18. $y'' + 3y' + 2y = 1/(e^x+1)$; $y = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$;
19. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$; $y = x(C_1 + C_2\ln|x|) + 2x^3$;
20. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$; $y = C_1\cos(2\ln|x|) + C_2\sin(2\ln|x|) + 2x$;
21. $x^3y'' - 2xy = 6\ln x$; $y = C_1x^2 + [C_2 - (2/3)\ln x - \ln^2 x]/x$;
22. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$; $y = x^2[C_1\cos(\ln|x|) + C_2\sin(\ln|x|) + 3]$;
23. $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$; $y = C_1x^3 + C_2x^{-2} + x^3\ln|x| - 2x^2$;
24. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$; $y = C_1x^2 + C_2x^{-1} + 0.1\cos(\ln x) - 0.3\sin(\ln x)$;
25. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$; $y = (x-2)^2(C_1 + C_2\ln|x-2|) + x - 1.5$;

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы. - М.: Наука, 1987, 600 с.
2. А.А.Самарский. Ввведение в численные методы. - М.: Наука, 1987, 288с.
3. Н.В.Копченова, И.А.Марон. Вычислительная математика в примерах и задачах. - М.: Наука, 1972, 368 с.
4. Н.Н.Калиткин. Численные методы. - М.: Наука, 1978 .
5. А.Ф.Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1979,128 с.

Содержание

Задание 1.	Улучшение сходимости ряда по методу Куммера	3
Задание 2.	Вычисление суммы степенного ряда	4
Задание 3.	Вычисление корней кубического многочлена	5
Задание 4.	Построение интерполяционного многочлена Лагранжа по схеме Эйткена	6
Задание 5.	Приближение функций, заданных таблицей, по методу наименьших квадратов	8
Задание 6.	Вычисление определенных интегралов по формулам трапеции и Симпсона	10
Задание 7.	Вычисление интеграла с помощью квадратурной формулы Гаусса	11
Задание 8.	Численное дифференцирование. Некорректность операции численного дифференцирования	12
Задание 9.	Методы решения нелинейных уравнений	13
Задание 10.	Нахождение зависимости корней уравнения от параметра	15
Задание 11.	Решение системы линейных уравнений	16
Задание 12.	Методы решения системы нелинейных уравнений	19
Задание 13.	Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка	21
Задание 14.	Решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка	24
ЛИТЕРАТУРА		28

ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Задания и методические указания

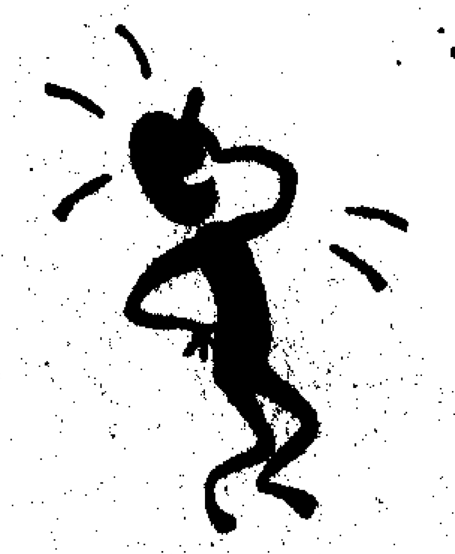
/Томский государственный университет – Томск, 1999 – 28 с.

Подписано в печать 28.10.1999 г. Тираж 100 экз.

Заказ № 258 УОП ИПО ТГУ, Томск, ул. Никитина, 4

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физико-технический факультет

1+1=3



Просьба далеко и навсегда не уносить!
Незабвенной памяти первых пропавших экземпляров

А.М.Тимохин, Л.Л.Миньков, Н.Р.Минькова

ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Задания и методические указания

ТОМСК 1999

РАССМОТРЕНО и ОДОБРЕНО методической комиссией физико-технического факультета

Протокол № 8 от 14.10. 1999 г.

Председатель комиссии
профессор, доктор физ.-мат.наук В.А.Скрипняк

Утверждаю

Декан физико-технического факультета
профессор, доктор физ.-мат.наук Э.Р.Шрагер

Задания и методические указания содержат подбор заданий, предназначенных для обучения основам численных методов, а также для закрепления навыков программирования. Каждое задание содержит краткую справочную информацию, призванную помочь при самостоятельной работе студентов.

Задания и методические указания разработаны для студентов 2-го курса физико-технического факультета Томского госуниверситета, обучающихся по программам базового образования 553300 "Прикладная механика", 553100 "Техническая физика".

Составители:

Ст. преподаватель А.М.Тимохин

Доцент, канд. физ.-мат. наук Л.Л.Миньков

Ст. преподаватель Н.Р.Минькова

Рецензент:

Декан, доктор физ.-мат. наук Э.Р.Шрагер

Задание №1.

УЛУЧШЕНИЕ СХОДИМОСТИ РЯДА ПО МЕТОДУ КУММЕРА.

Дан числовой ряд
где p и q параметры.

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+pk+q}, \tag{1}$$

1) Вычислите частичные суммы ряда $S_n^{(1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+pk+q}$ при $n = 20, 40, 60, \ldots, 200$.

2) Проведите улучшение сходимости ряда (1) по методу Куммера, взяв за основу ряд

$$S^*=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+a+1)}\equiv\frac{1}{1+a} \tag{2}$$

Для этого, вычитая из ряда (1) ряд (2), найдите разность

$$S-S^* = S-\frac{1}{1+a} = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k^2+pk+q}-\frac{1}{(k+a)(k+a+1)}\right\} = \tag{3}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(2a-p+1)+a(a+1)-q}{(k^2+pk+q)(k+a)(k+a+1)}$$

Далее, полагая в числителе ряда (3) коэффициент при k равным нулю, получите $a = (p - 1)/2$, (при этом p должно быть таким, чтобы оставшиеся два слагаемых в числителе не равнялись нулю, т.е. $(p - 1)/4 - q = 0$) Тогда

$$S=\frac{2}{p+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(p^2-1)/4-q}{(k^2+pk+q)(k+a)(k+a+1)} \tag{4}$$

Вычислите частичные суммы $S_n^{(2)}$ ряда (4) при n, указанных в п.1

3) Проведите улучшение сходимости ряда (4) по методу Куммера, взяв за основу ряд

$$S^{**}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+a-1)(k+a)(k+a+1)(k+a+2)}\equiv\frac{1}{3a(1+a)(2+a)}$$

Вычислите частичные суммы $S_n^{(3)}$ полученного ряда при значениях n, указанных в п.1.

4) Составьте таблицу и проанализируйте результаты.

n	$S_n^{(1)}$	$S_n^{(2)}$	$S_n^{(3)}$

Выполните задание, задав параметры p и q по формулам: $p = 2\sin(Ni/5)$; $q = 0.1i + \sin(Ni/5)$, где i - номер группы (от 1 до 6), N - порядковый номер в списке группы.
Вычисления на ЭВМ проведите с максимально возможным количеством значащих цифр.
Оцените аналитически, сколько членов исходного ряда дают его значение с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$. Проведите такие же оценки для рядов $S^{(2)}$ и $S^{(3)}$. Сравните полученные оценки с результатами численного счета.

Ответьте на вопросы:
а) За счет чего улучшается сходимость ряда при применении метода Куммера?
б) Какая комбинация следующих рядов улучшит сходимость первого из них по методу Куммера?

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+pk+q},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma+\beta}{(\sigma k+\beta)(\sigma k+\beta+\sigma)}=\frac{1}{\sigma}$$

Задание №2.
ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ СТЕПЕННОГО РЯДА.

Дан числовой ряд
$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(k^2+pk+q)x^k \qquad (1)$$

1) Вычислите значения частичных сумм при $n=0,40,60,80,100$ для $x_i=0.5+0.1i$, $(i = 1..4)$. $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+pk+q)x_i^k$
2) Найдите точное значение суммы ряда (1) при указанных значениях x.
3) Нарисуйте график $S_n(n)$ и $S(n)$ при разных x. Проанализируйте результаты.

Указание:
Для нахождения точного значения суммы ряда (1) использовать формулу суммы бесконечно убывающей прогрессии:

$$\sum_{k=1}^{\infty}x^k=\frac{x}{(1-x)}$$

и формулы, получаемые из нее путем вычисления производных 1-го и 2-го порядков.

Выполните задание для значений параметров p и q, задаваемых так же, как и в Задании №1.

Задание №3.
ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ КУБИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА

Многочлен $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ на отрезке $[a,b]$ имеет три корня x_k $(k=1,2,3)$.
1) Разбейте отрезок $[a,b]$ на $N = 20$ равных частей, составьте таблицу значений многочлена и постройте график $P(x)$.
2) Пользуясь аналитическими формулами решения кубического уравнения, найдите все корни x_k многочлена. Точность нахождения корней проверьте вычислением значений $P(x_k)$.

