

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Композиционные материалы стохастической структуры.....	7
2. Макроскопические свойства композиционных материалов.....	10
3. Композиционные материалы со слоистой структурой.....	18
4. Волокнистые композиционные материалы.....	19
5. Материалы с зернистой структурой.....	20
6. Оценка представительности объема материала.....	21
7. Вязкоупругие свойства.....	24
8. Вероятностная модель разрушения Вейбулла.....	26
Приложение 1. Элементы теории вероятности.....	31
Контрольные вопросы.....	34
Литература.....	34

## ВВЕДЕНИЕ

Первые работы в области механики структурно-неоднородных сред были посвящены исследованиям эффективных механических характеристик микро-неоднородных материалов по правилу механического смешивания [1,2]. В 1946 году И.М. Лифшиц и Л.Н. Розенцвейг [3] предложили рассчитывать макроскопические свойства поликристаллов, решая стохастическую краевую задачу. Этот метод был развит в последствии в трудах основоположников современной механики композитных материалов стохастической структуры: В.А.Ломакина [4], Л.П. Хорошуна [5], Т.Д. Шермергора [6], Г.А. Ванина [7], М. Берана [8] и многих других ученых. В настоящее время достигнуты значительные результаты прогнозирования эффективных линейно и нелинейно-упругих свойств, упругопластических и вязкоупругих характеристик, процессов деформирования и разрушения структурно-неоднородных материалов. При математическом моделировании процессов в таких материалах удобно использовать концепцию микронеоднородной среды [6], позволяющую учитывать существование отчетливых границ между элементами структуры с различными свойствами.

Студент, изучающий дисциплину «Механика стохастических композитов», должен знать:

1. Основные термины, определения и понятия теории вероятности, механики сплошных сред, теории упругости, методов математической физики в рамках теоретических учебных курсов университетской подготовки, необходимые для изучения теоретического материала.
2. Основы микро- и макромеханики деформирования и разрушения композитов.
3. Методы исследования и испытания композиционных материалов и конструкций из них.
4. Тенденции и направления развития методов исследования композитов.

Математическая модель структурно-неоднородной среды представляется геометрией области  $V$  с границей  $\Gamma$ , содержащей в себе множество непересекающихся областей  $w_i$ , ограниченных поверхностями  $\Gamma_i$  и моделями сред, занимающих эти области. Основными допущениями микронеоднородной среды являются [9]:

1. Характерный размер областей  $w_i$  много больше молекулярно-кинетических размеров.
2. Характерный размер областей  $w_i$  много меньше расстояний на которых существенно меняются осредненные или макроскопические параметры.

Представительным объемом области  $V_L$  с характерным размером  $L$ , представляющим объем порошкового материала, можно считать подобласть  $V_l$  с характерным размером  $l \ll L$  для непрерывной всюду внутри  $V_l$  функции  $g(r)$ , если существует и ограничена осредненная по объему величина

$$\bar{g} = \frac{1}{V_l} \int_{V_l} g(r) dr,$$

и если для любого положительного сколь угодно малого числа  $\delta_\gamma$  существует такое положительное  $\gamma$ , зависящее только от  $\delta_\gamma$ , что

$$\left| \frac{1}{V_l + \gamma l} \int_{V_l + \gamma l} g(r) dr - \frac{1}{V_l} \int_{V_l} g(r) dr \right| < \delta_\gamma.$$

Чтобы представительный объем  $V_l$  на физическом уровне строгости имел смысл элементарного макрообъема микронеоднородной среды, необходимо принять  $L \gg l \gg l_w$ , где  $l_w$  – характерный размер компонента порошкового тела. При выполнении указанных условий, можно пренебречь влиянием масштаба осреднения  $l$  на значение усредняемой величины [10].

Таким образом, композитную среду можно считать микромеханически неоднородной, если характерные размеры  $l_i$  ее компонентов  $w_i$  много больше молекулярно-кинетических размеров и много меньше расстояний, на которых

заметно изменяются осредненные параметры состояния. В этом случае микрообъемом компонентов или фаз среды, то есть элементарным объемом  $dV$ , имеющим размер  $dl$ , приписывают свойства материалов компонентов или фаз, удовлетворяя постулатам механики сплошной среды [11].

Такой подход позволяет с одной стороны выделить исследования поведения отдельных компонентов гетерогенной среды (частиц, агрегатов частиц и реакционных ячеек), проводя их с использованием аппаратов механики деформируемого твердого тела, механики сплошной среды и численных методов. С другой стороны – дает возможность рассматривать макрокинетические процессы в гетерогенной среде, как в однородной. При этом результаты исследования процессов на микроуровнях отдельных компонентов, агрегатов частиц или ячеек среды могут быть использованы в континуальных уравнениях с помощью осредненных параметров состояния, отражающих, в том числе, поведение элементов структуры неоднородного тела.

В общем случае структура композитной среды стохастически неоднородна. Вопросы локальной представительности микрообъемов гетерогенной среды в окрестностях случайно выбранных точек наблюдения стохастических структурно-неоднородных материалов рассмотрены в [12]. Показано, что между изменением уровня вариации объемного соотношения компонентов материала и уровнями вариации эффективных упругих свойств при изменении размеров  $l$  моделируемого фрагмента стохастической структуры существует корреляция. Зона наибольшего разброса эффективных локальных параметров совпадает с резким изменением зависимости среднеквадратичной дисперсии  $S^2(l)$ , что позволяет сформулировать критерий представительности микрообъемов материала в виде ограничений на размер фрагмента гетерогенной среды в окрестности точки наблюдения. Есть существенные отличия механических реакций микрообъемов, отвечающих различным случайно выбранным точкам наблюдения стохастической структурно-неоднородной среды, что объясняется структурно-концентрационной неоднородностью материала. Предлагается выбирать раз-

меры представительных объемов, исследуемых для получения прогноза эффективных локальных свойств стохастического композита, в указанной области резкого изменения характера зависимости  $S^2(I)$ .

Оценки макроскопических свойств стохастических многокомпонентных материалов могут быть сделаны методами статистической механики на основе данных о функциях распределения локальных эффективных характеристик [13].

## 1. КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Реальные композиционные материалы в основном имеют случайную структуру, обусловленную как неправильной формой армирующих элементов, так и их случайным расположением. Близкой к регулярной может быть структура материалов, армированных сферическими включениями и круглыми волокнами при плотной упаковке. Применение методов теории случайных функций позволяет охватить практически все структуры, присущие реальным композиционным материалам.

Композиционные материалы с нерегулярной структурой можно представить как среду с эффективными физико-механическими характеристиками, являющимися случайными функциями координат. Для упругого тела речь идет о модулях упругости. Тензор модулей упругости  $\lambda_{ija\beta}$  – определяет тензорное случайное поле.

Прежде всего можно поставить вопрос о правомерности использования термина тензор модулей упругости вместо привычного нам понятия матрицы упругих констант. Переадресуем этот вопрос классикам стохастической механики [4, 5, 8, 13].

Тензорное случайное поле  $\lambda_{ija\beta}(x_i^{(m)})$  задано в некоторой области  $v$ , если каждой конечной системе точек  $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n)}$  из области  $v$  поставлен в соответствие закон распределения вероятностей величин  $\lambda_{ija\beta}$ . Причем это  $N$ - $n$ -мерный закон, где  $N$  – число независимых компонент тензора упругости.

Этот закон можно характеризовать плотностью распределения вероятности:

$$f_1^n(\lambda_{ij\alpha\beta}) = f_1^n[\lambda_{ij\alpha\beta}(x_i^{(1)}), \dots, \lambda_{ij\alpha\beta}(x_i^{(n)})] \quad (1)$$

Если свойства **изотропны** в каждой точке тела, т.е. тензор  $\lambda$  характеризуется только двумя ( $\lambda$  и  $\mu$ ) постоянными, то имеем  $2 \cdot n$ -мерный закон распределения вероятностей для величин  $\lambda$  и  $\mu$ . При этом плотность распределения (1) можно представить:

$$f_1^n(\lambda, \mu) = f_1^n[\lambda(x_i^{(1)}), \mu(x_i^{(1)}), \dots, \lambda(x_i^{(n)}), \mu(x_i^{(n)})] \quad (2)$$

Случайное тензорное поле модулей  $\lambda_{ij\alpha\beta}$  можно характеризовать также моментами. ***n*-точечным моментом** порядка  $m$  называется величина

$$\left\langle \underbrace{\lambda_{ij\alpha\beta}^{(1)} \dots \lambda_{pqrs}^{(1)}}_{m_1}, \underbrace{\lambda_{ij\alpha\beta}^{(2)} \dots \lambda_{pqrs}^{(2)}}_{m_2}, \dots, \underbrace{\lambda_{ij\alpha\beta}^{(n)} \dots \lambda_{pqrs}^{(n)}}_{m_n} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int (\lambda_{ij\alpha\beta}^{(1)} \dots \lambda_{pqrs}^{(1)}) (\lambda_{ij\alpha\beta}^{(2)} \dots \lambda_{pqrs}^{(2)}) \dots (\lambda_{ij\alpha\beta}^{(n)} \dots \lambda_{pqrs}^{(n)}) f_1^{(n)} d\lambda^{(1)} \dots d\lambda^{(n)} \quad (3)$$

где  $m_n$  – число множителей в точке  $x_i^{(n)}$ .

