf{w}$ (24)

Если ось z направлена вертикально вверх!

Если тензор напряжений – шаровой $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$

$$\mathbf{w} = \frac{S_p}{S}\mathbf{v} = a\mathbf{v}: \quad \rho\frac{\partial \mathbf{w}a^{-1}}{\partial t} + \rho\frac{\mathbf{w}}{a}\nabla\left(\frac{\mathbf{w}}{a}\right) = -\nabla p + \rho(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \qquad (25)$$

Ползущие или медленные движения жидкости или газа

$$\rho\frac{\partial \mathbf{w}a^{-1}}{\partial t} = -\nabla p + \rho(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \qquad (26)$$

Для медленных или стационарных режимов фильтрации $\nabla p = -\rho(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$ (27)

Сила внутреннего трения пропорциональна скорости фильтрации $\mathbf{F}_2 \sim \frac{\mu}{k\rho}\mathbf{w}$

$$\nabla p = -\rho\left(\frac{\mu}{k\rho}\mathbf{w} + \mathbf{F}_1\right) \quad \text{или} \quad \mathbf{w} = -\frac{k}{\mu}\left[\nabla p + \rho\mathbf{F}_1\right] \qquad (28)$$

Последнюю формулу можно считать ***обобщением закона Дарси для любых действующих сил*** – электрических, магнитных и т.д.

Простейшие модели стационарной изотермической фильтрации

В гидродинамике – для малых скоростей можно пренебречь сжимаемостью и газа, и жидкости

В теории фильтрации отдельно выделяют модели фильтрации несжимаемой жидкости (сжимаемость жидкости сравнима со сжимаемостью твердого каркаса) и модели фильтрации сжимаемого (идеального , неидеального) газа (сжимаемостью газа по сравнению со сжимаемостью твердого тела пренебречь нельзя)

Для медленных движений!!! $\mathbf{w}=-\frac{k}{\mu}[\nabla p+\rho \mathbf{F}_1]$ (1) $\boxed{\mathbf{w}=\frac{S_p}{S}\mathbf{v}=a\mathbf{v}}$

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\rho\mathbf{w} \quad \text{или} \quad \frac{\partial m\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}a\right) \qquad (2)$$

Определяющие соотношения обычно имеют вид

$$\rho=\rho(p) \quad m=m(p) \quad k=k(p) \quad \mu=\mu(p) \qquad (3)$$

1.Модель несжимаемой жидкости

$\rho=const, m=const, k=const, \mu=const$ $\quad \mathbf{w}=-\frac{k}{\mu}\nabla p \quad \nabla\cdot\mathbf{w}=0 \Longrightarrow \boxed{\Delta p=0}$ (4)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0 \Longrightarrow$$

В декартовой системе координат имеем: $w_x=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad w_y=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad w_z=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}$

Частные задачи:

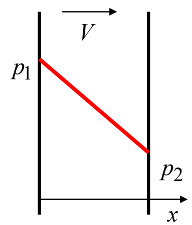
Простейшая ***задача о фильтрации несжимаемой жидкости через плоский слой*** толщиной L имеет вид

$\mathbf{w}=-\frac{k}{\mu}\nabla p$

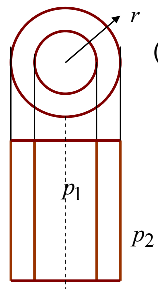
V - **компонента вектора скорости в направлении Ох**

$$\boxed{\frac{d^2 p}{dx^2}=0, \qquad (5) \\ x=0: \quad p=p_1; \quad x=L: \quad p=p_2}$$

$$p=\frac{p_2-p_1}{L}x+p_1; \quad V=-\frac{k}{\mu a}\frac{p_2-p_1}{L} \qquad (6)$$



Цилиндрический слой:



$$(7) \quad \boxed{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right)=0, \\ r=R_1: \quad p=p_1; \\ r=R_2: \quad p=p_2}$$

Решение: $\frac{d^2 p}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dp}{dr}=0$ (8)

$$u=\frac{dp}{dr} \qquad \frac{du}{dr}+\frac{1}{r}u=0$$

$$\frac{du}{u}=-\frac{dr}{r}$$

$$p=C_1\ln r+C_2 \qquad (9)$$

Из г.у.: $\begin{cases} p_1=C_1\ln R_1+C_2 \\ p_2=C_1\ln R_2+C_2 \end{cases}$ $\quad C_1=\frac{p_1-p_2}{\ln(R_1/R_2)}, \quad C_2=\frac{p_2\ln R_1-p_1\ln R_2}{\ln(R_1/R_2)}$

$$\begin{cases} p=\dfrac{p_1\ln(r/R_2)+p_2\ln(R_1/r)}{\ln(R_1/R_2)} \\ V=-\dfrac{k}{\mu a}\dfrac{p_1-p_2}{\ln(R_1/R_2)}\dfrac{1}{r}>0 \end{cases} \qquad (10)$$