Алгоритм нахождения корней кубического уравнения.

Замена $x = y + \xi$ приводит уравнение $P(x)=0$ к виду:
$$P_1(y) = y^3 + py + q = 0 \qquad (1)$$
Замена $y = Lz$, где, приводит уравнение $P_1(y) = 0$ к виду:
$$P_2(z) = 4z^3 - 3z - m, \quad \text{где} \quad m = -4q/L^3, \qquad L=\sqrt{-4p/3}$$

Замена $z = \cos(\varphi)$ приводит уравнение $P_2(z)=0$ к виду $\cos(3\varphi) = m$, откуда
$$\varphi = {}^1/_3 \arccos(m).$$
Следовательно, корни исходного уравнения $P(x)=0$ могут быть найдены по формуле:
$$x = \xi + L\cos[{}^1/_3(\arccos(m) + 2\pi k)], \qquad k=1,2,3$$
Замечания.
1) При выполнении указанных выше преобразований требуется вычисление полиномов. Экономным способом их вычисления является метод Горнера, который состоит в следующем. Полином n-ой степени:
$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \qquad (2)$$
переписывается в виде
$$P_n(x) = \underbrace{(\dots(\underbrace{(\underbrace{(a_0x + a_1)}_{b_1}x + a_2)}_{b_2}x + \dots + a_{n-1})}_{b_{n-1}}x + a_n$$

и вычисляется последовательно в порядке вложенных скобок:
$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_0x + a_1 = b_0x + a_1 \\ b_2 &= (a_0x + a_1)x + a_2 = b_1x + a_2 \\ &\dots\dots\dots \\ b_i &= b_{i-1}x + a_i \\ &\dots\dots\dots \\ P_n(x) &= b_n = b_{n-1}x + a_n \end{aligned} \qquad (3)$$
При таком способе вычисления полинома $P(x)$ производится на $n-1$ операцию меньше, чем при вычислении непосредственно по формуле (2).

2) Найти ξ в преобразовании $x = y + \xi$, приводящего полином $P(x)$ к полиному $P_1(y)$. Найти коэффициенты p и q. Показать, что $q = P(\xi)$. Как выражается коэффициент p полинома $P_1(y)$ через полином $P(x)$?

Примечание.

1) Рекомендуется использовать схему Горнера для нахождения коэффициентов p и q в уравнении (1).
2) В случае, если уравнение $P_n(x) = 0$ имеет кратные или комплексные корни, во избежание аварийного останова при вычислении L или φ, следует работать с комплексной арифметикой.

Выполните задание для одного из следующих вариантов значений коэффициентов исходного кубического уравнения:

Для всех вариантов $a_0 = 1$.

1) $a_1 = 8.92$; $a_2 = 2.51$; $a_3 = -73.72$;	13) $a_1 = 10.15$; $a_2 = 11.24$; $a_3 = -72.18$;
2) $a_1 = 9.03$; $a_2 = 3.17$; $a_3 = -74.00$;	14) $a_1 = 10.25$; $a_2 = 12.02$; $a_3 = -71.54$;
3) $a_1 = 9.13$; $a_2 = 3.85$; $a_3 = -74.22$;	15) $a_1 = 10.34$; $a_2 = 12.82$; $a_3 = -70.81$;
4) $a_1 = 9.24$; $a_2 = 4.54$; $a_3 = -74.36$;	16) $a_1 = 10.43$; $a_2 = 13.62$; $a_3 = -70.01$;
5) $a_1 = 9.35$; $a_2 = 5.25$; $a_3 = -74.43$;	17) $a_1 = 10.52$; $a_2 = 14.43$; $a_3 = -69.12$;
6) $a_1 = 9.45$; $a_2 = 5.96$; $a_3 = -74.42$;	18) $a_1 = 10.62$; $a_2 = 15.24$; $a_3 = -68.14$;
7) $a_1 = 9.56$; $a_2 = 6.69$; $a_3 = -74.34$;	19) $a_1 = 10.70$; $a_2 = 16.06$; $a_3 = -67.09$;
8) $a_1 = 9.66$; $a_2 = 7.42$; $a_3 = -74.18$;	20) $a_1 = 10.79$; $a_2 = 16.89$; $a_3 = -65.95$;
9) $a_1 = 9.76$; $a_2 = 8.17$; $a_3 = -73.94$;	21) $a_1 = 10.88$; $a_2 = 17.71$; $a_3 = -64.73$;
10) $a_1 = 9.86$; $a_2 = 8.92$; $a_3 = -73.62$;	22) $a_1 = 10.97$; $a_2 = 18.55$; $a_3 = -63.43$;
11) $a_1 = 9.96$; $a_2 = 9.68$; $a_3 = -73.22$;	23) $a_1 = 11.05$; $a_2 = 19.38$; $a_3 = -62.05$;
12) $a_1 = 10.06$; $a_2 = 10.46$; $a_3 = -72.74$;	24) $a_1 = 11.13$; $a_2 = 20.22$; $a_3 = -60.59$;

Задание № 4
ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МНОГОЧЛЕНА ЛАГРАНЖА ПО СХЕМЕ ЭЙТКЕНА

Функция $y(x)$ задана таблицей значений x_i, y_i, $i = 0, \ldots, n$, причем $x_i \in [x_{min}, x_{max}]$. Для нахождения значения функции $y(x)$ в точках, лежащих между узловыми, используют интерполяционные многочлены, которые при $x = x_i$ принимают значения y_i, а при других значениях x приближенно представляют функцию $y(x)$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = y(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} +$$

$$+ y(x_1)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots$$

$$\ldots + y(x_i)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} +$$

$$+ y(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}$$

Для вычисления значения интерполяционного многочлена Лагранжа в какой-нибудь точке $x \in [x_{min}, x_{max}]$ применяется интерполяционная схема Эйткена, которая состоит в следующем:

1-ый этап. Вычисляют значения n многочленов 1-ой степени в точке x.

$$L_{01}(x) = \frac{1}{(x_1-x_0)}\begin{vmatrix} y_0 & x_0-x \\ y_1 & x_1-x \end{vmatrix};\ L_{i-1,i}(x) = \frac{1}{(x_i-x_{i-1})}\begin{vmatrix} y_{i-1} & x_{i-1}-x \\ y_i & x_i-x \end{vmatrix};$$

. . . .

$$L_{12}(x) = \frac{1}{(x_2-x_1)}\begin{vmatrix} y_1 & x_1-x \\ y_2 & x_2-x \end{vmatrix};\ L_{n-1,n}(x) = \frac{1}{(x_n-x_{n-1})}\begin{vmatrix} y_{n-1} & x_{n-1}-x \\ y_n & x_n-x \end{vmatrix};$$

. . . .

2-ой этап. Вычисляют значения n-1 многочленов 2-ой степени в точке x.

$$L_{012}(x) = \frac{1}{(x_2-x_0)}\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0-x \\ L_{12}(x) & x_2-x \end{vmatrix};\ L_{i-2,i-1,i}(x) = \frac{1}{(x_i-x_{i-2})}\begin{vmatrix} L_{i-2,i-1}(x) & x_{i-2}-x \\ L_{i-1,i}(x) & x_i-x \end{vmatrix};$$

. . . .

$$L_{123}(x) = \frac{1}{(x_3-x_1)}\begin{vmatrix} L_{12}(x) & x_1-x \\ L_{23}(x) & x_3-x \end{vmatrix};\ L_{n-2,n-1,n}(x) = \frac{1}{(x_n-x_{n-2})}\begin{vmatrix} L_{n-2,n-1}(x) & x_{n-2}-x \\ L_{n-1,n}(x) & x_n-x \end{vmatrix};$$

. . . .

На i-ом этапе вычисляют значения n-i+1 многочленов i-ой степени и т.д. Последним вычисляется значение полинома n-ой степени:

$$L_{0123\ldots n}(x) = \frac{1}{(x_n-x_0)}\begin{vmatrix} L_{01\ldots n-1}(x) & x_0-x \\ L_{123\ldots n}(x) & x_n-x \end{vmatrix};$$

Значение $L_{0123\ldots n}(x)$ и будет являться значением полинома Лагранжа в точке x.