Как следует из (1),  $n$ -точечные плотности распределения и моменты являются функциями  $3n$  координат (в 3-х мерном пространстве), определяющих положение точки  $x_i^{(n)}$ .

Если тензорное случайное поле  $\lambda_{ij\alpha\beta}$  **статистически однородно**, т.е. распределение вероятности (1) не изменяется при преобразовании системы точек наблюдения

$$x_i = x_i + a, \quad a = const, \quad (4)$$

то  $n$ -точечные плотности распределения и моменты зависят от  $3(n-1)$  координат. **Это значит, что плотность распределения статистически однородного поля случайных величин зависит только от относительного расположения точек  $\{x^{(n)}\}$  в пространстве, но не зависит от положения в пространстве группы этих  $n$  точек.** В этом случае одноточечные моменты бу-

дут постоянными, а двухточечные будут зависеть только от разности координат двух точек.

Если на стохастически неоднородное тело действуют внешние силы, то возникающие напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}$  также образуют **случайные тензорные поля**. Их можно характеризовать  $n$ -точечными плотностями распределения:

$$f_2^n(\sigma_{ij}) = f_2^n(\sigma_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(2)} \dots \sigma_{ij}^{(n)}), \quad f_3^n = f_3^n(\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)} \dots \varepsilon_{ij}^{(n)}) \quad (5)$$

а также соответствующими моментами.

Более общим описанием случайных тензорных полей  $\lambda_{ij\alpha\beta}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  является задание их совместной  $n$ -точечной плотности распределения:

$$f_2^n(\lambda_{ij\alpha\beta}, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) = f_2^n(\lambda_{ij\alpha\beta}^{(1)} \sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)} \dots \lambda_{ij\alpha\beta}^{(n)} \sigma_{ij}^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(n)}) \quad (6)$$

Практически оперируют одноточечными и двухточечными моментами. Простейшими из них являются моменты первого и второго порядка, т.е. математические ожидания

$$\langle \lambda_{ij\alpha\beta}^{(1)} \rangle, \langle \sigma_{ij}^{(1)} \rangle, \langle \varepsilon_{ij}^{(1)} \rangle \quad (7)$$

и корреляционные функции

$$\langle \lambda_{ij\alpha\beta}^{(1)} \lambda_{pqrs}^{(2)} \rangle, \langle \sigma_{ij}^{(1)} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} \rangle, \langle \varepsilon_{ij}^{(1)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} \rangle, \langle \lambda_{ij\alpha\beta}^{(1)} \sigma_{pq}^{(2)} \rangle, \langle \lambda_{ij\alpha\beta}^{(1)} \varepsilon_{pq}^{(2)} \rangle, \langle \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} \rangle \quad (8)$$

Для гетерогенных материалов характерно безграничное ослабление статистических зависимостей между значениями случайных полей в точках  $x_i^{(1)}$  и  $x_i^{(2)}$  при неограниченном возрастании расстояния между ними. При этом корреляционные функции (8) переходят в произведение математических ожиданий, взятых в точках  $x_i^{(1)}$  и  $x_i^{(2)}$ :

$$\langle \lambda_{ij\alpha\beta}^{(1)} \lambda_{pqrs}^{(2)} \rangle \rightarrow \langle \lambda_{ij\alpha\beta}^{(1)} \rangle \langle \lambda_{pqrs}^{(2)} \rangle, \text{ при } |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \rightarrow \infty \quad (9)$$

Корреляционные связи сохраняются лишь на характерных расстояниях, называемых **масштабом корреляции**, которые определяются размером неод-

нородностей. Масштаб корреляции может быть оценен значением  $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|$ , при котором выполняется условие (9).

Часто вместо случайных полей рассматриваются их функции

$$\lambda_{ij\alpha\beta}^0 = \lambda_{ij\alpha\beta} - \langle \lambda_{ij\alpha\beta} \rangle, \sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij} - \langle \sigma_{ij} \rangle, \varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij} - \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (10)$$

Тогда вводятся *центральные моменты*, которые строятся аналогично (3), где под знаком интеграла вместо полных значений случайных полей стоят их функции.

При исследовании стохастически неоднородных материалов целесообразно пользоваться *условными плотностями распределения* и соответствующими им моментами.

Условная плотность распределения напряжений и деформаций относительно модулей упругости

$$\varphi^n(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij} / \lambda_{ij\alpha\beta}) = \varphi^n(\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)} \dots \sigma_{ij}^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(n)} / \lambda_{ij\alpha\beta}^{(1)} \dots \lambda_{ij\alpha\beta}^{(n)}), \quad (11)$$

и согласно *теореме умножения* связана с плотностями (1) и (6) соотношением

$$f^n(\lambda_{ij\alpha\beta}, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) = f^n(\lambda_{ij\alpha\beta}) \cdot \varphi^n(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij} / \lambda_{ij\alpha\beta}) \quad (12)$$

Условная плотность распределения (11) и соответствующие ей моменты дают представление об НДС в каждом компоненте композиционных материалов.

## 2. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается подход стохастической механики композиционных материалов, развитый в [13] с использованием методов теории случайных функций. Рассмотрим элементарный объем композита  $V$ , содержащий достаточно большое количество включений, чей линейный размер значительно меньше наименьшего линейного размера трехмерной области  $V$ . Предполагается, что характерный линейный размер объема  $V$  меньше характерного масштаба изменения внешних нагрузок.



Тензор макроскопических модулей упругости  $\lambda_{ij\alpha\beta}^*$  микронеоднородного тела определяется соотношениями

$$\bar{\sigma}_{ij} = \lambda_{ij\alpha\beta}^* \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \quad (13)$$

связывающими средние по объему тела напряжения и деформации:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV; \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV. \quad (14)$$

Соотношения (13) можно построить на основании уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (15)$$

или уравнений совместности

$$e_{ikl} \cdot e_{jmn} \cdot \varepsilon_{ln,km} = 0 \quad (16)$$

где напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}$  в произвольной точке микронеоднородного тела связаны законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (17)$$

Здесь  $e_{ijk}$  – единичный антисимметричный тензор,  $\lambda_{ij\alpha\beta}$  – тензор модулей упругости, являющийся **статистически однородной случайной функцией координат**. Требование статистической однородности является необходимым условием применимости аппарата теории случайных функций.

Подставляя (17) в (15) и (16) получим задачу в перемещениях

$$(\lambda_{ij\alpha\beta} u_{\alpha\beta})_{,j} = 0 \quad (18)$$

или в напряжениях

$$e_{ikl} \cdot e_{imn} \cdot \left( \lambda_{ij\alpha\beta}^{-1} \sigma_{\alpha\beta} \right)_{,km} = 0 \quad (19)$$

Определяя из (18), (19) напряжения как функции средних деформаций  $\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}$  или деформации как функции средних напряжений  $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}$  и усредняя их по объему, получим (13).

Если размеры тела много больше размеров микронеоднородностей, то область, занимаемую телом, можно рассматривать как бесконечную. В этом случае можно пренебречь влиянием масштаба осреднения на значение усредняемых величин.