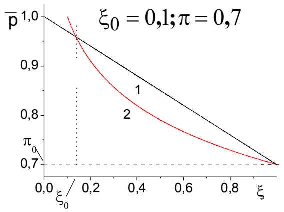
$$\bar{p}=p/p_1, \quad u=V/V_*, \quad \xi=x/x_*, \quad V_*=\frac{k}{\mu a}\frac{p_1}{x_*}, \quad x_*=\left[\begin{matrix} L, \\ R_2 \end{matrix}\right. \qquad (11)$$

Тогда при фильтрации в плоском слое имеем $\bar{p}=(\pi-1)\xi+1, \quad u=1-\pi$ (12)

Аналогичное решение для цилиндрического слоя

$$\bar{p}=\frac{\ln\xi+\pi\ln(\xi_0/\xi)}{\ln\xi_0}, \quad u=-\frac{1-\pi}{\xi\ln\xi_0} \qquad (13)$$

$$\pi=p_2/p_1, \quad \xi_0=R_1/R_2$$



2.Модель невязкого сжимаемого идеального (совершенного) газа

$\rho\neq const, m=const, k=const, \mu=const$

$$\mathbf{w}=-\frac{k}{\mu}\nabla p, \quad m\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\rho\mathbf{w}, \quad \rho=\rho(p) \qquad (14)$$

$$m\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{k}{\mu}\nabla\cdot(\rho\nabla p)$$

Предположим, что ***газ – идеальный, т.е. удовлетворяет уравнению состояния идеального газа***. В изотермических условиях можем записать

Если: $\rho=Ap$, то $\boxed{m\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{k}{\mu}\nabla\cdot(p\nabla p)}$ (15)

Стационарное уравнение:

$$\nabla\cdot p\nabla p=0 \quad \text{или} \quad \nabla\cdot\rho\nabla\rho=0 \qquad (16)$$

Частные задачи

Для плоского слоя с заданным перепадом давления имеем задачу

$$\boxed{p\frac{d^2 p}{dx^2}+\left(\frac{dp}{dx}\right)^2=0 \qquad (17) \\ x=0: \quad p=p_1; \quad x=L: \quad p=p_2}$$

$$p\frac{d^2p}{dx^2}+\left(\frac{dp}{dx}\right)^2=0 \qquad \text{эквивалентно} \qquad \frac{d}{dp}p\left(\frac{dp}{dx}\right)=0 \qquad (18)$$

интегрируем

$$p\left(\frac{dp}{dx}\right)=C_1, \quad \frac{p^2}{2}=C_1x+C_2$$

$$p^2=\frac{p_2^2-p_1^2}{L}x+p_1^2$$

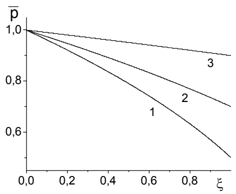
В безразмерных переменных:

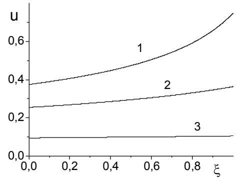
$\bar{p}=p/p_1,\quad u=V/V_*,\quad \xi=x/x_*,$

$$\bar{p}=\sqrt{\left(\pi^2-1\right)\xi+1}, \quad u=-\frac{1}{2}\frac{\pi^2-1}{\sqrt{\left(\pi^2-1\right)\xi+1}} \qquad (19)$$

При π ~1 скорость газа оказывается практически постоянной, а давление – почти линейная функция координаты.

$\pi=p_2/p_1,$





$\pi=1.-0{,}5;\ 2.-0{,}7;\ 3.-0.9$

3.Модель невязкого сжимаемого неидеального (несовершенного) газа

$$p=p^e \qquad \mathbf{w}=-\frac{k}{\mu}\nabla p, \quad m\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\rho\mathbf{w} \qquad (20)$$

Уравнение состояния

$$\boxed{dp^e=-\frac{\rho}{\beta_T}d\gamma\equiv\frac{1}{\beta_T\rho}d\rho} \quad \text{или} \quad \nabla p^e=\frac{1}{\beta_T\rho}\nabla\rho$$