Вычислительная схема для получения значения интерполяционного многочлена будет выглядеть следующим образом:

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1,\,i}$	$L_{i-2,\,i-1,\,i}$	. . .	$L_{123\ldots n}$
x_0	y_0	$x_0 - x$				
x_1	y_1	$x_1 - x$	L_{01}			
x_2	y_2	$x_2 - x$	L_{12}	L_{012}		
x_3	y_3	$x_3 - x$	L_{23}	L_{123}		
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
x_{n-1}	y_{n-1}	$x_{n-1} - x$	$L_{n-2,n-1}$	$L_{n-3,n-2,n-1}$		$L_{012,\,\ldots,\,n-1}$
x_n	y_n	$x_n - x$	$L_{n-1,n}$	$L_{n-2,n-1,n}$		$L_{12,\,\ldots,\,n}$

Отклонение полинома Лагранжа от функции $y(x)$ может быть оценено как

$$\left|y(x)-L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\right|$$

где

$$M_{n+1}=\max_{x\in[x_{\min},x_{\max}]}\left|y^{(n+1)}(x)\right|$$

Выполните следующее задание:

1) Постройте интерполяционный многочлен Лагранжа на отрезке $[1,2]$ по схеме Эйткена, используя в качестве узловых точек значения $x_i=\{1,\ 1.2,\ 1.5,\ 1.8,\ 2.0\}$. Соответствующие значения y_i получите из предлагаемой ниже функции.

2) Оцените с какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа значение $y(\xi)$, при $\xi=\{1.35,\ 1.9\}$ и сравните со значением $|\,y(\xi)-L_n(\xi)\,|$.

Выполните задание для одной из следующих функций:

1) $ln(x)$;	6) $cos(x)$;	11) $ln(1+x^2)$;	16) $cos^2(x)$;
2) $exp(x)$;	7) $sin(x)$;	12) $exp(x^2)$;	17) $sin^2(x)$;
3) $x^{1/2}$;	8) $tg(x)$;	13) $1/(1+x)$;	18) $tg(x^{1/2})$;
4) $x^{1/3}$;	9) $lg(x+1)$;	14) $(1+x^3)^{1/2}$;	19) $ctg(x^{1/2})$;
5) $1/(1+x^2)$;	10) $arctg(x)$;	15) $(1+x^3)^{1/3}$;	20) $lg(1+x^2)$;

Задание №5

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ТАБЛИЦЕЙ, ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Задана таблица значений функции $(x_i\ ,\ y_i)$, $i=1,\ldots,n$. Требуется аппроксимировать эту таблицу с помощью многочлена $\Phi(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_m\varphi_m(x)$, где $\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\varphi_m(x)$ -заданная система линейно-независимых функций на $[a,b]$ и $m<n$. Многочлен наилучшего приближения к точкам $(x_i\ ,y_i)$, составленный по функциям $\varphi_j(x)$, отыскивается так, чтобы сумма

$$S=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\Phi(x_i)]^2$$

имела наименьшее значение. Из условия минимума получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial c_k}=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\Phi(x_i)]\varphi_k(x_i)=0,\qquad k=0,\ldots,m$$

или:

$$\sum_{j=0}^{m}c_j\sum_{i=1}^{n}\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)=\sum_{i=1}^{n}y_i\varphi_k(x_i),\qquad k=0,\ldots,m$$

Полученная система уравнений является линейной относительно коэффициентов c_j. Если ввести обозначения

$$s_{jk}=\sum_{i=1}^{n}\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i);\qquad r_k=\sum_{i=1}^{n}y_i\varphi_k(x_i),$$

то эту систему можно записать в виде:

$$\begin{array}{l} c_0s_{00}+c_1s_{10}\quad+\ldots c_ms_{m0}=r_0\\ c_0s_{01}+c_1s_{11}+\ldots c_ms_{m1}=r_1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_0s_{0m}+c_1s_{1m}+\ldots c_ms_{mm}=r_m \end{array}$$

Выполните два из трех следующих вариантов задания:

1) Принимая $\varphi_j(x)=x^j$, $m=2$, определите c_j и постройте график функции $\Phi(x)$, указав также точки $(x_i,\ y_i)$. Вычислите в узловых точках отклонение $\Phi(x)$ от y_i. Вычислите среднеквадратичное отклонение.

2) Если в качестве $\varphi_j(x)$ выбрать тригонометрические функции $cos(jx)$, $sin(jx)$, причем $n>2m$ и $x\in(0,2\pi]$, то тригонометрический многочлен наилучшего приближения определяется как

$$T_n(x)=a_0+\sum_{j=1}^{m}\left(a_j\cos(jx)+b_j\sin(jx)\right),$$

где коэффициенты a_j и b_j определяются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i;\qquad a_j=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\cos(jx_i);\qquad b_j=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\sin(jx_i);$$

Здесь $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

Приняв $m=2$, определите a_j и b_j. Постройте график функции $T_j(x)$. Вычислите в узловых точках отклонение $T_j(x)$ от y_j. Вычислите среднеквадратичное отклонение.

3) Проведите аппроксимацию таблицы значений $(x_j,\ y_j)$ с помощью функции $\Phi(x)=ax^b$ (предварительное прологарифмировав ее). Найдите среднеквадратичное отклонение.

Задание № 6.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ФОРМУЛАМ ТРАПЕЦИИ И СИМПСОНА

Для вычисления определенного интеграла: $I=\int_a^b y(x)\,dx$ по формуле трапеций, промежуток интегрирования $[a,b]$ делится на n равных частей. Применяя к каждому из них формулу:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y(x)\,dx \approx h(y_i+y_{i+1})/2,$$

где $h=(b-a)/n$ и $y_i=f(x_i)$ $(i=0,\ 1,\ \dots,\ n)$, для всего промежутка $[a,b]$ имеем:

$$\int_a^b y(x)\,dx \approx I_n = h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) \qquad (1)$$

Для вычисления определенного интеграла I по формуле Симпсона, промежуток интегрирования $[a,b]$ делится на $n=2m$ равных частей (т.е. n число четное). Применяя к каждому удвоенному промежутку $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ $(i=1, 2,\dots, m)$ формулу:

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} y(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}),$$

для всего промежутка $[a,b]$ имеем:

$$\int_a^b y(x)\,dx \approx I_{2m} = \frac{h}{3}\left(y_0+y_n+4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}\right) \qquad (2)$$

При расчетах приходится оценивать погрешность, возникающую при вычислении интегралов по формулам (1) и (2). Известно, что погрешность формулы трапеций можно определить по соотношению:

$$\varepsilon_{2n}^{T} = (I_{2n}^{T}-I_{n}^{T})/3 \qquad (3)$$

где I_{2n} - значение интеграла, подсчитанного при разбиении $[a,b]$ на $2n$ равных промежутка. Для формулы Симпсона аналогичное соотношение имеет вид:

$$\varepsilon_{2n}^{C} = (I_{2n}^{C}-I_{n}^{C})/15 \qquad (4)$$

Как видно из (3), (4) для оценки погрешностей формул трапеции и Симпсона необходимо иметь значения I_{2n} и I_n. Для получения значения интеграла I_{2n} по формуле трапеций можно использовать (1), но если известно значение I_n, то I_{2n} вычисляется по следующему рекуррентному соотношению:

$$I_{2n}^{T} = 0.5\,I_{n}^{T} + h_{2n}\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1}, \qquad (5)$$

где

$I^T_1 = 0.5(b-a)[f(a)+f(b)];$ $\quad h_1 = b-a;$

$h_{2n} = h_n/2;$ $\quad y_{2i-1} = f(x_{2i-1})$; $\quad x_{2i-1} = a + h(2i-1).$

Используя экстраполяцию Ричардсона, по значениям I_{2n} и I_n, подсчитанных по формуле трапеций, можно получить значение интеграла по формуле Симпсона в виде:

$$I_{2n}^{C} = \frac{4I_{2n}^{T}-I_{n}^{T}}{3} \qquad (6)$$

__Выполните следующее задание:__

1) Вычислите значения интеграла по формуле трапеций (5) и формуле Симпсона (6), взяв в качестве подынтегральной функции следующие:
а) полином 3-ей степени; б) рациональную дробь; в) иррациональную дробь; г) тригонометрическую функцию.
2) Определите для каждого метода ошибку ε_n .Составьте таблицу:

n	I_n^T	ε_n^T	I_n^C	ε_n^C
1	I_1^T			
2	I_2^T	ε_2^T	I_2^C	
4	I_4^T	ε_4^T	I_4^C	ε_4^T
8	I_8^T	ε_8^T	I_8^C	ε_8^T
16	I_{16}^T	ε_{16}^T	I_{16}^C	ε_{16}^T

3) Известно, что погрешность $\varepsilon = A\ h^a$. Используя полученную таблицу, найти значения A и a для метода трапеций и Симпсона.
4)Покажите справедливость двух из четырех формул (3), (4), (5) и (6).

Задание №7.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ГАУССА

Для интеграла $I=\int_a^b y(x)\,dx$ квадратурная формула Гаусса имеет вид:

$$\int_a^b y(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

где $x_i = 0.5\,(a+b) + 0.5(b-a)\,t_i$, t_i - нули полинома Лежандра $P_n(t_i)=0$, который определяется как

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n],\ \ n=0,1,2,\dots\ .$$

Коэффициенты A_i определяются из решения системы с n неизвестными

$$\int_{-1}^{1} t^k\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i\,t_i^k \qquad (k=0,1,2,\dots,n-1)$$

В квадратурной формуле коэффициенты A_i и t_i выбраны так, что она точна для всех полиномов $f(t)$ наивысшей возможной степени $2n-1$.