При воздействии однородных нагрузок на **статистически однородное** тело возникающие случайные поля напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  также **статистически однородны**. В этом случае рассматриваемые случайные поля удовлетворяют свойству *эргодичности*, согласно которому усреднение по объему совпадает со статистическим усреднением (по ансамблю реализации).

$$\bar{\sigma}_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle; \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad (20)$$

$$\text{где} \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \int \sigma_{ij} f_2(\sigma_{ij}) d\sigma_{ij}; \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \int \varepsilon_{ij} f_3(\varepsilon_{ij}) d\varepsilon_{ij} \quad (21)$$

Для эргодических полей эффективные свойства задаются выражением

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ij\alpha\beta}^* \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle \quad (22)$$

Из закона Гука (17)

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \lambda_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle = \langle \lambda_{ij\alpha\beta} \rangle \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle + \langle \lambda_{ij\alpha\beta}^0 \varepsilon_{\alpha\beta}^0 \rangle \quad (23)$$

Данное выражение получается, потому что любая статистически однородная функция представима в виде суммы регулярной части и *флуктуации*:  $f = f^0 + \langle f \rangle$ .

$$\langle const \rangle = const; \quad \langle \varepsilon^0 \rangle = \langle \varepsilon - \langle \varepsilon \rangle \rangle = \langle \varepsilon \rangle - \langle \varepsilon \rangle = 0; \quad \langle \lambda^0 \rangle = 0,$$

значит

$$\langle \lambda \varepsilon \rangle = \langle \lambda \rangle \langle \varepsilon \rangle + \langle \lambda^0 \varepsilon^0 \rangle.$$

Из (23) следует, что для определения макроскопических упругих констант надо из (18) найти одноточечные моменты  $\langle \lambda_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle$  или  $\langle \lambda_{ij\alpha\beta}^0 \varepsilon_{\alpha\beta}^0 \rangle$  как функции средних напряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и подставить их в выражение

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \lambda_{ij\alpha\beta}^{-1} \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle = \langle \lambda_{ij\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \rangle = \langle \lambda^{-1} \rangle \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle + \langle \lambda_{ij\alpha\beta}^{-10} \sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle \quad (24)$$

Т. к. методы определения характеристик по решениям (18) и (19) идентичны, рассмотрим только первое из них.

Для статистически однородных деформаций перемещения  $u_i$  представляются в виде:

$$u_i = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j + u_i^0, \quad (25)$$

где  $u_i^0$  - флуктуация перемещений.

Тогда (18) даст уравнение равновесия в перемещениях

$$\langle \lambda_{ij\alpha\beta} \rangle u_{\alpha,\beta j}^0 + \lambda_{ij\alpha\beta}^0 \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle + (\lambda_{ij\alpha\beta}^0 u_{\alpha,\beta}^0)_j = 0 \quad (26)$$

и это уравнение относительно флуктуации  $u^0$ .

Т. к. регулярная часть перемещений  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j$  на бесконечности неограниченно возрастает, то флуктуацию  $u_i^0$  на бесконечности можно положить равной нулю:

$$u_i^0 \Big|_{\infty} = 0, \quad (27)$$

Таким образом, при принятых допущениях задача о макроскопических модулях упругости сводится к решению уравнения (26) с граничным условием (27). *Если некоторые допущения неприемлемы? Тогда получим другую задачу статистической механики! Например  $u_i = \langle u_i \rangle + u_i^0$ ,  $\langle u_i \rangle$  - другая регулярная часть,  $u_i^0 \Big|_{\Gamma} = 0$ , другие граничные условия.*

Краевая задача (26), (27) является статистически нелинейной, т.к. уравнение (26) содержит произведение случайных функций:  $(\lambda_{ij\alpha\beta}^0 u_{\alpha,\beta}^0)_j$ .

Поставленную краевую задачу стохастической механики композитов можно решить двумя способами: методом линеаризации и методом моментов.

### **Метод линеаризации**

Метод связан с непосредственным интегрированием уравнения (26). Пусть флуктуации модулей упругости  $\lambda_{ij\alpha\beta}^0$  малы по сравнению с их математическими ожиданиями. Тогда флуктуации модулей упругости можно представить в виде

$$\lambda_{ij\alpha\beta}^0 = \xi \Lambda_{ij\alpha\beta}^0, \quad (28)$$

где  $\xi$  – детерминированный малый параметр. Т.е. для любого значения  $\xi \ll 1$  можно поставить в соответствие конечное значение  $\Lambda_{ij\alpha\beta}^0$ , такое, что выполняется (28).

Относительно  $\Lambda_{ij\alpha\beta}^0$  уравнение (26) можно представить

$$\langle \lambda_{ij\alpha\beta} \rangle u_{\alpha,\beta j}^0 = -\xi \left[ \Lambda_{ij\alpha\beta}^0 \left( \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle + u_{\alpha,\beta}^0 \right) \right]_j. \quad (29)$$

Решение задачи ищется в виде разложения в ряд по малому параметру:

$$u_i^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n u_i^{(n)}. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), (27) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\xi$ , приходим к рекуррентной последовательности статистически линейных краевых задач относительно коэффициентов разложения  $u^{(n)}$ :

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{ij\alpha\beta} \rangle u_{\alpha,\beta j}^{(0)} &= 0; \quad u_i^{(0)}|_{\infty} = 0; \\ \langle \lambda_{ij\alpha\beta} \rangle u_{\alpha,\beta j}^{(1)} &= -\left[ \Lambda_{ij\alpha\beta}^0 \left( \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle + u_{\alpha,\beta}^{(0)} \right) \right]_j; \quad u_i^{(1)}|_{\infty} = 0; \\ \langle \lambda_{ij\alpha\beta} \rangle u_{\alpha,\beta j}^{(n)} &= -\left[ \Lambda_{ij\alpha\beta}^0 u_{\alpha,\beta}^{(n-1)} \right]_j; \quad u_i^{(n)}|_{\infty} = 0; \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

С использованием функции Грина, удовлетворяющей уравнению

$$\langle \lambda_{ij\alpha\beta} \rangle G_{\alpha l, j\beta} \left( x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \right) = -\delta \left( x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \right) \delta_{ij}, \quad (32)$$

решение системы краевых задач (31) представляется в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_i^{(0)} &= \mathbf{0}; \\
\mathbf{u}_i^{(1)} &= \int_V \mathbf{G}_{ij} (x_i^{(1)} - x_i^{(2)}) \Lambda_{lj\alpha\beta}^{0(2)} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta} \rangle d\mathbf{x}^{(2)}; \\
\mathbf{u}_i^{(n)} &= \int_V \mathbf{G}_{ij} (x_i^{(1)} - x_i^{(2)}) \left( \Lambda_{lj\alpha\beta}^{0(2)} \mathbf{u}_{\alpha\beta}^{(n-1)(2)} \right)_j d\mathbf{x}^{(2)}; \quad n = 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{33}$$

Из структуры уравнений (33) видно, что функции  $\mathbf{u}_i^{(n)}$  линейно зависят от средних деформаций  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \rangle$ . Подставив (30), (33) в (23) определим тензор макроскопических модулей упругости. Решив поставленную задачу, мы получим полное статистическое описание процесса деформирования структурированного материала. Но для определения модулей достаточно (!) определить лишь одноточечные моменты  $\langle \lambda_{ij\alpha\beta}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta}^0 \rangle$  или  $\langle \lambda_{ij\alpha\beta} \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta} \rangle$  как функции от средних деформаций  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta} \rangle$  – см. (23). А значит, имеет смысл рассмотреть другой менее трудоемкий способ определения макроскопических свойств стохастических композитов.

### ***Метод моментных функций***

Построим уравнение для моментов  $\langle \mathbf{u}_{\alpha}^{0(1)} \lambda_{pqmn}^{0(2)} \rangle$ . Для этого уравнение равновесия (26), взятое в точке  $x^{(1)}$  умножим на  $\lambda_{pqmn}(x^{(2)})$  и проведем статистическое осреднение (см. (21)) – *оно же усреднение по ансамблю реализаций*.