В этом случае при условии постоянства свойств найдем $\Delta\rho=0$

или $\qquad \nabla\cdot\nabla p+\beta_T(\nabla p)^2=0 \qquad (21)$

Для совершенного газа : $\beta_T\sim 1/p$

Для несжимаемой жидкости: $\beta_T=0$ $\Rightarrow$ получим прежние уравнения

Простой пример. Неидеальный газ течет через плоский слой:

$$(22)\quad \boxed{\begin{array}{l}\dfrac{d^2p}{dx^2}+\beta_T\left(\dfrac{dp}{dx}\right)^2=0\\ x=0: \quad p=p_1;\\ x=L: \quad p=p_2\end{array}}$$

$$\frac{dp}{dx}=u, \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=-\beta_T u^2 \quad \Rightarrow$$

$$u=\frac{dp}{dx}=\frac{1}{\beta_T\left(x+C_1\right)} \quad \Rightarrow \quad p=\beta_T^{-1}\left[\mathbf{ln}\left(x+C_1\right)+\mathbf{ln}\,C_2\right]$$

Термодинамика флюида: УРС

$$f=f\left(T,\gamma,C_k\right):$$

$$df=-sdT-pd\gamma$$

$$\boxed{s=-\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\gamma; \quad p=-\left(\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right)_T}$$

$$ds=\frac{C_\gamma}{T}dT+\alpha_T\beta_T^{-1}d\gamma,$$

$$dp^e=\xi dT-\rho\beta_T^{-1}d\gamma, \qquad \xi=\alpha_T\beta_T^{-1}$$

Коэффициент термического увеличения давления

Если температура – постоянная, то

$$dp^e=-\rho\beta_T^{-1}d\gamma=\frac{d\rho}{\rho\beta_T}$$

Сжимаемость может быть функцией давления, температуры, состава

$p^V=p-p^e$ требует специального определения

Следствие линейной теории Онзагера $\qquad p^V=-\kappa_V\nabla\cdot\mathbf{v}$

Результат расширенной термодинамики (в число переменных состояния включаются не только сами величины, но и скорости их изменения):

$$p^V=-\kappa_V\nabla\cdot\mathbf{v}-\tau_p\frac{dp^V}{dt}$$

Окончательное решение:

$$p=\beta_T^{-1}\left[\mathbf{ln}\left(x+C_1\right)C_2\right]$$

$$V=\frac{k}{\mu a}\frac{1}{\beta_T}\frac{1}{x+C_1}=\frac{k}{\mu a}\frac{1}{\beta_T}\frac{1-\mathbf{exp}\left[-\left(p_1-p_2\right)\beta_T\right]}{L+x\left(1-\mathbf{exp}\left[-\left(p_1-p_2\right)\beta_T\right]\right)} \qquad (23)$$

В безразмерных переменных (11) $\quad \bar{p}=p/p_1,\quad u=V/V_*,\quad \xi=x/x_*,\quad V_*=\dfrac{k}{\mu a}\dfrac{p_1}{x_*}$

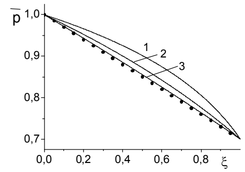
$$\bar{p}=\frac{1}{\bar{\beta}_T}\mathbf{ln}\left[\left(\xi+C_1\right)C_2\right], \qquad u=\frac{1-\mathbf{exp}\left[-\bar{\beta}_T(1-\pi)\right]}{1-\xi+\xi\,\mathbf{exp}\left[-\bar{\beta}_T(1-\pi)\right]}, \qquad (24)$$

$$C_1=\frac{1}{\mathbf{exp}\left[-(1-\pi)\bar{\beta}_T\right]-1}, \qquad C_2=\mathbf{exp}\left(\pi\bar{\beta}_T\right)-\mathbf{exp}\left(\bar{\beta}_T\right) \qquad (25)$$

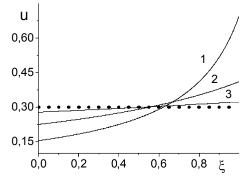
$$\bar{\beta}_T=\beta_T p_1$$

Если $\beta_T\to 0,$

$$V=\frac{k}{\mu a}\frac{p_1-p_2}{L_1}$$



$\bar{\beta}_T=1.-5;\ 2.-2;\ 3.-0{,}5$



точки – модель несжимаемой жидкости

4.Модель фильтрации газа с объемной вязкостью

$$\begin{cases} \mathbf{w} = -\dfrac{k}{\mu}\nabla p, \qquad m\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\rho\mathbf{w}, \qquad p = p^e + p^V \\ \nabla p^e = \dfrac{1}{\beta_T\rho}\nabla\rho, \quad p^V = -\kappa_V\nabla\cdot\mathbf{v} \end{cases} \tag{26}$$