Остаточный член формулы Гаусса с n узлами выражается следующим образом:

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3(2n+1)}$$

Выполните следующее задание:

1) Вычислите значения интегралов по формуле Гаусса для $n = 1,2,3,4$ от трех следующих функций:

а) полинома третьей степени;

б) тригонометрической;

в) рациональной дроби.

2) Сравните результаты, полученные по формуле Гаусса с методом Симпсона.

Элементы формулы Гаусса

n	i	t_i	A_i
1	1	0	2
2	1; 2	±0.57735027	1
3	1; 3 2	±0.77459667 0	0.55555556 0.88888889
4	1; 4 2; 3	±0.86113631 ±0.33998104	0.34785484 0.65214516

3) Покажите справедливость квадратурной формулы Гаусса. Выведите систему уравнений для коэффициентов A_i

Задание №8.
ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. НЕКОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Функция $y=y(x)$ задана в табличном виде: $y_0, y_1, \ldots, y_n$ при $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$. Для получения значения производной функции $y=y(x)$ в точке x_i можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Искомое выражение производной в точке x_i представляется линейной комбинацией заданных значений функции в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$y_i' \approx c_0 y_0 + c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \qquad (1)$$

Предполагается, что эта формула имеет место для многочленов:

$$y = 1;\ y = x - x_i;\ y = (x - x_i)^2;\ \ldots;\ y = (x - x_i)^n$$

Подставляя последовательно эти выражения в (1) получаем систему $n+1$ линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_n$.

Для оценки погрешности аппроксимации формулы (1) следует разложить каждое из y_j, входящих в (1) в ряд Тейлора в окрестности точки x_i.

Если расстояние между соседними узловыми точками x_i постоянно и равно h, то погрешность аппроксимации можно представить в виде:

$$R = M \cdot y_*^{(n+1)} h^n,$$

где $y_*^{(n+1)}$- значение производной в точке $\xi \in [x_0, x_n]$.

Помимо погрешности аппроксимации существует погрешность округления, возникающая при вычислении. Если предполагать, что для всех y_j $(j=0, 1, \ldots, n)$ в (1) эта погрешность равна ε, то суммарная погрешность округления для (1) имеет вид: $\varepsilon(|c_0|+|c_1|+\ldots+|c_n|)$. Известно, что для (1) $c_j = a_j/h$, тогда истинная погрешность формулы (1) может быть записана как

$$R_I = \left|M\, y_*^{(n+1)} h^n\right| + \frac{\varepsilon}{h}\sum_{j=0}^{n}\left|\alpha_j\right| \qquad (2)$$

Выполните следующее задание:

1) Для заданного n и заданного i постройте формулу (1), т.е. найдите коэффициенты c_j. Рассмотрите при этом три случая - $i = 0$, $i = n$, $0<i<n$.

2) Для конкретной функции $y=y(x)$ и x_i (возьмите одно из трех значений i, предложенных выше) найдите M, $y_*^{(n+1)}$, приняв в качестве ξ значение x_i.

3) Постройте график функции $lg(|R_I|)$ в зависимости от $lg(h)$, изменяя значение h в пределах от 1 до 10^{-15}. Найдите h, при котором ошибка минимальна.

4) Сравните значение производной, полученной по формуле (1) с точным значением производной от функции $y(x)$ в точке x_i, для чего постройте график функции $lg(|y'(x_i) - y_i'|)$ в зависимости от $lg(h)$. Найдите h, при котором ошибка минимальна.

Задание №9.
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

На промежутке $[a,b]$ найти корень уравнения $f(x)=0$ различными методами.

а) *Метод простой итерации.*

Сначала уравнение $f(x)=0$ приводится к виду $x=\varphi(x)$ таким образом, чтобы на промежутке $[a,b]$ выполнялось условие: $|\varphi'(x)|<1$. Затем из $[a, b]$ выбирается произвольное начальное значение x_0. Последующие приближения вычисляются по формуле:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

где n - номер приближения. Процесс выполняется до тех пор, пока не выполнится условие: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, где ε - малое число.

б) *Метод Ньютона (метод касательных).*

Формула для вычисления последовательных приближений корня уравнения $f(x)=0$ имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

В качестве начального приближения можно принять

$x_0 = a$, если $f(a)f''(x) > 0$

$x_0 = b$, если $f(b)f''(x) > 0$.

в) *Метод хорд.*

Формула для вычисления последовательных приближений корня уравнения $f(x)=0$ имеет вид:

1) если $f(b)f''(x) > 0$, то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b-x_n), \qquad \text{при этом } x_0 = a$$

2) если $f(a)f''(x) > 0$, то (2)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(a)-f(x_n)}(a-x_n), \qquad \text{при этом } x_0 = b$$

г) Метод итераций третьего порядка.

Формула для вычисления последовательных приближений корня уравнения $f(x)=0$ имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)f^2(x_n)}{2f'^3(x_n)} \tag{3}$$

д) Метод половинного деления.

Метод заключается в построении последовательности отрезков $[a_i, b_i]$, на которых лежит корень уравнения $f(x)=0$. Построение продолжается до тех пор, пока не выполнится условие $|b_i - a_i| < \varepsilon$, при этом за корень уравнения принимают значение $\xi = (a_i + b_i)/2$.

Если на шаге n известны a_n и b_n, то следующая пара a_{n+1}, b_{n+1} определяется следующим образом:

1) вычисляется значение функции $f(c)$ в середине отрезка $[a_n, b_n]$, $c=(a_n+b_n)/2$.

2) если $f(a_n)f(c) < 0$, то $a_{n+1} = a_n$; $b_{n+1} = c$; в противном случае $a_{n+1} = c$; $b_{n+1} = b_n$.

<u>Выполните следующее задание:</u>

1)Выведите формулы (1), (2) и (3).

2) Графически определите промежуток $[a, b]$, в котором находится корень уравнения $f(x)=0$.

3) Найдите корень уравнения $f(x)=0$ с точностью $\varepsilon=10^{-5}$ указанными выше методами. Определить количество последовательных приближений в каждом методе за которое была достигнута заданная точность.

4) Постройте график функции $lg|f(x_n)|$ в зависимости от n. (В методе половинного деления в качестве x_n следует примите $(a_n + b_n)/2$).

Для выполнения задания выберите одну из следующих функций:

1) $x - sin(x) = 0.25$;	14) $ln(x) + (x+1) = 0$;
2) $tg(0.58x + 0.1) = x^2$;	15) $x.2^x = 1$;
3) $x^{0.5} - cos(0.387x) = 0$;	16) $(x + 1)^{0.5} = 1/x$;
4) $3x - cos(x) - 1 = 0$;	17) $(x - 1)^2 = 0.5exp(x)$;
5) $lg(x) – 7/(2x+6) = 0$;	18) $2.2x – 2^x = 0$;
6) $x + lg(x) = 0.5$;	19) $x(x + 1)^2 = 1$;
7) $x^2 + 4sin(x) = 0$;	20) $x^2 = sin(x)$;
8) $ctg(1.05x) - x^2 = 0$;	21) $x^3 = sin(x)$;
9) $x\ lg(x) - 1.2 = 0$;	22) $arctg(x) - 1/(3x^3) = 0$;
10) $ctg(x) – x/4 = 0$;	23) $(x - 4)^2 log_{0.5}(x - 3) = -1$;
11) $2x - lg(x) - 7 = 0$;	24) $arctg(x - 1) + 2x = 0$;
12) $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$;	25) $3^{x-1} - 4 - x = 0$;
13) $x^3 - 6x - 8 = 0$;	26) $x^2cos(2x) = -1$.

Задание № 10

НАХОЖДЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ ОТ ПАРАМЕТРА.

Дано уравнение $f(x,a) = g(x,b)$.

1) Найдите критическое значение параметра $a = a_*$, при котором уравнение $f(x,a) = g(x,b)$ имеет положительный корень кратности 2, т.е. такое a_* при котором кривые $f(x,a)$ и $g(x,b)$ имеют одну общую точку касания.

2) На промежутке $0 < a < a_*$ выбирете 3-4 значения параметра "a" и найдите по 2 корня соответствующих уравнений.

3) Геометрически проиллюстрируйте результаты, составив таблицы и нарисовав график функции $y = g(x,b)$ и серию графиков функции $y=f(x,b)$. Выделите точку касания и точки пересечения графиков, а также случай $a > a_*$. Нарисуйте также график зависимости корней уравнения от параметра "a".