Получим уравнение:

$$\langle \lambda_{ij\alpha\beta} \rangle \langle \mathbf{u}_{\alpha j}^{0(1)} \lambda_{pqmn}^{0(2)} \rangle_{,\beta i} = - \langle \lambda_{ij\alpha\beta}^{0(1)} \lambda_{pqmn}^{0(2)} \rangle \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta} \rangle_{,j} - \langle \lambda_{ij\alpha\beta}^{0(1)} \mathbf{u}_{\alpha,\beta}^{0(1)} \lambda_{pqmn}^{0(2)} \rangle_{,j} \tag{34}$$

Если мы сможем решить (34) с граничными условиями, соответствующими (27), относительно  $\langle \mathbf{u}_{\alpha}^{0(1)} \lambda_{pqmn}^{0(2)} \rangle$ , то искомый одноточечный момент  $\langle \lambda_{ij\alpha\beta}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta}^0 \rangle$  в законе Гука (23) может быть определен, как

$$\langle \lambda_{ij\alpha\beta}^0 \varepsilon_{\alpha\beta}^0 \rangle = \lim_{x_i^{(2)} \rightarrow x_i^{(1)}} \langle u_{\alpha}^{0(1)} \lambda_{ij\alpha\beta}^{0(2)} \rangle_{\beta}. \quad (35)$$

Однако, вследствие статистической нелинейности в уравнение (34) вышли новые неизвестные моменты третьего порядка  $\langle \lambda_{ij\alpha\beta}^{0(1)} u_{\alpha\beta}^{0(1)} \lambda_{pqmn}^{0(2)} \rangle$ . Для их определения на базе уравнений (34) составить соответствующие уравнения и решать их совместно с (34), но они будут содержать уже неизвестные трехточечные моменты четвертого порядка. И т.д. На каждом шаге таких построений система будет незамкнутой – будет содержать неизвестные моменты более высоких порядков.

Очевидный выход – пренебрежение моментами  $n+1$ -го порядка в уравнениях  $n$ -го порядка относительно искомых моментов. Если пренебречь моментами выше второго порядка, то получим *корреляционное приближение* или *корреляционную теорию*. Ответ на вопрос о применимости этой теории – оценка отбрасываемых моментов третьего порядка.

Для нормального закона распределения все моменты нечетных порядков равны нулю. Но для композиционных материалов закон распределения случайных полей далек от нормального. В некоторых случаях моменты третьего порядка равны нулю или малы из-за симметрии закона распределения.

***Считается, что корреляционная теория применима при малых флуктуациях модулей упругости по отношению к их математическому ожиданию.***

Уравнение равновесия (34) относительно моментов можно записать:

$$\langle \lambda_{ij\alpha\beta} \rangle B_{pqmn, \beta i}^{\alpha} (y_i) = -D_{pqmn, j}^{ij\alpha\beta} \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle. \quad (36)$$

Это уравнение записано в корреляционном приближении – нет моментов третьего порядка (сравни с (34)).

Здесь

$$\begin{aligned}
B_{pqmn}^\alpha(y_i) &= \langle u_\alpha^{0(1)} \lambda_{pqmn}^{i0(2)} \rangle; \\
D_{pqmn}^{ij\alpha\beta}(y_i) &= \langle \lambda_{ij\alpha\beta}^{i0(1)} \lambda_{pqmn}^{i0(2)} \rangle; \quad y_i = x_i^{(1)} - x_i^{(2)}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Закон Гука (23) для средних напряжений во введенных только что обозначениях запишется

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \lambda_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle = \langle \lambda_{ij\alpha\beta} \rangle \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle + B_{ij\alpha\beta, \beta}^\alpha(0). \tag{38}$$

Опять воспользуемся функцией Грина (32), тогда

$$B_{pqmn}^\alpha(y_i^{(1)}) = \int_V G_{cd, k}(y_i^{(1)} - y_i^{(2)}) D_{ijmn, k}^{lkpq}(y_i^{(2)}) dV^{(2)} \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \tag{39}$$

Поскольку  $D_{ijmn}^{lkpq}(\infty) = 0$ , то проинтегрировав (39) по частям, получим:

$$B_{pqmn}^\alpha(y_i^{(1)}) = \int_V G_{cd, k}(y_i^{(1)} - y_i^{(2)}) D_{ijmn}^{lkpq}(y_i^{(2)}) dV^{(2)} \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \tag{40}$$

Отсюда

$$B_{ij\alpha\beta, \beta}^\alpha(0) = \int_V G_{ml, kn}(-y_i) D_{ijmn}^{lk\alpha\beta}(y_i) dV \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \tag{41}$$

С учетом (38) и (41), находим тензор макроскопических модулей упругости

$$\lambda_{ij\alpha\beta}^* = \langle \lambda_{ij\alpha\beta} \rangle + \int_V G_{ml, kn}(-y_i) D_{ijmn}^{lk\alpha\beta}(y_i) dV. \tag{42}$$

Если композиционный материал состоит из изотропных компонентов, то

$$\lambda_{ij\alpha\beta} = \lambda \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} + \mu (\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}), \tag{43}$$

и в этом случае уравнение равновесия (26) примет вид:

$$\langle \mu \rangle u_{i,rr}^0 + (\lambda + \mu) u_{r,rj}^0 = -\lambda,_{,j}^0 \langle \varepsilon_{rr} \rangle - 2\mu,_{,r}^0 \langle \varepsilon_{jr} \rangle - (\lambda^0 \varepsilon_{rr}^0)_{,j} - 2(\mu^0 \varepsilon_{jr}^0)_{,r} = 0 \tag{44}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle \langle u_j^0(x_i + y_i) \chi_k^0(x_i) \rangle &= B_{jk}(y_i); \quad \langle \chi_j^0(x_i + y_i) \chi_k^0(x_i) \rangle = D_{jk}(y_i); \\ \chi_1^0 &= \lambda^0, \quad \chi_2^0 = \mu^0. \end{aligned} \quad (45)$$

Тогда (38), т.е. закон Гука, будет иметь вид:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \lambda \rangle \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + 2 \langle \mu \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle + B_{r1,r}(0) \delta_{ij} + B_{i2,j}(0) + B_{j2,i}(0). \quad (46)$$

Умножим уравнение равновесия (44), взятое в точке  $x_i + y_i$  на  $\chi_k^0(x_i)$  и проведем статистическое усреднение. Как всегда пренебрегаем моментами третьего порядка, тогда

$$\langle \mu \rangle B_{jk,rr}(y_i) + (\lambda + \mu) B_{rk,rj}(y_i) = -D_{ik,rj}(y_i) \langle \varepsilon_{rr} \rangle - 2D_{2k,r}(y_i) \langle \varepsilon_{jr} \rangle. \quad (47)$$

Теперь можно рассмотреть различные структуры стохастического композиционного материала с изотропными компонентами.

### 3. КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ СО СЛОИСТОЙ СТРУКТУРОЙ

Пусть  $x_1, x_2$  – плотность расположения слоев. Тогда корреляционные функции  $B_{ik}$  и  $D_{ik}$  зависят только от  $x_3$ , т.е. уравнение (47) принимает вид:

$$\langle \mu \rangle B_{jk,33}(y_3) + (\lambda + \mu) B_{3k,33} \delta_{j3} = -D_{1k,33}(y_3) \delta_{j3} \langle \varepsilon_{rr} \rangle - 2D_{2k,33}(y_3) \langle \varepsilon_{j3} \rangle. \quad (48)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} B_{jk,3}(0) &= -\frac{2}{\langle \mu \rangle} D_{2k}(0) \langle \varepsilon_{j3} \rangle \quad j = 1, 2 \\ B_{3k,3}(0) &= -\frac{1}{\langle \lambda + 2\mu \rangle} [D_{1k}(0) \langle \varepsilon_{rr} \rangle + 2D_{2k}(0) \langle \varepsilon_{33} \rangle] \end{aligned} \quad (49)$$

Подставляя (49) в закон Гука (46), получим



$$\begin{aligned}\langle \sigma \rangle_{jk} &= \chi_1^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{jk} + 2\chi_2^* \langle \varepsilon_{jk} \rangle + \chi_3^* \langle \varepsilon_{\bar{r}\bar{r}} \rangle \delta_{jk}; \\ \sigma_{33} &= \chi_4^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + (\chi_1^* - \chi_4^*) \langle \varepsilon_{\bar{r}\bar{r}} \rangle; \\ \sigma_{j3} &= \chi_5^* \langle \varepsilon_{j3} \rangle; \quad (j, k = 1, 2; \quad \varepsilon_{\bar{r}\bar{r}} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\end{aligned}\tag{50}$$

Здесь макроскопические свойства (т.е. упругие константы) определяются формулами:

$$\begin{aligned}\chi_1^* &= \langle \lambda \rangle - \frac{D_{11}(0) + 2D_{12}(0)}{\lambda + 2\mu}; \quad \chi_2^* = \langle \mu \rangle; \quad \chi_3^* = \frac{2D_{12}(0)}{\lambda + 2\mu}; \\ \chi_4^* &= \langle \lambda + 2\mu \rangle - \frac{D_{11}(0) + 4D_{12}(0) + 4D_{22}(0)}{\lambda + 2\mu}; \quad \chi_5^* = 2\langle \mu \rangle - \frac{2D_{22}(0)}{\langle \mu \rangle}.\end{aligned}\tag{51}$$

Для двухкомпонентного композиционного материала с объемными концентрациями  $c_1$ ,  $c_2$  и постоянными модулями  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  и  $\lambda_2$ ,  $\mu_2$  одноточечная плотность распределения имеет вид:

$$f_1(\lambda, \mu) = c_1 \delta(\lambda - \lambda_1) \delta(\mu - \mu_1) + c_2 \delta(\lambda - \lambda_2) \delta(\mu - \mu_2),\tag{52}$$

где  $\delta$  – функция Хевисайда.