Стационарная модель (установившееся течение), свойства постоянные

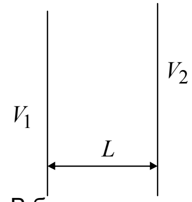
$$\nabla\cdot\rho\mathbf{v} = 0 \Longrightarrow \frac{\nabla\rho}{\rho} = -\frac{\nabla\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}} \Longrightarrow \nabla p^e = -\frac{1}{\beta_T}\frac{\nabla\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}},$$

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu a}\nabla p = \frac{k}{\mu a}\left[\frac{1}{\beta_T}\frac{\nabla\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}} + \nabla(\kappa_V\nabla\cdot\mathbf{v})\right]$$

или $$\beta_T\mathbf{v}\nabla(\kappa_V\nabla\cdot\mathbf{v}) + \nabla\cdot\mathbf{v} - \mu a\beta_T k^{-1}\mathbf{v}\mathbf{v} = 0 \tag{27}$$

Используя закон Дарси, легко показать, что для давления получаем дифференциальное уравнение третьего порядка!

Простейшая задача для скорости (при условии постоянства свойств)



$$\beta_T\kappa_V V\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{dV}{dx} - \frac{\mu a}{k}\beta_T V^2 = 0$$
$$x = 0 : V = V_1; \quad x = L : V = V_2 \tag{28}$$

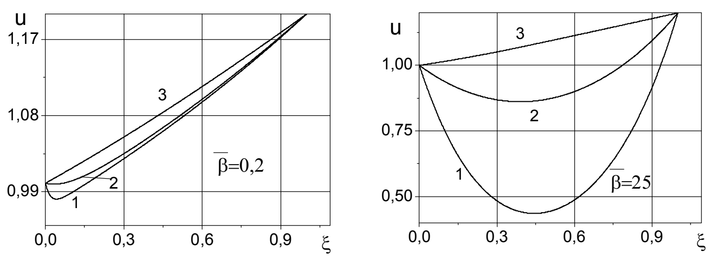
В безразмерных переменных: $u = V/V_*, \quad \xi = x/L$ $\qquad V_* = V_1$

имеем задачу
$$\bar\beta_T\varepsilon u\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi} - \bar\beta_T u^2 = 0$$
$$\xi = 0 : u = U_1; \quad \xi = 1 : u = U_2 \tag{29}$$
$$U_1 = V_1/V_*, \quad U_2 = V_2/V_*$$

$G = \bar\rho u = const$ - следствие уравнения неразрывности

Два параметра: $$\varepsilon = \frac{k\kappa_V}{\mu aL^2}, \quad \bar\beta_T = \beta_T p_* \tag{30}$$ $\qquad p_* = \mu aLV_1k^{-1}$

$$\bar p^V = \frac{p^V}{p_*} = -\varepsilon\frac{du}{d\xi}, \qquad \frac{d\bar p^e}{d\xi} = \frac{1}{\bar\beta_T}\frac{1}{\bar\rho}\frac{d\bar\rho}{d\xi} = -\frac{1}{\bar\beta_T}\frac{1}{u}\frac{du}{d\xi} \qquad \bar\rho = \frac{\rho}{\rho_*} \quad \rho_* = G/V_*$$



а б

Распределение скорости в плоском слое для слабо (а) и сильно (б) сжимаемого газа при варьировании параметра ε (безразмерной объемной вязкости) $\varepsilon = 1. - 0{,}1;\ 2. - 0{,}5;\ 3. - 10 \qquad U_1 = 1 \quad U_2 = 1{,}2$

$$\varepsilon = \frac{k\kappa_V}{\mu aL^2} \to 0 \qquad \frac{du}{d\xi} - \bar\beta_T u^2 = 0, \qquad \xi = 0 : u = U_1; \quad G = \bar\rho u = const$$

$$\bar\beta_T = \beta_T p_* \to 0 \qquad \frac{du}{d\xi} = 0$$ - несжимаемая жидкость! $\quad u = const$

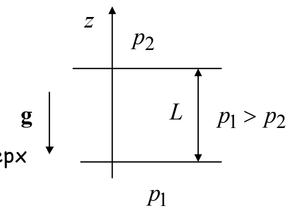
Т.е., в несжимаемой жидкости объемной вязкости нет