<u>Выполните задание для одного из следующих вариантов:</u>

N	f(x,a)	g(x,b)	N	f(x,a)	g(x,b)
1)	x/a	$ch^2(x/b)$	17)	a/x	$sin(x/b)$
2)	x/a	$ch[(x/b)^{0.5}]$	18)	a/x	$sin^2(x/b)$
3)	x/a	$ch(x/b)$	19)	a/x	$sin(x^2/b^2)$

4)	x/a	$ch(x^2/b^2)$	20)	a/x	$sin[(x/b)^{0.5}]$
5)	$-ax$	$sin(x/b)$	21)	$ax-\pi/4$	$tg(x/b)$
6)	$-ax$	$sin[(x/b)^{0.5}]$	22)	$ax-\pi/4$	$tg^2(x/b)$
7)	$-ax$	$sin^2(x/b)$	23)	$ax-\pi/4$	$tg(x^2/b^2)$
8)	$-ax$	$sin(x^2/b^2)$	24)	$ax-\pi/4$	$tg[(x/b)^{0.5}]$
9)	a/x	$cos(x/b)$	25)	$-ax-\pi/4$	$ctg(x/b)$
10)	a/x	$cos^2(x/b)$	26)	$-ax-\pi/4$	$ctg^2(x/b)$
11)	a/x	$cos(x^2/b^2)$	27)	$-ax-\pi/4$	$ctg(x^2/b^2)$
12)	a/x	$cos[(x/b)^{0.5}]$	28)	$-ax-\pi/4$	$ctg[(x/b)^{0.5}]$
13)	$-ax$	$cos(x/b)$	29)	$arctg(x-a)$	$sh(x/b)$
14)	$-ax$	$cos(x/b)$	30)	$arctg(x-a)$	$sh^2(x/b)$
15)	$-ax$	$cos[(x/b)^{0.5}]$	31)	$arctg(x-a)$	$sh(x^2/b^2)$
16)	$-ax$	$cos(x^2/b^2)$	32)	$arctg(x-a)$	$sh[(x/b)^{0.5}]$

$b = n + i/10$, где n - номер группы; i - порядковый номер.

Вычисление корней уравнения произведите с максимальной точностью, допускаемой на ЭВМ, используя один из методов, рассмотренных в Задании 9.

Задание №11

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дана система n линейных уравнений:

$$A \cdot X = B, \qquad (1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , \qquad i=1..n.$$

Требуется решить систему (1), т.е. найти такой вектор X, который обращал бы (1) в тождество.

а) метод Гаусса.

Матрица А приводится к треугольному виду. Сначала с помощью первого уравнения исключается x_1 из всех последующих уравнений системы. Затем с помощью второго уравнения исключается x_2 из третьего и всех последующих уравнений и т.д. Это *прямой ход метода Гаусса.* Коэффициенты, получаемые в этом методе, вычисляются по формулам

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}; \qquad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)};$$

$$i, j = k+1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, n-1$$

Здесь $\qquad b_i^{(0)} = b_i; \qquad a_{ij}^{(0)} = a_{ij}.$

Обратный ход метода Гаусса состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных: решая последнее уравнение находим неизвестное x_n. Далее, используя это значение, из предыдущего уравнения находим x_{n-1} и т.д. до тех пор, пока не найдем x_1.

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}; \qquad x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \left[b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_j \right];$$

$$k = n-1, \ldots, 1.$$

б) метод простой итерации;

Система уравнений (1) приводится к виду: $\quad X = C \cdot X + B$

Строим последовательность векторов $X^{(k)}$ по формуле :

$$X_i^{(k+1)} = C \cdot X^{(k)} + B \qquad (2)$$

Начальный вектор $X^{(0)}$ является произвольным. В развернутом виде:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^{(k)} + b_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

При k, стремящемся к бесконечности $X^{(k)}$ будет стремиться к точному решению системы (1).

в) метод Зейделя;

Система уравнений (1) приводится к виду: $X = C \cdot X + B$

Строим последовательность векторов $X^{(k)}$ по формуле:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij} x_j^{(k)} + b_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Для метода простой итерации и метода Зейделя последовательности векторов будут сходящимися, если для матрицы C выполняется условие (достаточное условие):

$$\|\alpha\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \qquad (4)$$

или

$$\|\alpha\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \qquad (5)$$

или

$$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|^2} < 1. \qquad (6)$$

Выполните следующее задание:

Используя три приведенных выше метода, получите решение одной из приведенных ниже систем уравнений.

1. $2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1$
   $3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7$
   $4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 = 0.8$

2. $3.1x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.2$
   $1.9x_1 + 3.1x_2 + 2.1x_3 = 2.1$
   $7.5x_1 + 3.8x_2 + 4.8x_3 = 5.6$

3. $1.7x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.7$
   $2.1x_1 + 3.4x_2 + 1.8x_3 = 1.1$
   $4.2x_1 - 1.7x_2 + 1.3x_3 = 2.8$

4. $9.1x_1 + 5.6x_2 + 7.8x_3 = 9.8$
   $3.8x_1 + 5.1x_2 + 2.8x_3 = 6.7$
   $4.1x_1 + 5.7x_2 + 1.2x_3 = 5.8$

5. $3.3x_1 + 2.1x_2 + 2.8x_3 = 0.8$
   $4.1x_1 + 3.7x_2 + 4.8x_3 = 5.7$
   $2.7x_1 + 1.8x_2 + 1.1x_3 = 3.2$

6. $3.2x_1 - 2.5x_2 + 3.7x_3 = 6.5$
   $0.5x_1 + 0.34x_2 + 1.7x_3 = -0.24$
   $1.6x_1 + 2.3x_2 - 1.5x_3 = 4.3$

7. $3.6x_1 + 1.8x_2 - 4.7x_3 = 3.8$
   $2.7x_1 - 3.6x_2 + 1.9x_3 = 0.4$
   $1.5x_1 + 4.5x_2 + 3.3x_3 = -1.6$

8. $2.7x_1 + 0.9x_2 - 1.5x_3 = 3.5$
   $4.5x_1 - 2.8x_2 + 6.7x_3 = 2.6$
   $5.1x_1 + 3.7x_2 - 1.4x_3 = -0.14$

9. $3.8x_1 + 6.7x_2 - 1.2x_3 = 5.2$
   $6.4x_1 + 1.3x_2 - 2.7x_3 = 3.8$
   $2.4x_1 - 4.5x_2 + 3.5x_3 = -0.6$

10. $7.8x_1 + 5.3x_2 + 4.8x_3 = 1.8$
    $3.3x_1 + 1.1x_2 + 1.8x_3 = 2.3$
    $4.5x_1 + 3.3x_2 + 2.8x_3 = 3.4$

11. $1.7x_1 - 2.2x_2 + 3.0x_3 = 1.8$
    $2.1x_1 + 1.9x_2 - 2.3x_3 = 2.8$
    $4.2x_1 + 3.9x_2 - 3.1x_3 = 5.1$

12. $2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1.$
    $3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7$
    $4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 = 0.8$

13. $3.3x_1 + 3.7x_2 + 4.2x_3 = 5.8$
    $2.7x_1 + 2.3x_2 - 2.9x_3 = 6.1$
    $4.1x_1 + 4.8x_2 - 5.0x_3 = 7.0$

14. $3.7x_1 + 3.1x_2 + 4.0x_3 = 5.0$
    $4.1x_1 + 4.5x_2 - 4.8x_3 = 4.9$
    $-2.1x_1 - 3.7x_2 + 1.8x_3 = 2.7$

15. $3.7x_1 - 2.3x_2 + 4.5x_3 = 2.4$
    $2.5x_1 + 4.7x_2 - 7.8x_3 = 3.5$
    $1.6x_1 + 5.3x_2 + 1.3x_3 = -2.4$

16. $1.5x_1 + 2.3x_2 - 3.7x_3 = 4.5$
    $2.8x_1 + 3.4x_2 + 5.8x_3 = -3.2$
    $1.2x_1 + 7.3x_2 - 2.3x_3 = 5.6$

17. $2.4x_1 + 2.5x_2 - 2.9x_3 = 4.5$
    $0.8x_1 + 3.5x_2 - 1.4x_3 = 3.2$
    $1.5x_1 - 2.3x_2 + 8.6x_3 = -5.5$

18. $2.4x_1 + 3.7x_2 - 8.3x_3 = 2.3$
    $1.8x_1 + 4.3x_2 + 1.2x_3 = -1.2$
    $3.4x_1 - 2.3x_2 + 5.2x_3 = 3.5$

19. $7.6x_1 + 5.8x_2 + 4.7x_3 = 10.1$
    $3.8x_1 + 4.1x_2 + 2.7x_3 = 9.7$
    $2.9x_1 + 2.1x_2 + 3.8x_3 = 7.8$

20. $5.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = -3.5$
    $4.2x_1 + 1.7x_2 - 2.3x_3 = 2.7$
    $3.4x_1 + 2.45x_2 + 7.4x_3 = 1.9$

21. $5.6x_1 + 2.7x_2 - 1.7x_3 = 1.9$
    $3.4x_1 - 3.6x_2 - 6.7x_3 = -2.4$
    $0.8x_1 + 1.3x_2 + 3.7x_3 = 1.2$

22. $4.5x_1 - 3.5x_2 + 7.4x_3 = 2.5$
    $3.1x_1 - 0.6x_2 - 2.3x_3 = -1.5$
    $0.8x_1 + 7.4x_2 - 0.5x_3 = 6.4$

Для метода б) и в) расчет выполните с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$.

$$|X^{(k+1)} - X^{(k)}| < \varepsilon.$$

В качестве начального приближения для X возьмите $X^{(0)} = 0$ и $X^{(0)} = F$. Определите количество итераций, требуемых для получения решения с заданной точностью.