Тогда выражения для эффективных модулей (51), определяемые на основе (3), (37) будут

$$\begin{aligned}\langle \lambda \rangle &= c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2; \quad \langle \mu \rangle = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2; \quad D_{11}(0) = c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2; \\ D_{12}(0) &= c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2) (\mu_1 - \mu_2); \quad D_{22}(0) = c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2.\end{aligned}\tag{53}$$

*Т.е. из-за эргодичности математические ожидания  $\langle \lambda \rangle$ ,  $\langle \mu \rangle$  получаются по теории смесей.*

#### 4. ВОЛОКНИСТЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Если материал – матрица, армированная длинными волокнами с направлением вдоль оси  $x_3$ , то корреляционные функции  $B_{ik}$  и  $D_{ik}$  зависят от координат

$x_1$  и  $x_2$  (в предыдущем случае для слоистого материала – только от  $x_3$ ). Уравнение (47) в этом случае распадается на два:

$$\langle \mu \rangle B_{jk,rr}(y_i) + (\lambda + \mu) B_{3k,rj}(y_i) = -D_{ik,rj}(y_i) \langle \varepsilon_{pp} \rangle - 2D_{2k,r}(y_i) \langle \varepsilon_{jr} \rangle; \quad (54)$$

$$\langle \mu \rangle B_{3k,rr}(y_i) = -2D_{2k,r}(y_i) \langle \varepsilon_{3r} \rangle; \quad i, j, r = 1, 2; \quad p = 1, 2, 3.$$

Принимая статистически изотропный характер расположения волокон в плоскости  $x_1 x_2$ , в результате интегрирования уравнений (54), т.е. решив их, находим:

$$B_{jk,n}(0) = -\frac{1}{4\langle \mu \rangle \langle \lambda + 2\mu \rangle} \left[ 2\langle \mu \rangle D_{ik}(0) \langle \varepsilon_{kp} \rangle \delta_{jn} - \langle \lambda + \mu \rangle D_{2k}(0) \langle \varepsilon_{pp} \rangle \delta_{jn} + 2\langle \lambda + 3\mu \rangle D_{2k}(0) \langle \varepsilon_{jn} \rangle \right]; \quad (55)$$

$$B_{3k,3}(0) = -\frac{1}{\langle \mu \rangle} D_{2k}(0) \langle \varepsilon_{3n} \rangle; \quad j, n = 1, 2; \quad p = 1, 2, 3.$$

И, наконец, подставляя (55) в закон Гука (46), получим зависимости между средними напряжениями и средними деформациями. Эти соотношения будут иметь вид (50), где макроскопические постоянные определяются формулами:

$$\chi_1^* = \langle \lambda \rangle - \frac{D_{11}(0) + 2D_{12}(0)}{\langle \lambda + 2\mu \rangle}; \quad \chi_2^* = \langle \mu \rangle - \frac{\langle \lambda + 3\mu \rangle D_{22}(0)}{2\langle \mu \rangle \langle \lambda + 2\mu \rangle};$$

$$\chi_3^* = \frac{\langle \lambda + 3\mu \rangle D_{22}(0)}{2\langle \mu \rangle \langle \lambda + 2\mu \rangle} - \frac{D_{12}(0) + D_{22}(0)}{\langle \lambda + 2\mu \rangle}; \quad (56)$$

$$\chi_4^* = \langle \lambda + 2\mu \rangle - \frac{D_{11}(0)}{\langle \lambda + 2\mu \rangle}; \quad \chi_5^* = 2\langle \mu \rangle - \frac{D_{22}(0)}{\langle \mu \rangle}.$$

## 5. МАТЕРИАЛЫ С ЗЕРНИСТОЙ СТРУКТУРОЙ

Для КМ с зернистой структурой со статистически изотропным расположением зерен, интегрируя (решая) уравнение (47), находим

$$B_{jk,n}(0) = -\frac{1}{15\langle\mu\rangle\langle\lambda+2\mu\rangle} \left[ (5\langle\mu\rangle D_{ik}(0) - 2\langle\lambda+\mu\rangle D_{2k}(0)) \langle\varepsilon_{pp}\rangle \delta_{jn} + 2\langle 3\lambda+8\mu\rangle D_{2k}(0) \langle\varepsilon_{jn}\rangle \right] \quad (57)$$

Подставляя результат в закон Гука (46), находим связь между  $\langle\sigma_{ij}\rangle$ , и  $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$ :

$$\langle\sigma_{jk}\rangle = \lambda^* \langle\varepsilon_{pp}\rangle \delta_{jk} + 2\mu^* \langle\varepsilon_{jk}\rangle, \quad (58)$$

где

$$\lambda^* = \langle\lambda\rangle - \frac{1}{3\langle\lambda+2\mu\rangle} \left[ 3D_{11}(0) + 4D_{12}(0) - \frac{4\langle\lambda+\mu\rangle}{5\langle\mu\rangle} D_{22}(0) \right];$$

$$\mu^* = \langle\mu\rangle - \frac{2\langle 3\lambda+8\mu\rangle D_{22}(0)}{15\langle\mu\rangle\langle\lambda+2\mu\rangle}. \quad (59)$$

– это макроскопические постоянные Ламе.

Все результаты корреляционных приближений справедливы для слабнеоднородных КМ.

Уточнить корреляционное приближение можно

- за счет учета моментов более высокого порядка (третьего, четвертого и т.д.)
- за счет учета моментов более высокого типа (трехточечных, четырехточечных и т.д.), но это труднее.

Весь изложенный выше материал курса посвящен рассмотрению методов оценки эффективных упругих характеристик стохастических композитов. Но научное обеспечение инноваций в современное материаловедение требует разработки способов оценки структурных и технологических характеристик изготовления композиционных материалов, обеспечивающих конструирование ма-

териалов с заданными свойствами. Кроме того, требуется учет возможности неупругого поведения отдельных компонентов стохастических композитов.

## **6. ОЦЕНКА ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОСТИ ОБЪЕМА МАТЕРИАЛА**

Согласование размеров элементов структуры наполненного композитного материала с размером представительного объема позволяет, с одной стороны, оценить возможность применения макроскопических эффективных механических свойств композиционного материала, для расчета конкретных изделий, а с другой стороны – предложить рекомендации, связывающие размеры частиц наполнителя с величиной рассматриваемого изделия.

Все изложенные выше требования к относительным размерам представительного объема, масштаба неоднородности внешней нагрузки и элементов микроструктуры композитного материала, позволяющие производить оценки эффективной макроскопической реакции композитного объекта, имеют качественный характер. Для статистически однородного композиционного материала макроскопические свойства, характеризующие механическую реакцию материала в поле внешних воздействий, слабо меняющихся в пределах элемента макроскопической структуры, позволяют поставить эквивалентную сплошную среду в соответствие рассматриваемому многофазному материалу. Представительный объем, рассматриваемый при такой процедуре, определяется как достаточно большой по сравнению с характерными размерами составляющих материал фаз, таких, например как размер частиц и пор [14].

Проблема определения представительного объема двухфазного композитного зернистого материала рассмотрена в [15]. Решается задача определения количества случайных дискретных двухфазных элементов дискретной системы, позволяющего осуществить переход к соответствующей эффективной сплошной среде, а значит обеспечить однородную реакцию рассматриваемого композитного объекта.