$p_* = \mu aLV_1k^{-1}$

Влияние силы тяжести

$$\nabla p = -\frac{\mu}{k}\mathbf{w} + \rho\mathbf{F}_1 \qquad V = -\frac{k}{\mu a}\frac{d}{dz}(p + \rho gz),$$
$$F_1 = -\nabla gz$$

если ось направлена вверх



$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dz}(\rho V) = 0, \\ &\rho = Ap, \end{aligned}\right\} \qquad \frac{d}{dz}\left[p\frac{d}{dz}\left(p(1 + Agz)\right)\right] = 0$$

Неустановившееся медленное течение сжимаемого флюида $\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu a}\nabla p$

В модели сжимаемого идеального флюида получали уравнение для давления

$$m\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu}\nabla\cdot(p\nabla p)$$

Для малых перепадов давления $m\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu}\nabla\cdot(p\nabla p) = \frac{k}{\mu}\left[\Delta p + (\nabla p)^2\right] \approx \frac{k}{\mu}\Delta p$

Уравнение пьезопроводности

Фильтрация упругой жидкости в упругой среде:

$$\rho = \rho_0\left(1 + \beta_T(p - p_0)\right), \qquad m = m_0\left(1 - a_p(p - p_0)\right)$$

С точностью до малых слагаемых второго порядка получим аналогичное уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa\Delta p$$

Басниев К.С, Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика
Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах

В общем случае подстановка уравнения Дарси в уравнение неразрывности дает:

$$\frac{\partial m(p)\rho(p)}{\partial t} = \nabla\cdot\left[\rho(p)\frac{k(p)}{\mu(p)}\nabla p\right] \qquad (41)$$

<u>УРС упругой жидкости</u>: вместо $dp = -\frac{\rho}{\beta_T}d\gamma \equiv \frac{1}{\beta_T\rho}d\rho$

Для малых перепадов давления $\rho = \rho_0\left(1 + \beta_T(p - p_0)\right)$ (42)

Для больших: $\rho = \rho_0 \, \mathbf{exp}\left[\beta_T(p - p_0)\right]$ (43)

<u>Для реального газа:</u> $p = z\rho RTM$, $z = z\left(\frac{p}{p_*}, \frac{T}{T_*}\right)$ Коэффициент сверхсжимаемости (44)

$$z = z_0\left(1 - a_z(p_0 - p)\right)$$

$$\rho = \rho_0 \, \mathbf{exp}\left[-a_z(p_0 - p)\right]$$

Можно показать, что при малых перепадах давления:

$$\mu = \mu_0\left(1 + a_\mu(p - p_0)\right)$$

$$m = m_0\left(1 - a_p(p - p_0)\right)$$

$$k = k_0\left(1 - a(p - p_0)\right)$$

Выше представлены простейшие модели фильтрации для ползущих течений
Если скорости нельзя считать малыми, то даже стационарные уравнения содержат инерционные слагаемые

$$m\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\rho\mathbf{w}$$

$$\rho\frac{\partial\mathbf{w}a^{-1}}{\partial t} + \rho\frac{\mathbf{w}}{a}\nabla\left(\frac{\mathbf{w}}{a}\right) = -\nabla p - \frac{\mu}{k}\mathbf{w}$$

\+ УРС

<u>Идеальный сжимаемый газ:</u>

$$\nabla\cdot\rho\mathbf{w} = 0$$

$$\rho\frac{\mathbf{w}}{a}\nabla\left(\frac{\mathbf{w}}{a}\right) = -\nabla p - \alpha\mu\mathbf{w} - \beta\rho\mathbf{w}^2$$

$$\rho = Ap,$$

<u>Неидеальная сжимаемая упругая жидкость</u>

$$\nabla\cdot\rho\mathbf{w} = 0$$

$$\rho\frac{\mathbf{w}}{a}\nabla\left(\frac{\mathbf{w}}{a}\right) = -\nabla p^e - \alpha\mu\mathbf{w} - \beta\rho\mathbf{w}^2$$

$$\nabla p^e = \frac{1}{\beta_T\rho}\nabla\rho$$

<u>сжимаемая жидкость (газ) с объемной вязкостью</u>

$$\nabla\cdot\rho\mathbf{w} = 0$$

$$\rho\frac{\mathbf{w}}{a}\nabla\left(\frac{\mathbf{w}}{a}\right) = -\nabla p - \alpha\mu\mathbf{w} - \beta\rho\mathbf{w}^2$$

$$p = p^e + p^V$$

$$\nabla p^e = \frac{1}{\beta_T\rho}\nabla\rho, \; p^V = -\kappa_V\nabla\cdot\mathbf{v}$$