Примечание

При решении методами а) и б) следует преобразовать систему уравнений к такому виду, чтобы выполнилось одно из условий (4)-(6).

Задание №12

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод Ньютона.

Дана система нелинейных уравнений:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

которую можно переписать в векторном виде следующим образом:

$$\boldsymbol{f(x) = 0},$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots f_n)$.

Пусть в некоторой области эта система имеет решение $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и существуют непрерывные частные производные первого порядка, причем при $x_i = a_i$ матрица

$$f_x = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

является невырожденной.

Если $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$- некоторое начальное приближение к решению $\boldsymbol{a}$, то для отыскания $\boldsymbol{a}$ с нужной точностью имеет место итерационный процесс:

$$\boldsymbol{x}^{(m+1)} = \boldsymbol{x}^{(m)} - \boldsymbol{f}_x^{-1}(\boldsymbol{x}^{(m)})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(m)}) \tag{2}$$

Здесь m - номер итерации, $\boldsymbol{f}_x^{-1}$ - матрица обратная $\boldsymbol{f}_x$. Систему уравнений (2) можно переписать в виде:

$$\boldsymbol{f}_x(\boldsymbol{x}^{(m)})(\boldsymbol{x}^{(m+1)} - \boldsymbol{x}^{(m)}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(m)}) \tag{3}$$

В этом случае на каждом шаге не требуется обращения матрицы $\boldsymbol{f}_x$, но приходится решать систему линейных уравнений относительно поправок $\Delta\boldsymbol{x}^{(m)} = (\boldsymbol{x}^{(m+1)} - \boldsymbol{x}^{(m)})$ к найденному приближению $\boldsymbol{x}^{(m)}$.

Методы спуска.

Дана система уравнений (1). Рассматривается функция

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тогда каждому решению $\boldsymbol{a}$ системы (1) соответствует нулевой минимум функции $\Phi(x)$ и наоборот. Задача отыскания решений системы (1) сводится к задаче отыскания точек нулевого минимума вспомогательной функции $\Phi(x)$. Для этого используются методы наискорейшего спуска, покоординатного спуска и релаксационные методы. Ниже приводятся два варианта метода наискорейшего спуска.

а) $$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} - \lambda_{(m)}\, grad\, \Phi(\mathbf{x}^{(m)}),$$

где $$\lambda_{(m)} = \Phi(\mathrm{x}^{(m)}) \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi(\mathrm{x}^{(m)})}{\partial x_i} \right)^2 .$$

$$grad\, \Phi(\mathrm{x}^{(m)}) = \left(\frac{\partial \Phi(\mathrm{x}^{(m)})}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi(\mathrm{x}^{(m)})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi(\mathrm{x}^{(m)})}{\partial x_n} \right).$$

б) $$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} - \mu_{(m)}\, grad\, \Phi(\mathbf{x}^{(m)}),$$

где

$$\mu_{(m)} = \frac{3\psi_1 - 4\psi_2 + \psi_3}{4(\psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3)} \lambda_{(m)};$$

$$\psi_1 = \Phi(\mathbf{x}^{(m)});$$

$$\psi_2 = \Phi(\mathbf{x}^{(m)} - 0.5\lambda_{(m)}\, grad\, \Phi(\mathbf{x}^{(m)}));$$

$$\psi_3 = \Phi(\mathbf{x}^{(m)} - \lambda_{(m)}\, grad\, \Phi(\mathbf{x}^{(m)})).$$

Ответьте на вопросы:

1) Какую геометрическую интерпретацию можно дать случаю вырожденности матрицы $\boldsymbol{f_x}$. Какие методы применимы в этом случае?

2) Какова геометрическая интерпретация метода наискорейшего спуска (варианта а)?

3) Скорость сходимости какого из методов выше - метода Ньютона или метода наискорейшего спуска, и почему? Проведите этот анализ на основе геометрической интерпретации. Сравните свои заключения с результатами ваших расчетов.

Выполните следующее задание:

1) Найдите корень системы уравнений $\boldsymbol{f(x) = 0}$,с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ по всем независимым переменным, используя метод Ньютона и два варианта метода наискорейшего спуска. Определите количество последовательных приближений в каждом методе, за которое была достигнута заданная точность.

2) Постройте график функции $\lg\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2(\mathrm{x}_{(m)})}\right)$ в зависимости от m для каждого метода.

Указание.

Для уменьшения громоздкости формул, при вычислении производных рекомендуется пользоваться их разностными аналогами.

Для выполнения задания выберите одну из следующих систем уравнений.

1. $tg(xy + 0.4) = x^2$
   $0.6x^2 + 2y^2 = 1,\ x>0, y>0$
2. $sin(x + y) - 1.6x = 0$
   $x^2 + y^2 = 1$
3. $sin(x + 1) - y = 1.2$
   $2x + cos(y) = 2$
4. $cos(x-1) + y = 0.5$
   $x - cos(y) = 3$
5. $cos(x) + y = 1.5$
   $2x - sin(y - 0.5) = 1$
6. $tg(xy + 0.1) = x^2$
   $x^2 + 2y^2 = 1$
7. $sin(x + y) - 1.2x = 0.2$
   $x^2 + y^2 = 1$
8. $tg(xy) = x^2$
   $0.8x^2 + 2y^2 = 1$
9. $sin(y + 1) - x = 1$
   $2y + cos(x) = 2$
10. $cos(x^2 + y^2) - x + y = 0.4,$
    $x<1,\ y<1$
    $(x + y - 2)^2/1.2 + (x - y)^2/1.1 = 1$
11. $exp(x + y) - x^2 + y = 1$
    $(x + 0.5)^2 + y^2 = 2$
12. $th(x^2 - y) - 0.44(x + y) = 0$
    $(x - 0.2)^2 - y^2 = 1.5$
13. $exp(-0.1x + y) - xy = 1.4$
    $x^2/0.7^2 + 2y^2 = 4$
14. $tg(-1.2x + y) + 1.2xy = 0.3$
    $x^2 + y^2 = 1.3$
15. $cos(0.6y + x^2) + x^2 + y^2 = 1.6$
    $1.5(x + 0.1)^2 - (y - 0.1)^2/0.6^2 = 1.4$
16. $ch(0.1x^2 + y) - x + y = 1$
    $(x - 0.1)^2/0.7^2 - y^2/2 = 0.8$
17. $x^2 - y^2 - 3exp(x)exp(y) = 0$
    $2xy - 3exp(x)sin(y) = 0$
18. $x - 4exp(x^2 - y^2)cos(2xy) = 0$
    $y - 4exp(x^2 - y^2)sin(2xy) = 0$
19. $cos(x)ch(y) + 2(x^2 - y^2) = 0$
    $sin(x)sh(y) - 4xy = 0$
20. $sin(x)ch(y) + x^2 - y^2 = 0$
    $cos(x)sh(y) + 2xy = 0$
21. $2ch(x)cos(y) - x^2 + y^2 = 0$
    $2ch(x)sin(y) - 2xy = 0$
22. $3ch(x^2 - y^2)cos(2xy) - x = 0.$
    $3\ ch(x^2 - y^2)sin(2xy) - y = 0.$

Задание №13.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дана система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка
$$y' = f(x,y,z)$$
$$z' = g(x,y,z)$$
с начальными условиями $y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0$.

Требуется найти решение этой системы $y = y(x);\ z = z(x)$ на промежутке $[x_0, x_n]$ методом *Эйлера* и методом *Рунге-Кутта*.

Для получения численного решения, промежуток $[x_0, x_n]$ разбивают точками на n частей, координаты которых определяются как $x_{i+1} = x_i + h$, где $h = (x_n - x_0)/n$. В исходной системе уравнений производные заменяют разностными аналогами, и тогда по известным значениям x, y и z в i-ой точке моно вычислить значения y и z в $i+1$ точке.