Очевидно, что вследствие стохастической природы композита дать точный ответ на такой вопрос невозможно. Ставится следующая постановка вопроса: какое количество дискретных элементов надо рассматривать, чтобы дисперсия свойств материала не выходила за заданные пределы? Решение задачи ищется в процессе проведения вычислительных экспериментов для модельного композитного материала. *Если основные параметры, определяющие дисперсию свойств представительного объема, для реального и модельного композитов совпадают, то статистические характеристики, полученные в результате вычислительного эксперимента, могут быть использованы затем для описания свойств реального объекта из композитного материала как объекта из сплошной среды.* В работе [15] в качестве параметров, определяющих дисперсию свойств, рассмотрены следующие: свойства частиц, их объемного распределения, связей между ними, распределения их размеров. Исследования проведены на 2D прямоугольниках, упакованных сферами двух типов со случайными размерами. Принят нормальный закон распределения размеров сфер. Появление каждого из двух типов считается равновероятным. В проведенном исследовании [15] сферическая форма частиц использована только для создания стохастической модели их соединения.

Предполагается, что частицы не проскальзывают друг относительно друга. Свойства соединения частиц оцениваются по жесткости контакта двух сфер [16]. Радиус поверхности контакта одинаковых сфер определяется, как

$$a = (RKN)^{1/3}. \quad (*)$$

Здесь  $R$  – радиус сферы,  $N$  – нормальная сила,  $K$  – константа,

$$K = \frac{3(1-\nu^2)}{4E}.$$

Нормальная сила сжатия  $N^*$ , необходимая для достижения напряжения в центре контактной площадки, равной пределу текучести материала  $\sigma_y$ , определяется соотношением [16]

$$N^* = \left( \frac{2}{3} \sigma_y \right)^3 (KR)^2,$$

а зона контакта частиц (\*), соответствующая началу текучести, определится, как

$$a^* = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \sigma_y KR.$$

Нормальная и касательная жесткости контакта сфер, соответствующие началу текучести, определяются соотношениями

$$k_n^* = \frac{4\mu a^*}{1-\nu} \text{ и } k_\tau^* = \frac{16\mu a^*}{3(2-\nu)}.$$

Существенным является то, что жесткости контакта частиц, используемые для оценки свойств связи частиц в модели композита [15], пропорциональны их размерам. Хотя эти жесткости и не позволяют точно определить значения сил и соответствующих им смещений макросистемы, однако позволяют оценить соотношения между силами и их распределением для сближения статистических характеристик при переходе от микро- к макросистеме. Для двухфазной среды со стохастическим составом и структурой передача сил внутри образца является неоднородной, что оказывает существенное влияние на макросвойства. Модель композитного зернистого материала [15] отражает три основных свойства зернистых (порошковых) материалов: двухфазность, случайность размеров частиц и случайность их соединений. Полученная в результате вычислительных экспериментов с образцами модельного композита зависимость стандартного отклонения эффективного модуля Юнга от числа частиц  $n$ , уместающихся в сечении представительного объема двухфазного композитного зернистого материала взята из [15] и приведена на рисунке 1.

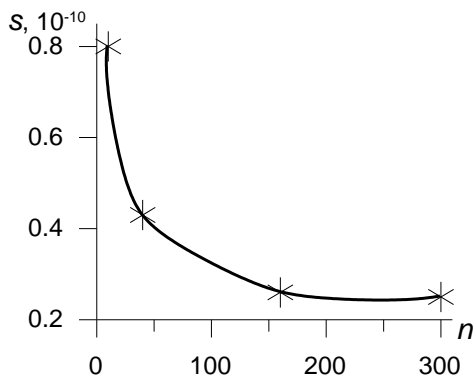


Рис.1. Зависимость стандартного отклонения эффективного модуля Юнга от количества частиц в сечении представительного объема.

Как видно, с ростом количества частиц степень разброса уменьшается, однако становится достаточно устойчивой лишь, когда число частиц в сечении представительного объема превосходит 200, оставаясь достаточно большой вплоть до количества 300 частиц.

Подобный анализ позволил связать размер представительного объема композита с числом элементов структуры в его сечении (частиц компонентов и пор, например). И наоборот (!), для заданного размера макроскопического элемента композитной структуры из приведенного выше анализа можно оценить требуемую дисперсность компонентов.

## 7. ВЯЗКОУПРУГИЕ СВОЙСТВА

Поведение многих КМ на полимерной основе не может быть описано в рамках теории упругости. Их поведение определяется *реологическими* (временными) эффектами, учет которых возможен с привлечением аппарата вязкоупругости [13]. В случае линейной вязкоупругости обобщенный закон Гука имеет вид:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda}_{ijmn} \varepsilon_{mn},$$

где 
$$\tilde{\lambda}_{ijmn} = \lambda_{ijmn} \left[ f - \int_0^t \Lambda_{ijmn} f(\tau) d\tau \right] \quad (60)$$

Здесь  $\tilde{\lambda}_{ijmn}$  – тензор линейных операторов вязкоупругости,  $\lambda_{ijmn}$  – тензор мгновенных модулей упругости,  $\Lambda_{ijmn}$  – ядра вязкоупругих операторов.

Для материалов со случайно расположенными неоднородностями тензоры  $\lambda_{ijmn}$  и  $\Lambda_{ijmn}$  случайным образом зависят от координаты пространства. Тензор макроскопических операторов вязкоупругости определим

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ijmn}^* \langle \varepsilon_{mn} \rangle \quad (61)$$

Опять надо решать задачи, как в случае упругого поведения.

Т.к. операция интегрирования по времени перестановочна с интегрированием по пространству и статистическим усреднением, то для решения вязкоупругой задачи можно воспользоваться решением упругой задачи и лишь в окончательных результатах заменить упругие модули на вязкоупругие операторы – т.е. можно воспользоваться принципом *Вольтерра*.

Для этого в выражениях для макроскопических упругих модулей подставить соответствующие интегральные операторы и произвести расшифровку. *Это легко сказать – нужно придумать алгебру вязкоупругих операторов.*

Пусть наполнитель деформируется упруго, а матрица обладает вязкоупругими свойствами – это вполне рабочая модель для широкого круга КМ.

Сдвиговые деформации при комнатной температуре достаточно хорошо описываются линейным интегральным оператором – это для эпоксидно-малеиновой среды:

$$\bar{\mu}_2 = \mu_2 [1 - \xi \cdot \bar{\mathcal{E}}_\alpha(\beta)] \quad \mathcal{E}_\alpha(\beta) = \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(\beta + -\tau) d\tau, \quad (62)$$

где  $\mathcal{E}_\alpha$  – дробно-экспоненциальная функция Работнова.



$$\mathcal{E}_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (\beta)^k \frac{t^{k(\alpha+1)}}{\Gamma(k+1)\alpha+1},$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция,  $\zeta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – параметры.

Для нашей смолы  $\zeta=0,0564 r^{-1/2}$ ,  $\alpha=0,5$ ,  $\beta=-0,1764 r^{-1/2}$  [13]. При  $\alpha=0$  дробно-экспоненциальная функция Работнова  $\mathcal{E}_\alpha$  – вырождается в экспоненту. (62) – револьвентный оператор. Осталось взять соотношения (59) для зернистого материала и подставить вместо упругих модулей соответствующие вязкоупругие операторы, с учетом алгебры вязкоупругих операторов.

## 8. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА

Это локальная модель разрушения [17, 18]. Критерии разрушения:

1. Глобальные – исследования чего-либо в вершине дефекта
2. Локальные – исследования чего-либо в зоне разрушения

Разрушение композиционного материала возможно: внутризеренное; вязкое; сколом.

1. **внутризеренное** – разрушение локализуется в отдельных зернах с последующим развитием. Часто этот процесс связан с химическими сегрегациями. Сейчас мы этот случай рассматривать не будем.

### 2. **вязкое разрушение**

Существует 3 стадии:

- снятие сил сцепления, зарождение дефекта;
- рост полостей
- слияние полостей или наступление состояния неустойчивости.

### 3. **скол** – появившиеся дефекты развиваются в магистральную трещину

Реальное разрушение возможно как по любому из этих трех механизмов, так и по любой их комбинации. Тип разрушения определяется как структурой материала, так и условиями нагружения или деформирования, температурой и т.п.

*Сталь при низких температурах разрушается сколом, при высоких температурах – вязко. При температуре перехода «скол - вязко» предел текучести становится меньше напряжения разрушения сколом.*

Анализ разрушения сколом с использованием вероятностной модели базируется на теории хрупкой связи, разработанной Вейбуллом.

### **Исходные положения теории хрупкой связи**

1. Вероятность обнаружения серьезного дефекта в единичном объеме материала постоянна по всему объему. Это значит, что рассматриваемый материал статистически однороден с точки зрения наличия дефектов, способных спровоцировать разрушение.