а) Метод Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i, z_i); \quad z_{i+1} = z_i + hg(x_i, y_i, z_i);$$

б) Метод Рунге-Кутта

$$y_{i+1} = y_i + 1/6\,[\,k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3\,];$$
$$z_{i+1} = z_i + 1/6\,[\,l_0 + 2l_1 + 2l_2 + l_3\,];$$

где

$k_0 = hf(x_i, y_i, z_i);$ $\quad l_0 = hg(x_i, y_i, z_i);$

$k_1 = hf(x_i + h/2, y_i + k_0/2, z_i + l_0/2);$ $\quad l_1 = hg(x_i + h/2, y_i + k_0/2, z_i + l_0/2);$

$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2);$ $\quad l_2 = hg(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2);$

$k_3 = hf(x_i + h, y_i + k_2, z_i + l_2);$ $\quad l_1 = hg(x_i + h, y_i + k_2, z_i + l_2).$

в) неявный метод

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}); \qquad z_{i+1} = z_i + hg(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1});$$

г) явно-неявный метод (с весом)

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_+, y_+, z_+); \qquad z_{i+1} = z_i + hg(x_+, y_+, z_+);$$

где $\quad x_+ = x_i + \sigma x_{i+1}$ $\quad, y_+ = y_i + \sigma y_{i+1},$ $\quad z_+ = z_i + \sigma z_{i+1},$

σ *- вес* $(\,0 < \sigma < 1)$

Выполните следующее задание:

1) Используя четыре приведенных выше метода для n = 10; 20; 40 получите решение системы ОДУ.

2) Сравните полученные результаты по четырем методам с аналитическим решением. Составьте соответствующую сравнительную таблицу значений $y(x)$ и погрешностей Δy. Постройте соответствующие графики. Определите погрешность по формулам:

$$\Delta y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|y_i - y_{точ}(x_i)\right|; \quad \Delta z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|z_i - z_{точ}(x_i)\right|;$$

3) Постройте графики функций $lg|\Delta y|$ и $lg|\Delta z|$ от $lg(h)$ для четырех методов. Определить, как зависит погрешность от шага h.

Выполните задание для одной из следующих систем:

Система ОДУ	Аналитическое решение
1. $x' = x^2y;$ $y' = y / t - xy^2;$	$x = C_2\exp(C_1t^2);$ $y = (2C_1/C_2)\,t\exp(-C_1t^2);$
2. $x' = 4x + y - e^{2t};$ $y' = y - 2x;$	$x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + (t + 1)\,e^{2t};$ $y = -2C_1e^{2t} - C_2e^{3t} + 2t\,e^{2t};$
3. $x' = 2x + y + 2e^t;$ $y' = x + 2y - 3e^{4t};$	$x = C_1e^t + C_2e^{3t} + t\,e^t - e^{4t};$ $y = -\,C_1e^t + C_2e^{3t} - (t + 1)\,e^t - 2e^{4t};$
4. $x' = 4x - 3y + \sin t;$ $y' = 2x - y - 2\cos t;$	$x = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + \cos t - 2\sin t;$ $y = C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t;$
5. $x' = t / y;$ $y' = -\,t / x;$	$x = C_2\exp(C_1t^2);$ $y = t\exp(-C_1t^2)/(2C_1C_2);$
6. $x' = x^2 / (y - t);$ $y' = x + 1;$	$x = C_2\exp(C_1t);$ $y = t + C_2\exp(C_1t) / C_1;$
7. $x' = y / t;$ $y' = y(x+2y-1)/t/(x-1);$	$x = (t + C_1)/(t + C_2);$ $y = (C_2 - C_1)t/(t + C_2)^2;$
8. $x' = (x^2-y^2+1)/(2y);$ $y' = y + x;$	$x = -1/C_1 + C_1(t + C_2)/2 - C_1(t + C_2)^2/4;$ $y = 1/C_1 + C_1(t + C_2)^2/4;$
9. $x' = x - 2y - z;$ $y' = y - x + z;$ $z' = x - z;$	$x = C_1 + 3C_2e^{2t};$ $y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t};$ $z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t};$
10. $x' = 2x - y + z;$ $y' = x + 2y - z;$ $z' = x - y + 2z;$	$x = C_2e^{2t} + C_3e^{3t};$ $y = C_1e^t + C_2e^{2t};$ $z = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t};$
11. $x' = 3x - y + z;$ $y' = x + y + z;$ $z' = 4x - y + 4z;$	$x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t};$ $y = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t};$ $z = -\,C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t};$
12. $x' = 4y - 2z - 3x;$ $y' = z + x;$ $z' = 6x - 6y + 5z;$	$x = C_1e^t + C_3e^{-t};$ $y = C_1e^t + C_2e^{2t};$ $z = 2C_2e^{2t} - C_3e^{-t};$
13. $x' = x - y - z;$ $y' = x + y;$ $z' = 3x + z;$	$x = e^t(2C_2\sin 2t + 2C_3\cos 2t);$ $y = e^t(C_1 - C_2\cos 2t + C_3\sin 2t);$ $z = e^t(-C_1 - 3C_2\cos 2t + 3C_3\sin 2t);$
14. $x' = 2x + y;$ $y' = x + 3y - z;$ $z' = 2y + 3z - x;$	$x = C_1e^{2t} + e^{3t}(C_2\cos t + C_3\sin t);$ $y = e^{3t}[(C_2 + C_3)\cos t + (C_3 - C_2)\sin t];$ $z = C_1e^{2t} + e^{3t}[(2C_2 - C_3)\cos t + (2C_3 + C_2)\sin t];$
15. $x' = 2x + 2z - y;$ $y' = x + 2z;$ $z' = y - 2x - z;$	$x = C_2\cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t;$ $y = 2C_1e^t + C_2\cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t;$ $z = C_1e^t + C_3\cos t - (C_2 + C_3)\sin t;$
16. $x' = 2x - y;$ $y' = 2y - x - 5e^t\sin t;$	$x = C_1e^t + C_2e^{3t} + e^t(2\cos t - \sin t)$ $y = C_1e^t - C_2e^{3t} + e^t(3\cos t + \sin t)$

17. $x' = 4x - y - z;$ $\quad x = C_1e^{2t} + (C_2 + C_3)e^{3t};$
$y' = x + 2y - z;$ $\quad y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t};$
$z' = x - y + 2z;$ $\quad z = C_1e^{2t} + C_3e^{3t};$

18. $x' = 2x - y - z;$ $\quad x = C_1 + C_2e^{t};$
$y' = 3x - 2y - 3z;$ $\quad y = 3C_1 + C_3 e^{t};$
$z' = 2z - x + y;$ $\quad z = -C_1 + (C_2 - C_3) e^{t};$

19. $x' = y - 2x - 2z;$ $\quad x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t};$
$y' = x - 2y + 2z;$ $\quad y = -C_1e^{3t} + (C_2 + 2C_3) e^{-t};$
$z' = 3x - 3y + 5z;$ $\quad z = -3C_1e^{3t} + C_3 e^{-t};$

20. $x' = 3x - 2y - z;$ $\quad x = C_1e^{2t} + C_3 e^{-5t};$
$y' = 3x - 4y - 3z;$ $\quad y = C_2e^{2t} + 3C_3 e^{-5t};$
$z' = 2x - 4y;$ $\quad z = (C_1 - 2C_2) e^{2t} + 2 C_3 e^{-5t};$

21. $x' = x - y + z;$ $\quad x = (C_1 + C_2 t) e^{t} + C_3 e^{2t};$
$y' = x + y - z;$ $\quad y = (C_1 - 2 C_2 + C_2 t) e^{t};$
$z' = 2z - y;$ $\quad z = (C_1 - C_2 + C_2 t) e^{t} + C_3 e^{2t};$

22. $x' = y - 2z - x;$ $\quad x = (C_2 + C_3 t) e^{-t};$
$y' = 4x + y;$ $\quad y = 2C_1 e^{t} - () e^{-t};$
$z' = 2x + y - z;$ $\quad z = C_1 e^{t} - (C_2 + C_3 + C_3 t) e^{-t};$

23. $x' = 2x + y;$ $\quad x = C_1 + C_2 t + 4C_3 e^{3t};$
$y' = 2y + 4z;$ $\quad y = C_2 - 2C_1 - 2C_2 t + 4C_3 e^{3t};$
$z' = x - z;$ $\quad z = C_1 - C_2 + C_2 t + C_3 e^{3t};$

24. $x' = 2x - y - z;$ $\quad x = (C_1 + C_3 t) e^{t};$
$y' = 2x - y - 2z;$ $\quad y = (C_2 + 2C_3 t) e^{t};$
$z' = 2z - x + y;$ $\quad z = (C_1 - C_2 - C_3 - C_3t) e^{-t};$

25. $x' = 4x - y;$ $\quad x = (C_1 + C_2t + C_3t^2) e^{2t};$
$y' = 3x + y - z;$ $\quad y = [2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)t + 2C_3t^2] e^{2t};$
$z' = x + z;$ $\quad z = [C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3) t + C_3t^2] e^{2t};$

Задание №14
РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГОУРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Дано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad a < x < b \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \alpha_3 \qquad (2)$$
$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \beta_3 \qquad (3)$$
$$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0; |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0.$$

а) Метод прогонки.

Отрезок $[a;b]$ разбивается на n равных частей с шагом $h = (b-a)/n$. В точках $x_i = a + ih$ $(i=0,1,2,...n)$ требуется найти значения $y_i = y(x_i)$.

Производные в (1)-(3) заменяются конечно-разностными соотношениями:

$$y_i' = (y_{i+1} - y_{i-1})/(2h); \qquad y_i'' = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2$$

Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2,..., n-1, \qquad (4)$$

где $a_i = 1/h^2 - p(x_i)/(2h);$ $\quad b_i = -2/h^2 + q(x_i);$
$c_i = 1/h^2 + p(x_i)/(2h);$ $\quad d_i = f(x_i),$

а краевые условия (2)-(3):

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 (y_1 - y_{-1})/(2h) = \alpha_3 \qquad (5)$$
$$\beta_0 y_0 + \beta_1 (y_{n+1} - y_{n-1})/(2h) = \beta_3 \qquad (6)$$

Для того, чтобы в соотношении (5) избавиться от y_{-1}, необходимо выразить его через y_0 и y_1, и полученное выражение подставить в (4), записанного для $i = 0$. Аналогично поступают и с y_{n+1}.

Полученная система линейных уравнений (4)-(6) является трехдиагональной и может быть представлена в виде:

$$\begin{array}{ll} b_0y_0 + c_0y_1 & = d_0 \\ a_1y_0 + b_1y_1 + c_1y_2 & = d_1 \\ \quad a_2y_1 + b_2y_2 + c_2y_3 & = d_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \quad\quad a_{n-1}y_{n-2} + b_{n-1}y_{n-1} + c_{n-1}y_n & = d_{n-1} \\ \quad\quad\quad a_ny_{n-1} + b_ny_n & = d_n \end{array} \qquad (7)$$

Решение системы уравнений (7) ищется *методом прогонки* в виде:

$$y_i = A_i y_{i+1} + B_i$$

Сначала определяются коэффициенты A_i, B_i по формулам (*прямая прогонка*):

$$A_0 = -c_0/b_0; \qquad B_0 = d_0/b_0;$$
$$A_i = -c_i/(a_iA_{i-1} + b_i); \qquad B_i = (d_i - a_i B_{i-1})/(a_i A_{i-1} + b_i); \qquad (8)$$
$$i = 1, 2, 3, ..., n$$

Затем определяются y_i (*обратная прогонка*):

$$y_n = (d_n - B_{n-1}a_n)/(b_n + A_{n-1} a_n); \qquad (9)$$
$$y_i = A_iy_{i+1} + B_i;$$
$$i = n-1, n-2, ..., 0.$$

Метод прогонки устойчив (достаточное условие), если для всех i выполняется неравенство:

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$$

б) Метод стрельбы.

Сущность метода стрельбы заключается в сведении решения краевой задачи (1)-(3) к решению задачи Коши для уравнения (1) со следующими начальными условиями:

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \alpha_3 \qquad (10)$$

$$y'(a) = C \text{ (если } \alpha_0 \neq 0) \text{ или } y(a) = C \text{ (если } \alpha_0 = 0) \qquad (11)$$

где введенный дополнительно неизвестный параметр C варьируется до тех пор, пока для решения $y(x)$ задачи (1), (10)-(11) не выполнится второе граничное условие (3) $\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \beta_3$ с заданной точностью.

В качестве начальных условий бывает удобнее взять краевое условие не на левой, а на правой границе вместе с дополнительным условием $y'(b)$=C (например, если для уравнения (1) точка $y=b$ является особой точкой типа седла, в то время как в точке $y=a$ данное уравнение не имеет особенностей).

Указанная выше задача Коши (1), (10)-(11) может быть представлена как система обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} z' = -p(x)z - q(x)y + f(x) \\ y' = z \end{cases} \qquad (12)$$

с начальными условиями:

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 z(a) = \alpha_3 \qquad (13)$$

$$z(a) = C \text{ (если } \alpha_0 \neq 0) \text{ или } y(a) = C \text{ (если } \alpha_0 = 0) \qquad (14)$$

Поскольку $y(b)$ и $z(b)$ зависят от C, то и выражение $\beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)-\beta_3$ также зависит от C и его можно рассматривать как функцию от этого параметра, т.е.

$$F(C) = \beta_0 y(b,C) + \beta_1 z(b,C) - \beta_3$$

Таким образом, задача об определении соответствующего параметра C, дающего решение краевой задачи (1)-(3), свелась к решению нелинейного уравнения $F(C) = 0$, которое можно решить либо методом половинного деления (предварительно найдя отрезок $[C_a, C_b]$, на концах которого $F(C)$ имеет противоположные знаки), либо методом Ньютона (в этом случае производная определяется численно: $F'(C_n) = (F(C_n + \delta C) - F(C_n))/\delta C$, где δC - малая величина порядка 10^{-2} - 10^{-4}). Напоминаем, что для нахождения $F(C)$ при каждом значении C необходимо решить задачу Коши (1), (10)-(11) или (12)-(14).

__Ответьте на вопросы:__

1) С каким порядком точности задача (1)-(3) аппроксимируется ее разностным аналогом (4)-(6)?
2) Можно ли, применяя методы прогонки и стрельбы, аппроксимировать первую производную в уравнении (1) правой (левой) разностью? Как при этом изменится порядок аппроксимации задачи?
3) Почему метод стрельбы получил такое название?
4) Можно ли при постановке задачи Коши дополнительное начальное условие брать в более общем виде $\gamma_0 y(a) + \gamma_1 y'(a) = \gamma_3$? Если да, то какие условия должны быть наложены на коэффициенты $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_3$?

5) Каким образом Вы бы реализовали метод встречной стрельбы?
6) Какими преимуществами обладают постановки задачи Коши в виде (1), (10)-(11) и в виде (12)-(14) при решении исходной задачи методом стрельбы?

__Выполните следующее задание:__

1) Получите решение краевой задачи (1)-(3) на отрезке $[a;b]$, при n = 10,20,40

а) методом прогонки, предварительно выведите формулы (8) и (9);

б) методом стрельбы (справа-налево или слева-направо или встречной стрельбы), взяв постановку задачи Коши как в виде (1), (10)-(11), так и в виде (12)-(14). Проведите расчеты по обоим методам с первым и вторым порядком аппроксимации для краевых условий.

2) При решении задачи Коши (8)-(10) используйте метод Эйлера с уточнением:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i, z_i); \quad \tilde{z}_{i+1} = z_i + hg(x_i, y_i, z_i);$$
$$y_{i+1} = y_i + 0.5h[f(x_i, y_i, z_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}, \tilde{z}_{i+1})];$$
$$z_{i+1} = z_i + 0.5h[g(x_i, y_i, z_i) + g(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}, \tilde{z}_{i+1})];$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$

3) Сравните численные решения друг с другом и с аналитическим решением.

ОДУ	Аналитическое решение
1. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$;	$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + 0.2e^{4x}$;
2. $y'' + y = 4xe^x$;	$y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x-2)e^x$;
3. $y'' - y = 2e^x - x^2$;	$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$
4. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$;	$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + (x^2/2 - x/3)e^x$;
5. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$;	$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 0.1\sin x + 0.3\cos x$;
6. $y'' + y = 4\sin x$;	$y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x$;
7. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$;	$y = C_1e^x + C_2e^{4x} - (2x^2 - 2x + 3)e^{2x}$;
8. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$;	$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (0.1x - 0.12)\cos x - (0.3x + 0.34)\sin x$;
9. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$;	$y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - 0.2xe^{-4x} - (x/6 + 1/36)e^{-x}$;
10. $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x$;	$y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + (x^3/12 - x^2/16 + x/32)e^x$;
11. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$;	$y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 0.25e^{2x} + 0.1\cos 2x + 0.05\sin 2x$;
12. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$;	$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + e^{3x}[(6/37)\sin x - (1/37)\cos x]$;
13. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$;	$y = (C_1 + C_2x + x^3)e^x$;
14. $y'' + y = x\sin x$;	$y = (C_1 - x^2/4)\cos x + (C_2 + x/4)\sin x$;
15. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$;	$y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + (x/16 - 1/32)e^{2x}$;
16. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$;	$y = C_1 + C_2e^{5x} - 0.2x^3 - 0.12x^2 - 0.048x + 0.02(\cos 5x - \sin 5x)$;
17. $y'' - 2y' + y = e^x/x$;	$y = e^x(x\ln\lvert x\rvert + C_1x + C_2)$;