2. Разрушение от критического дефекта приводит к общему разрушению. Вот почему Вейбулл назвал такой дефект серьезным.

Обозначим  $f_1(\sigma)$  – вероятность разрушения от одного дефекта под напряжением  $\sigma$ .

Тогда  $1 - f_1(\sigma)$  – вероятность того, что разрушения не будет при наличии одного дефекта;  $[1 - f_1(\sigma)]^2$  – вероятность того, что материал останется целым под напряжением  $\sigma$  при наличии двух дефектов;  $[1 - f_1(\sigma)]^{Nd}$  – вероятность того, что разрушения нет при наличии  $Nd$  дефектов. Таким образом, при наличии  $Nd$  дефектов вероятность разрушения материала, нагруженного напряжением  $\sigma$ , равна

$$f_{Nd}(\sigma) = 1 - [1 - f_1(\sigma)]^{Nd}$$

Отсюда  $1 - f_{Nd}(\sigma) = [1 - f_1(\sigma)]^{Nd}$

Мы знаем предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{x}{n} \right)^n = \exp(-x).$$

Тогда в пределе при  $Nd \rightarrow \infty$  можно записать

$$1 - f_{Nd}(\sigma) = \exp[-Nd \cdot f_1(\sigma)]. \quad (63)$$

Согласно положению 1 теории хрупкой связи, количество дефектов  $Nd$  пропорционально объему. Следовательно, соотношение (63) можно записать в виде

$$f_{Nd}(\sigma) = 1 - \exp[-V \cdot \Phi_w(\sigma)], \quad (64)$$

где  $V \cdot \Phi_w(\sigma) = Nd \cdot f_1(\sigma)$ .

Объем  $V$  здесь представляет эффективный объем, где развиваются разрушения, могущие привести к сколу! – *ячейка разрушения Новожилова!*  $\Phi_w$  – некоторая функция Вейбулла.

Величина  $f_{Nd}(\sigma)$  является мерой вероятности, которую часто обозначают как  $P_f$ . Таким образом,

$$P_f = 1 - \exp[-V \cdot \Phi_w(\sigma)] \quad (65)$$

Для функции  $\Phi_w$  Вейбулл предложил эмпирическое выражение  $\Phi_w(\sigma) = [(\sigma - \sigma_{pf,0}) / \sigma_{n0}]^{m1}$ , для  $\sigma > \sigma_{pf,0}$

где  $\sigma_{pf,0}$  – уровень напряжения, для которого вероятность разрушения равна нулю,  $\sigma_{n0}$  – коэффициент нормализации,  $m1$  – модуль Вейбулла (т.е. тоже какой-то коэффициент).

Когда пороговое значение  $\sigma_{pf,0}$  равно нулю, эта модель сводится к модели Вейбулла с двумя параметрами. Вероятность разрушения в этом случае равна

$$P_f = 1 - \exp \left[ - \int_V (\sigma / \sigma_{n0})^{m1} dV \right], \quad \sigma \geq \sigma_{pf,0}. \quad (66)$$

*Здесь мы от произведения  $V \cdot \Phi_w$  в формуле (65) перешли к интегрированию по представительному объему (!) и это очень важно, т.к. определение представительного объема фундаментально для всей механики, для определения принципов конструирования, для задания критериев оптимизации и т.д.*

В механике разрушения модель (66) представляется модифицированным соотношением

$$P_f = 1 - \exp \left[ - \left( K_I / K_{I,n0} \right)^{m2} \right] \quad \text{или}$$

$$P_f = 1 - \exp \left[ - \left( J_I / J_{I,n0} \right)^{m_2} \right] , \quad (67)$$

где  $K_{I,n0}$ ,  $J_{I,n0}$  – коэффициенты нормализации, соответствующие значению трещиностойкости материала, для которого вероятность разрушения равна 0,63;  $K_I$ ,  $J_I$  – соответственно коэффициент интенсивности напряжений и  $J$ -интеграл.

Переход от формулы (66) к формуле (67) означает, как это показал К. Уоллин [19], что эффективный объем  $V_{eff}$ , где развивается разрушение, является исключительно функцией параметра  $K_I$ , или  $J_I$ . Уоллин предположил, что

$$V_{eff} = C_1 K_I^4 . \quad (68)$$

Параметр  $m_1$  является мерой неоднородности распределения дефектов, а  $m_2$  представляет разброс результатов измерения вязкости разрушения.

Теперь надо связать статический критерий с детерминированным. Рассмотрим *локальный энергетический критерий Си II* [20]. В случае разрушения смешанного типа (т.е. I, II или III) плотность энергии упругой деформации выражается через коэффициенты интенсивности напряжений

$$W = \frac{1}{r} \left( a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 + a_{33} K_{III}^2 \right),$$

$$W = S/r$$

Си определил коэффициент плотности энергии  $S = W \cdot r$ .

Этот параметр можно использовать как *критерий разрушения*:

1) Направление распространения трещины в любой точке ее фронта определяется минимальным значением коэффициента плотности энергии деформации.

2) Распространение трещины идет в направлении, определенном гипотезой 1, когда величина  $S$  достигнет критического значения  $S_1$ .

Главное преимущество теории Си II – связь с типами трещин (I, II, III) и условие выбора направления движения (или развития) дефекта.

Для упруго-пластической механики разрушения Теокарис [21] считает, что предпочтительнее использовать плотность энергии изменения объема  $W_V$ :

$$S = W_V \cdot r.$$

Здесь Теокарис проводит аналогию с инженерной теорией разрушения и детализирует критерий Си II.

Условие разрушения

$$\frac{\partial S}{\partial \Theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \Theta^2} = 0, \quad \text{при } \Theta = \Theta_0,$$

где  $\Theta$  - угол, образуемый направлением дефекта и вектором  $r$ , направленным от вершины трещины до точки, где вычисляется локальная плотность энергии деформирования.

Поскольку энергия – функция квадратичная, то существует два минимума  $S$  в зависимости от  $\Theta$ . Один минимум соответствует зоне, где  $\sigma_{\Theta\Theta}$  положительно, а другой – где  $\sigma_{\Theta\Theta} < 0$ . Критерий Си II справедлив в зоне, где  $\sigma_{\Theta\Theta} > 0$ , т.к. эти напряжения обеспечивают раскрытие трещины (т.е. «разрывают» дефект).

Если трещина расположена в бесконечной пластине и плоскость трещины образует угол  $\beta$  с направлением нагружения  $\sigma$ , то критерий Си II позволяет написать

$$\sigma_C^2 \cdot l = (\beta/2) K_{IC}^2.$$

Плотность вероятности существования дефекта с размером выше критического (а такой дефект мы назвали серьезным) при действии приложенного напряжения  $\sigma$  определяется соотношением

$$f_1(\sigma) = \int_0^l \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} f_d(l) dl d\beta. \quad (69)$$

Определим вид распределения дефектов длиной  $l$ :

$$f_d(l) = \frac{C_2^{m_i-1}}{(m_i-2)!} l^{-m_i} l^{-C_2/l}, \quad (70)$$

где  $C_2$  – масштабный параметр,  $m_i$  – показатель уменьшения плотности дефектов

Подставим (70) в (69), проинтегрируем, и для малых значений  $\sigma$  получим

$$f_1(\sigma) = \frac{1}{(m_i)!} \frac{\sigma^2 \pi}{K_{IC}^2} \left[ 1 - \frac{\pi \sigma^2 C_2 (m_i - 1)}{K_{IC}^2 (m_i + 1)} \right].$$

С учетом того, что  $P_f = 1 - \exp[-Nd \cdot f_1(\sigma)]$ , можно записать

$$P_f = 1 - \exp \left[ -Nd \frac{C_2^{m_i-1}}{(m_i)!} \left( \frac{\pi \sigma^2}{K_{IC}^2} \right)^{m_i-1} \right].$$

Это выражение представимо в виде

$$P_f = 1 - \exp \left[ -C_2 Nd (\sigma)^{2m_i-2} \right].$$

Приложение

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

В приложении приведен далеко не полный список элементов теории вероятности!

**Событие** – какой-либо качественный результат опыта. Например, при испытании образцов на растяжение событием можно считать превышение напряжения в каком-либо образце заданного уровня. Пусть в нашем опыте некоторое событие  $A$  произошло  $m$  раз из общего числа  $N$  (например, в партии из  $N$  образцов предел прочности превысил табличное значение  $m$  раз). Относительная частота появления события  $A$  определяется отношением

$$n = m/N.$$

С ростом  $N$  меняется и  $n$  при этом с увеличением  $N$  относительная частота стремится, в среднем, к некоторому неслучайному пределу  $P$ . Это свойство стабилизации значений относительных частот  $n$  с ростом  $N$  является общим для многих практически значимых опытов и называется **законом больших чисел**. Величина  $P$  называется **вероятностью** события  $A$ . Относительная частота  $0 \leq n \leq 1$ , значит и  $0 \leq P \leq 1$ .

Случайное событие – такое, вероятность которого  $0 < P < 1$ . При  $P=0$  – событие невозможно,  $P=1$  – событие достоверно. Неслучайные события (в том числе невозможные и достоверные) называются детерминированными.

События  $A_1, A_2, \dots$  **совместны**, если в результате опыта могут появляться события  $A_1$  и  $A_2$ , и т.д. Совместное появление событий  $A_1, A_2$ , определяется их произведением, т.е.  $P(A_1 \cdot A_2)$  – **вероятность совместного появления событий**  $A_1$  и  $A_2$ .

Событие, при котором ожидается появление событий  $A_2$  после появления событий  $A_1$  выражается частным  $A_1/A_2$ . Вероятность его  $P(A_1/A_2)$  называется **условной вероятностью**.

Формула  $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) P(A_2/A_1) = P(A_2) P(A_1/A_2)$  выражает **правило умножения вероятностей**.

События  $A_1$  и  $A_2$  называют **статистически независимыми**, если

$$P(A_2/A_1) = P(A_2), P(A_1/A_2) = P(A_1).$$

Для статистически независимых событий правило умножения

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) P(A_2).$$

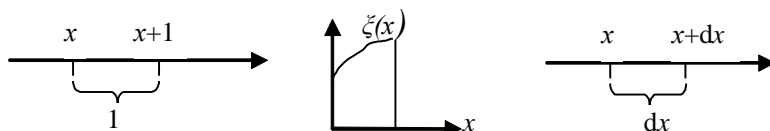
Событие  $A$ , заключающееся в том, что может появиться только событие  $A_1$  или только событие  $A_2$ , определяется как сумма этих событий  $A = A_1 + A_2$ . **Вероятность суммы** событий  $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2)$ . Если события  $A_1$  и  $A_2$  **несовместны**, то  $P(A_1 \cdot A_2) = 0$ . Для таких событий

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

**Случайной** называется величина  $\xi$ , которая при заданных условиях опыта может принимать различные значения, называемые ее **реализацией**. Реализации являются детерминированными величинами, каждая из которых принимает единственное вполне определенное значение. Случайная величина **количественно** характеризует опыт. Пусть случайная величина может принимать любые значения в интервале  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ,  $f(x)$  – вероятность того, что величина  $\xi$  находится в единичном интервале с абсциссой центра равной  $x$  ( $P(x < \xi$

$<x+1)=f(x)$ ), тогда  $f(x)dx$  – вероятность того, что  $x < \xi < x+dx$  ( $P(x < \xi < x+dx)=f(x)dx$ ). (т.к. в малом все линейно).

Вероятность попадания в интервал  $(-\infty, x)$ :



$$P(-\infty < \xi < x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx. \quad (*)$$

Из (\*) следует, что вероятность того, что случайная величина  $\xi$  меньше определенного значения  $x$ , является функцией переменной  $x$ :

$$P(\xi < x) = F(x),$$

называемой **интегральным законом распределения случайной величины**.

Производная от функции  $F(x)$ :  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$  называется **плотностью распределения**. Это **дифференциальный закон распределения случайной величины**.

**Начальный момент** порядка  $k$ :

$$m_k = \langle \xi^k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

где  $m_1$  – **математическое ожидание**.

**Центральный момент** порядка  $k$ :

$$m_k^0 = \langle \xi - m_1 \rangle^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^k f(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

При  $k=2$ ,  $m_2^0$  называется **дисперсией**  $D = m_2^0$ .

$m = \sqrt{m_2^0}$  – **стандартное отклонение** случайной величины.



Относительная величина разброса реализации оценивается по значениям *коэффициентов вариации*:

$$I = \sqrt{\frac{m_2^0}{m_1}} = \sqrt{\frac{D}{m_1}}, \quad m_1 \neq 0.$$

Степень неоднородности тем меньше, чем меньше коэффициенты вариации.

Пусть  $S$  – допустимое напряжение. По физическому смыслу предела текущей все реализации случайной величины  $\sigma_T$  положительны, поэтому вероятность того, что  $\sigma_T < S$  определится выражением:

$$P(\sigma_T < S) = \int_0^S f_{\sigma_T}(y) dy.$$

Надо задать закон распределения, из опытов определить параметры и подсчитать  $P(\sigma_T < S)$ .

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Масштаб корреляции. Чем определяется. Как оценивается. Где применяется.
2. Основные понятия метода линеаризации. Что определяется методом линеаризации.
3. Основные понятия метода моментов.
4. Корреляционное приближение.
5. Понятие статистического осреднения.
6. Свойство эргодичности.
7. Как определяется закон распределения случайной функции.
8. Теория хрупкой связи Вейбулла.
9. Основные термины стохастической механики.

Помимо указанных вопросов предлагается рассмотреть в качестве контрольных все понятия, выделенные курсивом в настоящем пособии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Voigt W.** Lehrbuch der Kristallphysic. –B.: Teubner, 1928. – 962 s.
2. **Reuss A.** Berechnung der Fliebgrense von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // Z. Angew. Math. u. Mech. – 1929. – Bd. 9, N. 4. – S. 49-64.
3. **Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н.** К теории упругих свойств поликристаллов // ЖЭТФ. – 1946. – Т. 16, вып. 11. – С. 967-980.
4. **Ломакин В.А.** Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
5. **Хорошун Л.П., Вецало Ю.А.** К теории эффективных свойств идеальнопластических композитных материалов // Прикл. Мех. – 1987. – Т. 23, № 1. – С. 86-90.
6. **Шермергор Т.Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
7. **Ванин Г.А.** Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наукова Думка, 1985. – 304 с.
8. **Beran M.** Statistical continuum theories. – N.Y.: Interci. Publ., 1968. – 493 p.
9. **Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А.** Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. / Под ред. Ю.В. Соколкина. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 288 с.
10. **Григорян С.С.** Об осреднении физических величин. // ДАН СССР. – 1980. – Т. 254, № 4. – С. 1081-1085.
11. **Седов Л.И.** Механика сплошной среды. В 2 т. – М: Наука, 1973. 3 т.
12. **Лейцин В.Н., Сидоренко Ю.Н.** Оценка механических свойств многокомпонентных материалов стохастической структуры // Письма в ЖТФ. – 1999. - том 25, вып. 12. – С. 89-94.
13. **Механика композитных материалов и элементов конструкций.** В 3-х т. Т. 1. Механика материалов / Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. – Киев: Наук. думка, 1982. – 368 с.

14. **Hashin Z.** Analysis of composite materials – a survey // J. of Appl. Mech. – 1983. – Vol. 50. – P. 481-505.
15. **Виноградов О.** Представительный объем в микромеханике композитных материалов с порошкообразным наполнителем // Механика композитных материалов. - 2001. – том 37, № 3. – С. 389-397.
16. **Mindlin R.D. and Deresiewicz H.** Elastic spheres in contact under varying oblique forces // J. of Appl. Mech. – 1953. – Vol. 20, No 1. – P. 327-344.
17. **Г. Плювинаж** Механика упруго-пластического разрушения. – М.: Мир, 1993.
18. **Weibull W.** A statical theory of the strength of materials. – Royal Swedish Institution of Engineering Research Report. – 1939. – No 151.
19. **Wallin K.W.** The scatter in  $K_{Ic}$  results. – Engineering Fracture Mechanics. – 1984. – V. 9, No 6. – Pp. 1085-1093.
20. **Sih G.C.** Strain energy density factor applied to mixed crack problem. - International Journal of Fracture. – 1974. – V. 10, No 3. – Pp. 305-321.
21. **Theocaris P.S., Andrianopollos N.D.** The Mises elastic-plastic boundary as the core in fracture criteria. – Engineering Fracture Mechanics. – 1982. – V. 16, No 5. – Pp. 439-447.